Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WiSe 2022/23 **Blatt 9** **03.01.2023**

Aufgabe 21 *Symmetrische und antisymmetrische Zustände von Quantenteilchen*

Betrachten wir ein einzelnes Teilchen mit Spin S, das in einem eindimensionalen Kasten eingeschlossen ist. Der Hamilton-Operator $\hat{H}_1$, der das Teilchen repräsentiert, lautet dann

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}), \tag{1}$$

wobei $V(x) = 0$ für $0 < x < L$ und $V(x) \to +\infty$ für jeden anderen Fall.

a) Bestimmen Sie die Eigenenergien und Eigenvektoren von $\hat{H}_1$.

(1 Punkt)

b) Betrachten Sie nun zwei nicht wechselwirkende identische Teilchen, die durch den gemeinsamen Hamiltonian $\hat{H}_2 = \hat{H}_1 \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \hat{H}_1$. Bestimmen Sie die Form der Eigenenergien und Eigenvektoren, wenn $S = 0$ (bosonischer Fall). Wie lautet der Grundzustand und seine Energie? Dieselbe Frage für den ersten angeregten Zustand?

(1 Punkt)

c) Betrachten Sie nun fermionische Teilchen mit Spin $S = \frac{1}{2}$ und bestimmen Sie die Eigenvektoren und die entsprechenden Eigenenergien. Welche Form nehmen der Grundzustand und der erste angeregte Zustand an?

(1 Punkt)

Aufgabe 22 *Erhaltung der Teilchenzahl*

Betrachten Sie ein Ensemble mit einem ein chemisches Potential μ. Die freie Energie ändert sich um $\mu \mathrm{d}N$, wenn sich die Teilchenzahl um $\mathrm{d}N$ ändert, wobei Temperatur T und Volumen V konstant bleiben. Hieraus folgt

$$\mathrm{d}A = -P\mathrm{d}V - S\mathrm{d}T + \mu \mathrm{d}N \tag{2}$$

und das chemische Potential folgt aus der Maxwell-Relation

$$\mu = \left(\frac{\partial A}{\partial N}\right)_{V,T} \tag{3}$$

Bestimmen Sie aus der Zustandssumme des idealen Gases

$$Q_N = \frac{1}{h^{3N} N!} \int \mathrm{d}q \mathrm{d}p \exp\left[-\beta \sum_{i=1}^{N} p_i^2/(2m)\right], \ \lambda = \sqrt{2\pi\hbar^2/(mk_B T)} \tag{4}$$

die freie Energie A und das chemische Potential μ. Die Ergebnisse lauten

$$A = -k_B T N \left[\ln \left(\frac{V}{N\lambda^3} \right) + 1 \right], \tag{5}$$

$$\mu = k_B T \ln(\lambda^3 n), \tag{6}$$

mit der Dichte n. *(1 Punkt)*