Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: tom.schmit@physik.uni-saarland.de)

Saarbrücken, den 27.10.23

Blatt 1 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

(Abgabe bis 7.11.2023, 17:00 Uhr)

Aufgabe 1 *Kugelkoordinaten*

Betrachten Sie Kugelkoordinaten:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi \sin\vartheta \\ \sin\varphi \sin\vartheta \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

a) Berechnen Sie die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\varphi$, $\mathbf{e}_\vartheta$ und zeigen Sie, dass $\{\mathbf{e}_r,\ \mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{e}_\vartheta\}$ eine Orthonormalbasis ist.

b) Drücken Sie den Ortsvektor $\mathbf{r}$ in der Basis $\{\mathbf{e}_r,\ \mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{e}_\vartheta\}$ aus.

Betrachten Sie nun ein Teilchen, dass sich entlang seiner Trajektorie durch den Raum bewegt. Der Ortsvektor, der den Ort des Teilchens zur Zeit t angibt, ist eine Funktion der Zeit, also $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Beschreibt man die Trajektorie in Kugelkoordinaten, sind die Koordinaten $(r(t),\ \varphi(t),\ \vartheta(t))$ zeitabhängig.

c) Berechnen Sie zunächst die Ableitung der Einheitsvektoren $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_r$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\varphi$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_\vartheta$ entlang der Bahn des Teilchens.

d) Berechnen Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{r}$. Drücken Sie die Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ in der Basis $\{\mathbf{e}_r,\ \mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{e}_\vartheta\}$ aus.

e) Berechnen Sie die Beschleunigung $\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\mathbf{r}$. Drücken Sie die Beschleunigung $\mathbf{a}$ in der Basis $\{\mathbf{e}_r,\ \mathbf{e}_\varphi,\ \mathbf{e}_\vartheta\}$ aus.

[2 + 0.5 + 1.5 + 1.5 + 2 = 7.5 Punkte]

Aufgabe 2 *Lemmata zur Euler-Lagrange-Gleichung*

a) Zeigen Sie, dass die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichung für das Quadrat der Lagrange-Funktion

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}^2}{\partial q} = 0$$

auch die reguläre Euler-Lagrange-Gleichung löst, wenn die totale Zeitableitung der Lagrange-Funktion $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t}$ verschwindet.

b) Zeigen Sie, dass für Lagrangefunktionen $\mathcal{L}(q, \dot{q})$, die nicht explizit von der Zeit abhängen,

$$E := \dot{q}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \mathcal{L} \equiv \text{const.}$$

gilt. Diese Tatsache ist auch als Beltrami-Identität bekannt.

c) Betrachten Sie eine Koordinatentransformation $q \mapsto f(q)$, wobei f zweimal differenzierbar und invertierbar ist. Die neuen Koordinaten seien mit $Q = f(q)$ bezeichnet.

   i) Zeigen Sie, dass die neuen Geschwindigkeiten $\dot{Q}$ als Funktion der alten Koordinaten q und Geschwindigkeiten $\dot{q}$ durch $\dot{Q} = f'(q)\dot{q}$ gegeben ist.

   ii) Berechnen Sie partiellen Ableitungen $\frac{\partial Q}{\partial q}$, $\frac{\partial Q}{\partial \dot{q}}$, $\frac{\partial \dot{Q}}{\partial q}$ und $\frac{\partial \dot{Q}}{\partial \dot{q}}$.

   iii) Die Lagrangefunktion in den alten Koordinaten sei mit $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t)$, die in den neuen Korrdinaten mit $\hat{\mathcal{L}}(Q, \dot{Q}, t)$ bezeichnet. Damit gilt die Identität

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = \hat{\mathcal{L}}(f(q), f'(q)\dot{q}, t). \tag{1}$$

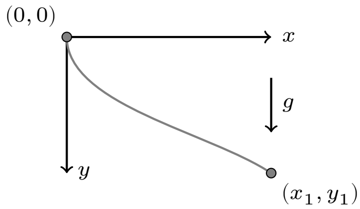
   Zeigen Sie: Erfüllt $q(t)$ die Euler-Lagrange-DGL $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$ in den alten Koordinaten, so erfüllt $Q(t)$ die Euler-Lagrange-DGL $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial Q} = 0$ in den neuen Koordinaten.

   Hinweis: Wenden Sie auf beiden Seiten von **??** den Operator $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial}{\partial q}$ an. Da f invertierbar ist, gilt $f'(q) = 0$ höchstens an isolierten Punkten.

[2 + 1 + 4 = 7 Punkte]

Aufgabe 3 *Brachistochronenproblem*

Ein Teilchen mit Masse m bewege sich auf einer Schiene unter dem Einfluss der Gravitation reibungsfrei von Punkt $(0, 0)$ nach (x_1, y_1).



Die Anfangsgeschwindigkeit sei Null. Wir möchten die Form der Schiene nun so bestimmen, dass das Teilchen schnellst möglich das Ende erreicht.

a) Nutzen Sie die Definition der Momentangeschwindigkeit $\|\mathbf{v}\| = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$ um die Gesamtlaufzeit des Teilchens T als Integral über den Weg s auszudrücken.

b) Schreiben Sie die Zeit $T[y(x)]$ als Funktional über die Form der Schiene $y(x)$, indem Sie mithilfe der Energieerhaltung die Geschwindigkeit durch die Höhe y ausdrücken.

c) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion die Form

$$\mathcal{L}(y, y', x) = \sqrt{\frac{1 + y'(x)^2}{y(x)}}$$

   besitzt und bestimmen Sie mithilfe der Euler-Lagrange-Gleichung die Differentialgleichung der Schiene $y(x)$.

d) Zeigen Sie, dass sich die DGL zu

$$y(1 + y'^2) = \text{const.}$$

   reduzieren lässt. Zeigen Sie weiterhin, dass diese durch eine Zykloide

$$x(\psi) = R(\psi - \sin\psi)$$
$$y(\psi) = R(1 - \cos\psi)$$

   gelöst wird. Die freien Parameter brauchen nicht bestimmt zu werden.
   Hinweis Für parametrische Kurven gilt $y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$, wobei $\dot{()}$ die Ableitung nach dem Parameter bezeichnet.

[0.5 + 1 + 2 + 2 = 5.5 Punkte]