Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: `tom.schmit@physik.uni-saarland.de`)

Saarbrücken, den 27.10.23

Blatt 0 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

- Die Übungen dürfen in Gruppen von bis zu zwei Personen abgegeben werden.
- Die Abgabe erfolgt in elektronischer Form oder Papierform (Briefkasten AG Morigi, Erdgeschoss E2 6).
- Veröffentlichung des neuen Übungsblatt, sowie dessen Abgabetermin, werden noch bekanntgegeben.
- Zulassungsvoraussetzung zur Klausur sind 50 % der Punke aus den Übungsaufgaben, sowie Anwesenheit und Mitarbeit in den Übungen.
- Die Übung findet Freitags 12:00 – 13:30 statt. Raum wird noch bekanntgegeben.

Aufgabe 1 *Zylinderkoordinaten*

Betrachten Sie Zylinderkoordinaten:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\rho$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_z$ und zeigen Sie, dass $\{\mathbf{e}_\rho,\ \mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{e}_z\}$ eine Orthonormalbasis ist.

b) Drücken Sie den Ortsvektor $\mathbf{r}$ in der Basis $\{\mathbf{e}_\rho,\ \mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{e}_z\}$ aus.

Betrachten Sie nun ein Teilchen, dass sich entlang seiner Trajektorie durch den Raum bewegt. Der Ortsvektor, der den Ort des Teilchens zur Zeit t angibt, ist eine Funktion der Zeit, also $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Beschreibt man die Trajektorie in Zylinderkoordinaten sind die Koordinaten $(\rho(t),\ \varphi(t),\ z(t))$ zeitabhängig.

c) Berechnen Sie zunächst die Ableitung der Einheitsvektoren $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\rho$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\varphi$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_z$ entlang der Bahn des Teilchens.

d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}$. Drücken Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ in der Basis $\{\mathbf{e}_\rho,\ \mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{e}_z\}$ aus.

e) Berechnen Sie die Beschleunigung $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r}$. Drücken Sie die Beschleunigung $\mathbf{a}$ in der Basis $\{\mathbf{e}_\rho,\ \mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{e}_z\}$ aus.

Aufgabe 2 *Länge von Raumkurven*

a) Gegeben sei eine Raumkurve

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}:\ [t_0; t_1] &\longrightarrow \mathbf{R}^n \\ t &\longmapsto \boldsymbol{\gamma}(t)\end{aligned}$$

im $\mathbf{R}^n$. Leiten Sie eine Formel für das infinitesimale Linienelement $\mathrm{d}s$ und damit einen Ausdruck für die Länge der Kurve her.

b) Berechen Sie die Länge von $\boldsymbol{\beta}:\ [0;\ln(2)] \longrightarrow \mathbf{R}^3,\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \sqrt{2}t \\ \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$.

c) Leiten Sie für eine Kurve im $\mathbf{R}^2$, die durch den Graphen einer Funktion $f : I \to \mathbf{R}$, mit $I \subset \mathbf{R}$, gegeben ist, eine Formel für das infinitesimale Linienelement und die Länge der Kurve her.

d) Berechnen Sie die Länge einer Kettenlinie $f:\ [-1;1] \longrightarrow \mathbf{R},\ x \longmapsto \cosh(x)$.

Aufgabe 3 *Mehrdimensionale Kettenregel*

a) Die Trajektorie eines Teilchens sei durch $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))^\top$ beschrieben. Die kinetische Energie eines Teilchens ist bekanntlich durch $T = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2$ mit $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))^\top$ gegeben.

Berechnen Sie

i) $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial T}{\partial t}$.

ii) $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}, \frac{\partial T}{\partial \dot{y}}, \frac{\partial T}{\partial \dot{z}}$.

iii) $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ Verwenden Sie explizit die mehrdimensionale Kettenregel!

Hinweis: Machen Sie sich klar wie T als Komposition von zwei Abbildungen geschrieben werden kann.

b) Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im Potential $V(x, y, t) = \frac{t}{2}(x^2 + y^2)$.

i) Stellen Sie einen Ausdruck für die kinetische Energie T in ebenen Polarkoordinaten (r, θ) auf.

ii) Berechnen Sie für $E := T + V$: $\frac{\partial}{\partial r}E$, $\frac{\partial}{\partial \theta}E$, $\frac{\partial}{\partial \dot{r}}E$, $\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}}E$ und $\frac{\partial}{\partial t}E$.

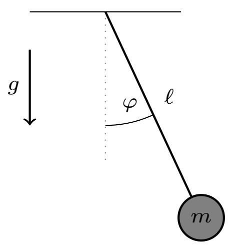
iii) Das Teilchen wird nun von einem Dämon entlang der Kurve

$$\boldsymbol{\gamma}:\ [0;2] \longrightarrow \mathbf{R}^2,\ t \longmapsto t \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) \end{pmatrix}$$

bewegt. Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E$ zunächst für eine allgemeine Kurve, dann für $\boldsymbol{\gamma}$.

Aufgabe 4 *Mathematisches Pendel*

Ein ebenes Pendel der Masse m hängt an einer starren, masslosen Stange der Länge ℓ im homogenen Schwerefeld der Erde (siehe Abbildung). Das Pendel kann nur in der Ebene schwingen, die durch diese Achse und die Richtung des Erdschwerefeldes aufgespannt ist. Es wirken keine weiteren Kräfte.



a) Welchen Zwangsbedingungen unterliegt das System?

b) Berechnen Sie die Lagrangefunktion des Systems in geeigneten Koordinaten.

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

d) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen und überführen Sie die Differentialgleichung zweiter Ordnung in ein System erster Ordnung.

e) Lösen Sie das System für die Anfangswerte $\varphi(t=0)=\varphi_0$ und $\dot{\varphi}(t=0)=0$.
Hinweis: Bequem ist die Substitution $\omega_0 := \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.