

Übung zur Vorlesung Theoretische Physik IV

WiSe 2022/23

Blatt 7

06.12.2022

Aufgabe 15 *Äquivalente Definition der Entropie*

Wir betrachten ein mikrokanonisches Ensemble mit N identischen Teilchen, einem Volumen V und einer Energie die Werte zwischen $E - \Delta$ und E annimmt ($\Delta > 0$). Zeigen Sie, dass die folgenden drei Formeln zu einer äquivalenten Definition der Entropie S führen, die sich lediglich durch eine additive Konstante der Ordnung $\mathcal{O}(\ln N)$ unterscheidet.

$$S = k_B \ln \Gamma(E) \quad (1a)$$

$$S = k_B \ln \omega(E) \quad (1b)$$

$$S = k_B \ln \Sigma(E). \quad (1c)$$

Hierbei ist $\Gamma(E)$ das Phasenraumvolumen, dass durch die Gesamtheit aller Mikrozustände eingenommen wird mit

$$\Gamma(E) = \int_{E-\Delta}^E dE' \text{Tr}\{\delta(E' - \hat{H})\}, \quad (2)$$

$\Sigma(E)$ ist das Phasenraumvolumen, dass von der Fläche mit energie E begrenzt wird mit

$$\Sigma(E) = \text{Tr}\{\theta(E - \hat{H})\}, \quad (3)$$

und $\omega(E)$ ist die Zustandsdichte des Systems bei der Energie E und ist definiert als

$$\omega(E) = \frac{\partial \Sigma(E)}{\partial E}. \quad (4)$$

Hinweis: Sie dürfen annehmen, dass $\Delta \ll E$ und dass der durch den Integranden in Gl.(2) beschriebene Hyperkörper derart beschaffen ist, dass $\Sigma(E - \Delta)/\Sigma(E) \rightarrow 0$, für festes Δ und $N \rightarrow \infty$.

(2 Punkte)

Aufgabe 16 *Mikrokanonische Beschreibung der Paramagneten*

Betrachten Sie erneut ein System aus N unterscheidbaren Spin-1/2 Teilchen in einem Magnetfeld B . Die einzelnen Spins können nur zwei Energiewerte $E_- = E_0/2$ oder $E_+ = -E_0/2$ annehmen. Sei n_- die Besetzung von E_- und n_+ die Besetzung von E_+ . Die Gesamtenergie des Systems sei U .

a) Bestimmen Sie die Entropie des Systems im mikrokanonischen Ensemble.

(1 Punkt)

- b) Bestimmen Sie die Temperatur und zeigen Sie, dass sie negative Werte annehmen kann. Leiten Sie dann den Ausdruck für die innere Energie U als Funktion der Temperatur her.

(2 Punkte)

- c) Bestimmen Sie den Ausdruck für die spezifische Wärme, die als

$$C = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_B \quad (5)$$

definiert ist.

(1 Punkt)

- d) Leiten Sie den Ausdruck für die Gesamtmagnetisierung $M^z = \mu_B(n_+ - n_-)$ ab, und leiten Sie daraus die Form der magnetischen Suszeptibilität χ ab, die durch

$$\chi = \left. \frac{\partial M^z}{\partial B} \right|_T \quad (6)$$

gegeben ist. Zeigen Sie dann, dass im Grenzfall $T \gg \mu_B B/k$ die Suszeptibilität dem Curie-Gesetz folgt, d.h. $\chi \sim 1/T$.

(2 Punkte)