Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WiSe 2022/23 **Blatt 11** **17.01.2023**

Aufgabe 25 *Relativistisches Fermi-Gas und weiße Zwerge*

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit dem Druck- und dem Dichteverlauf im Inneren eines kugelförmigen, nichtrotierenden weißen Zwerges. Hierzu nehmen wir an, dass der weiße Zwerg völlig aus ionisiertem ^{4}He besteht. Das Elektronengas kann dabei als völlig entartet angesehen werden, da dessen Temperatur $T \approx 10^6$K viel kleiner ist als die typische Fermi-Temperatur $T_F = 10^9$K. Das relativistische Elektronengas wirkt dem durch die Heliumkerne erzeugten Gravitationdruck entgegen, so dass sich ein hydrostatisches Gleichgewicht einstellt.
Um den lokalen Gleichgewichtszustand eines kleinen Teils des Elektronengases innerhalb des weißen Zwerges zu beschreiben, betrachten wir die großkanonische Zustandsumme für ein relativitisches Fermi-Gas, das sich in einem Kasten mit der Kantenlänge L und dem Volumen V befindet (periodische Randbedingungen). Das Volumen ist hierbei so klein gewählt, dass sowohl die lokale Elektrondichte als auch die Dichte der Heliumkerne als konstant angesehen werden kann. Der Elektronenspin ist gegeben durch $s = 1/2$, der zugehörige Entartungsfaktor lautet $g = 2s + 1 = 2$ und $n_e = \langle N_e \rangle / V$ sei die lokale Dichte des Elektronengases. Dann lautet der Logarithmus der großkanonischen Zustandsumme des Fermi-Gases

$$\ln \mathcal{Q}(V, \beta, z) = g \sum_{\boldsymbol{p}} \ln(1 + z e^{-\beta \epsilon_{\boldsymbol{p}}}), \text{ mit } \epsilon_{\boldsymbol{p}} = m_e c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\boldsymbol{p}}{m_e c} \right)^2} \tag{1}$$

als relativistische Einteilchenenergie eines Elektrons mit Impuls $\boldsymbol{p}$ und Masse $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$kg.

a) Nähern Sie die Zustandsumme für große $L \gg 1$ durch ein Integral über alle Impulse an und zeigen Sie ausgehend von $\Omega = -k_B T \ln \mathcal{Q}(v, \beta, z) = -PV$, dass sich der Druck des Elektrongases P über das Integral

$$P = \frac{4\pi g}{3h^3} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}p} \frac{p^3 \mathrm{d}p}{z^{-1} e^{\beta \epsilon(p)} + 1} \tag{2}$$

ergibt, wobei $\epsilon(p) = \epsilon_{\boldsymbol{p}}$ mit $p = |\boldsymbol{p}|$. Berechnen Sie das Integral für den Grenzfall $T \to 0$ indem Sie die Relation

$$\lim_{T \to 0} (z^{-1} e^{\beta \epsilon(p)} + 1)^{-1} = \theta(\epsilon(p_F) - \epsilon(p)) \tag{3}$$

verwenden. Der Fermi-Impuls p_F entspricht hierbei dem Radius der Impulskugel und ist über die Relation

$$g \frac{4\pi V}{h^3} \int_0^{p_F} \mathrm{d}p p^2 = \frac{gV}{h^3} \frac{4\pi p_F^3}{3} = \langle N_e \rangle \tag{4}$$

definiert. Zeigen Sie mit Hilfe der Substitution $p/m_e c = \sinh x$, dass sich folgender Ausdruck für den Elektronendruck ergibt

$$P = \frac{\pi g m_e^4 c^5}{6h^3} f\left(\frac{p_F}{m_e c} \right), \text{ wobei } f(y) = y(2y^2 - 3)\sqrt{1 + y^2} + 3 \sinh^{-1}(y). \tag{5}$$

(3 Punkte)

b) Bestimmen Sie die führende Ordnung des Ausdrucks (5) für den nichtrelativistschen Grenzfall $p/m_e c \ll 1$, indem Sie die Reihenentwicklung $\sinh^{-1}(y) = -y^3/6 + 3y^5/40 + \mathcal{O}(y^7)$ verwenden. Zeigen Sie damit, dass sich nach Ersetzen des Fermi-Impulses der Außdruck

$$\frac{p}{m_e c} \ll 1 \;:\; P = C_{\mathrm{nr}} n_e^{\gamma_{\mathrm{nr}}}, \quad \text{mit } C_{\mathrm{nr}} = \frac{g\hbar^2}{30\pi^2 m_e}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{5/3}, \quad \text{und } \gamma_{\mathrm{nr}} = \frac{5}{3} \tag{6}$$

für den Druck ergibt, wobei γ_{nr} den adiabatischen Exponenten im nichtrelativistischen Grenzfall bezeichnet.

(1 Punkt)

c) Berechnen Sie die führende Ordnung des Ausdrucks (5) für den ultrarelativistischen Fall $p/m_e c \gg 1$. Verwenden Sie dazu die asymptotische Entwicklung $\sinh^{-1}(y) = \ln(2y) + \mathcal{O}(y^{-2})$ für $y \gg 1$ und leiten Sie den folgenden Ausdruck ab:

$$\frac{p}{m_e c} \gg 1 \;:\; P = C_{\mathrm{ur}} n_e^{\gamma_{\mathrm{ur}}}, \quad \text{mit } C_{\mathrm{ur}} = \frac{gc\hbar}{24\pi^2}\left(\frac{6\pi^2}{g}\right)^{4/3}, \quad \text{und } \gamma_{\mathrm{nr}} = \frac{4}{3}. \tag{7}$$

(1 Punkt)

d) Wir kommen nun zur Berechnung des kugelsymmetrischen Druck- und Massendichteverlaufs $P(r)$ und $\rho(r)$ im Inneren eines weißen Zwerges ($0 < r \neq R$), dessen Radius und Masse wir mit R und M bezeichnen. Zuerst bemerken wir, dass die Elektronendichte $n_e(r) = \langle N_e \rangle / V$ vom Abstand r zwischen Volumen V und Zentrum des weißen Zwergs abhängt. Da aufgrund des vollständigen Ionisation auf die vier Nukleonen des Helium Kerns zwei Elektronen kommen, ergibt sich entsprechend für die Massendichte $\rho(r) = 2m_u n_e(r)$, mit $m_u = 1.66 \times 10^{-27}$kg. Da die Masse von Proton und Neutron um einen Faktor von 2000 größer ist als die des Elektrons, kann der Beitrag der Elektronen zur Massendichte in guter Näherung vernachlässigt werden. Wir beschränken uns im Folgenden auf die in den Aufgabenteilen b) und c) untersuchten Fälle des nichtrelativistischen und des ultrarelativistischen Elektronengases. Mit den Ausdrücken für die Elektronendichte aus b) und c) finden wir den folgenden Zustammenhang zwischen Druck und Massendichte

$$P(r) = K(\rho(r))^{\gamma} = K(\rho(r))^{\frac{1+n}{n}} \tag{8}$$

mit der vom Fall abhängigen Konstanten $K \in \{C_{\mathrm{nr}}/(2m_u)^{\gamma_{\mathrm{nr}}}, C_{\mathrm{ur}}/(2m_u)^{\gamma_{\mathrm{ur}}}\}$, dem adiabatischen Exponenten $\gamma \in \{\gamma_{\mathrm{nr}}, \gamma_{\mathrm{ur}}\}$ und dem zugehörigen Polytropen-Index $n = \frac{1}{\gamma - 1}$. Leiten Sie aus der Gleichung für das hydrostatistische Gleichgewicht

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = -\frac{GM(r)}{r^2}\rho(r) \tag{9}$$

und der Gleichung für die Massen-Erhaltung

$$M(r) = 4\pi \int_0^r \mathrm{d}u \rho(u) u^2 \tag{10}$$

folgende Relation her

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{r^2}{\rho(r)}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r}\right) = -4\pi G\rho(r) \tag{11}$$

Hierbei ist $M(r)$ die Masse innerhalb der Kugel mit Radius r und $G = 6.67\times10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}$ die Newtonsche Gravitationskonstante.

(1 Punkt)

Aufgabe 26 *Spezifische Wärme des Fermi-Gases*

Betrachten Sie ein Gas aus N freien Fermionen der Masse m, mit Spin $S = 1/2$. Der Zweck dieser Übung ist es eine perturbative Entwicklung von U, der inneren Energie eines Fermi-Gases, im Grenzwert niedriger Temperaturen ($T \ll T_F$) herzuleiten. Erinnern Sie sich daran, dass wir im Grenzwert eines hinreichend großen Systems den kontinuierlichen Grenzwert der Summe nehmen können

$$U = \sum_{\boldsymbol{p}} \epsilon_{\boldsymbol{p}} \langle n_{\boldsymbol{p}} \rangle = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}\, \epsilon_{\boldsymbol{p}} n_{\boldsymbol{p}}, \tag{12}$$

wobei $\epsilon_{\boldsymbol{p}} = |\boldsymbol{p}|^2/2m_e$.

a) Zeigen Sie, dass wenn die Temperatur $T = 0$ ist, die innere Energie durch

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F \tag{13}$$

gegeben ist, wobei ϵ_F die Fermi-Energie ist.

Hinweis: Sie können Gl. (4), die eine Beziehung zwischen dem Fermi-Impuls und der Anzahl der Teilchen N herstellt benutzen.

(1 Punkt)

b) Betrachten Sie nun den Fall eines Systems bei endlicher Temperatur T, die viel kleiner ist als die Fermi-Temperatur $T \ll T_F$. Zeigen Sie, dass die innere Energie wie folgt

$$U = \frac{V}{4\pi^2\hbar^3 m} \int_0^\infty \mathrm{d}p \frac{p^5}{5} \left(-\frac{\partial}{\partial p} n_p \right) \tag{14}$$

umgeschrieben werden kann. Man stellt fest, dass die Ableitung der mittleren Zahl n_p bei dem chemischen Potential μ ihren Extremwert annimmt. Leiten Sie basierend darauf die folgende Entwicklung um μ her:

$$U = \frac{V}{4\pi^2\hbar^3 m} (2m)^{5/2} \int_0^\infty \mathrm{d}\epsilon \left[\mu^{5/2} + \frac{5}{2}\mu^{3/2}(\epsilon - \mu) + \frac{15}{8}\mu^{1/2}(\epsilon - \mu)^2 \right] \frac{e^{\beta(\epsilon-\mu)}}{(e^{\beta(\epsilon-\mu)} + 1)^2}. \tag{15}$$

(2 Punkte)

c) Bei $T \ll T_F$ kann man die Approximation $\beta\mu \to \infty$ durchführen. Zeigen Sie dann, dass die innere Energie durch die folgende Formel

$$U = \frac{3}{5} N \epsilon_F \left[1 + \frac{5}{12}\pi^2 \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \right] \tag{16}$$

gegeben ist.

Hinweis: Für n eine gerade Zahl

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}y \frac{y^n e^y}{(e^y + 1)^2} = 2n(n-1)!(1 - 2^{1-n})\zeta(n), \tag{17}$$

wobei ζ die Riemannsche Zeta-Funktion ist. Wir stellen fest, dass $I_n = 0$ ist, wenn n eine ungerade Zahl ist. Außerdem gilt $\zeta(2) = \pi^2/6$.

Erinnern wir uns daran, dass das chemische Potenzial die folgende Form

$$\mu = \epsilon_F \left[1 - \frac{\pi^2}{12} \left(\frac{k_B T}{\epsilon_F} \right)^2 \right] \tag{18}$$

hat. *(2 Punkte)*

d) Zeigen Sie, dass die spezifische Wärme des Fermi-Gases dem folgenden Gesetz

$$\frac{C_v}{N k_B} = \frac{\pi^2}{2} \frac{k_B T}{\epsilon_F}, \tag{19}$$

im Grenzfall $T \ll T_F$ folgt.

(1 Punkt)