Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WiSe 2022/23 **Blatt 12** **23.01.2023**

Aufgabe 27 *Thermodynamische Funktionen des Bose-Gases*

Im Folgenden sollen thermodynamische Funktionen des idealen Bose-Gases hergeleitet werden. Die Zustandsgleichung im Grenzfall großer Volumina ist hierbei gegeben durch

$$\frac{P}{k_B T} = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(z), \ (T > T_c) \\ \frac{1}{\lambda^3} g_{5/2}(1), \ (T < T_c) \end{cases} \tag{1}$$

mit der kritischen Temperatur T_c unterhalb derer Kondensation auftritt. Die Fugazität wird hierbei für $\lambda^3/v < g_{3/2}(1)$ durch die Nullstelle der Gleichung

$$\frac{\lambda^3}{v} = g_{3/2}(z) \tag{2}$$

definiert. Für $\lambda^3/v > g_{3/2}(1)$ ist $z = 1$. Des Weiteren ist Gl. (9) äquivalent zu

$$\frac{g_{3/2}(z)}{g_{3/2}(1)} = \left(\frac{T_c}{T}\right)^{3/2}. \tag{3}$$

a) Leiten Sie her, dass die innere Energie U folgende Form annimmt

$$\frac{U}{N} = \begin{cases} \frac{3}{2} \frac{k_B T v}{\lambda^3} g_{5/2}(z), \ (T > T_c) \\ \frac{3}{2} \frac{k_B T v}{\lambda^3} g_{5/2}(1), \ (T < T_c). \end{cases} \tag{4}$$

(1 Punkt)

b) Zeigen Sie, dass $g_{n-1}(z) = z \frac{\partial}{\partial z} g_n(z)$. Zeigen Sie daraufhin mithilfe der Gl. (2) und (3), dass die Ableitung der Fugazität nach der Temperatur folgende Relation erfüllt

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial T} = -\frac{3}{2}\frac{\lambda^3}{Tv}\frac{1}{g_{1/2}(z)} = -\frac{3}{2}\frac{1}{T}\frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}. \tag{5}$$

(1 Punkt)

c) Bestimmen Sie mithilfe von Gl. (4) und (5) die spezifische Wärme bei konstantem Volumen C_V. Das Ergebnis ist hierbei gegeben durch

$$\frac{C_V}{N k_B} = \begin{cases} \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(z) - \frac{9}{4} \frac{g_{3/2}(z)}{g_{1/2}(z)}, \ (T > T_c) \\ \frac{15}{4} \frac{v}{\lambda^3} g_{5/2}(1), \ (T < T_c). \end{cases} \tag{6}$$

(2 Punkte)

d) Betrachten Sie den Grenzwert $T \to \infty$ und zeigen Sie, dass $\frac{C_V}{Nk_B} \to \frac{3}{2}$.

(1 Punkt)

e) Betrachten Sie nun tiefe Temperaturen $T \to 0$ und zeigen Sie, dass $\frac{C_V}{Nk_B} \propto T^{3/2}$.

(1 Punkt)

f) Wir wollen nun die Diskontinuität in der Ableitung der spezifischen Wärme bei $T = T_c$ untersuchen. Bestimmen Sie hierzu die Ableitung der spezifischen Wärme für $T < T_c$ und $T > T_c$ und zeigen Sie, dass

$$\left(\lim_{T \to T_c^+} \frac{\partial}{\partial T} \frac{C_V}{Nk_B} \right) - \left(\lim_{T \to T_c^-} \frac{\partial}{\partial T} \frac{C_V}{Nk_B} \right) = -\frac{27}{16\pi} \frac{\zeta(3/2)^2}{T_c} \approx -\frac{3.66}{T_c} \tag{7}$$

mit der Riemannschen Zeta Funktion $\zeta(n)$.

Hinweise: Die Polylogarithmen g_n haben einen wohldefinierten Grenzwert für $z \to 1^-$ für $n > 1$ wohingegen $g_{1/2}(z)$ und $g_{-1/2}(z)$ im Grenwert gegen 1^- divergieren. Für $n > 1$ gilt für den Wert der Polylogarithmen bei $z = 1$ folgende Relation

$$g_n(1) = \zeta(n), \;\; n > 1, \tag{8}$$

mit der Riemannschen Zeta Funktion ζ. Des Weiteren darf folgender Grenzwert in der Rechnung verwendet werden

$$\lim_{z \to 1^-} \frac{g_{1/2}^3(z)}{g_{-1/2}(z)} = 2\pi. \tag{9}$$

(3 Punkte)

Aufgabe 28 *Bose Gas in zwei Dimensionen*

a) Berechnen Sie den Logarithmus der großkanonischen Zustandssumme in dem Grenzfall

$$\lim_{V \to \infty} \frac{1}{V} \ln \mathcal{Q}(z, V, T) = \frac{1}{\lambda^2} g_2(z) \tag{10}$$

indem Sie folgende Integraldarstellung von $\ln \mathcal{Q}$ für große Volumina verwenden

$$\ln \mathcal{Q} = -\frac{2\pi L^2}{h^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{d}p p \ln(1 - z e^{-\beta \epsilon_p}), \tag{11}$$

wobei $V = L^2$ die dem System zur Verfügung stehende Fläche darstellt.

(2 Punkte)

b) Berechnen Sie die mittlere Anzahl an Teilchen pro Flächeneinheit als Funktion von z und T.

(2 Punkte)

c) Zeigen Sie, dass im Fall eines zweidimensionalen Bose-Gases keine Bose-Einstein Kondensation stattfinden kann, und begründen Sie das Result ihrer Rechnung physikalisch.

Hinweis: Zeigen Sie, dass das Integral für N divergiert, wenn sich die Fugazität z dem Wert 1 annähert.

(4 Punkte)