Übung zur Vorlesung
Theoretische Physik IV

WiSe 2022/23 **Blatt 1** **26.10.2022**

Bemerkung: Die Aufgaben dieses Blattes zählen als Bonuspunkte zur Zulassung.

Aufgabe 1 *Dichteoperator*

Sei $\mathcal{H}$ ein endlich-dimensionaler Hilbertraum, d.h. $\dim\mathcal{H} = N < \infty$. Seien $|\Psi_n\rangle \in \mathcal{H}, n = 1, .., M$ normalisierte, aber nicht unbedingt orthogonale Zustände. Sei weiter $\hat{\rho} = \sum_{n=1}^{M} p_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$ mit $0 \leq p_n \leq 1$ und $\sum_{n=1}^{M} p_n = 1$. Zeigen Sie, dass $\hat{\rho}$ ein Dichteoperator ist, also

a) $\mathrm{Sp}(\hat{\rho}) = 1$ *(0,5 Punkte)*

b) $\hat{\rho} = \hat{\rho}^\dagger$ *(0,5 Punkte)*

c) Für alle Zustände $|\phi\rangle \in \mathcal{H}$ gilt $\langle\phi|\hat{\rho}|\phi\rangle \geq 0$ *(0,5 Punkte)*

d) Seien $\{\lambda_i\}$ die Eigenwerte von $\hat{\rho}$. Zeigen Sie $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1$ und $\lambda_i \geq 0$ *(0,5 Punkte)*

Aufgabe 2 *Eigenschaften der Spur*

Sei $\mathcal{H}$ ein endlich-dimensionaler Hilbertraum, d.h. $\dim\mathcal{H} = N < \infty$ und $\hat{A}$, $\hat{B}$ und $\hat{C}$ Operatoren auf $\mathcal{H}$. Sei $\{|a_n\rangle\}$ eine vollständige Orthonormalbasis, d.h. $\sum_{n=1}^{N} |a_n\rangle\langle a_n| = \hat{\mathbb{1}}$ und $\langle a_i|a_j\rangle = \delta_{ij}$. Desweiteren sei $\{|b_n\rangle\}$ eine andere Basis mit denselben Eigenschaften. basis with the same properties.

a) Zeigen Sie, dass die Spur eines beliebigen Operators $\hat{A}$, $\mathrm{Sp}\,(\hat{A})$, unabhängig von der Wahl der Basis ist. *(0,5 Punkte)*

b) Sei $\hat{A}$ diagonalisierbar und $\{\lambda_i\}$ die entsprechenden Eigenwerte. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Sp}\,(\hat{A}) = \sum_i \lambda_i$. *(0,5 Punkte)*

c) Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{Sp}\,(\hat{A}\hat{B}) = \mathrm{Sp}\,(\hat{B}\hat{A}) \text{ and } \mathrm{Sp}\,(\hat{A}\hat{B}\hat{C}) = \mathrm{Sp}\,(\hat{B}\hat{C}\hat{A}).$$

(0,5 Punkte)

Aufgabe 3 *Folgerungen aus der Zustandsgleichung*

Die Existenz der Zustandsgleichung $f(p, V, T) = 0$ impliziert zum einen, dass nur zwei der Zustandsgrößen p, V und T bei thermodynamischen Zustandsänderungen als unabhängige

Variablen angesehen werden können. Zum anderen folgt aus der Zustandsgleichung u.a. die Gültigkeit der folgenden Relation

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T} . \tag{1}$$

Hierbei deutet der Klammerindex an, welche der Zustandsgrößen bei der entsprechenden Zustandsänderung als konstant angesehen werden muss. Um zu sehen, wie derartige Relationen aus der Zustandsgleichung folgen, bezeichnen wir mit x, y und z jeweils eine der Zustandsgrößen p, V und T, und schreiben für die Zustandsgleichung entsprechend $f(x, y, z) = 0$. Für konstantes z folgt unter der Annahme der Auflösbarkeit der implizit definiten Funktion $f(x, y, z) = 0$ nach x die Existenz des funktionalen Zusammenhangs $x = x(y)$.

a) Zeigen Sie, dass aus $f(x, y, z) = 0$ für konstantes z die Relation

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_z} .$$

folgt. *(1 Punkte)*

b) Leiten Sie für konstantes z aus der Zustandsgleichung die folgende Gleichung ab:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y} .$$

(1 Punkte)

c) Beweisen Sie die Identität

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1$$

und folgern Sie daraus die Gültigkeit von Glg. (1). *(1 Punkte)*