Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: `tom.schmit@physik.uni-saarland.de`)

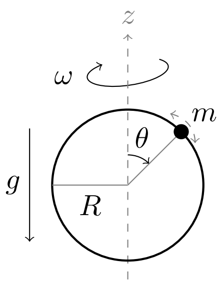
Saarbrücken, den 02.11.23

Blatt 2 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

(Abgabe bis 09.11.23, 17:00 Uhr)

Übung 1 *Perle auf rotierendem Draht*

Ein Teilchen der Masse m sei auf einem kreisförmig rotierenden Draht angebracht und auf diesem frei beweglich. Der Draht rotiere im homogenen Schwerefeld der Stärke $g \geq 0$ mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um die Vertikale.



a) Geben Sie die Zwangsbedingungen an.

b) Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und leiten Sie die Bewegungsgleichung her.

c) Zeigen Sie, dass durch die Einführung der dimensionslosen Zeit $\tau = \omega t$ die Bewegungsgleichung auf die Form
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\tau^2} - \sin\theta\cos\theta - \mu\sin\theta = 0 \tag{1}$$
mit einem Parameter $\mu \in \mathbf{R}$ gebracht werden kann.

d) Überführen Sie die entdimensionalisierte Gleichung in ein System erster Ordnung indem Sie die Größe $\Omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\tau}$ einführen. Bestimmen Sie die Fixpunkte $\left(\begin{smallmatrix}\theta^\star\\ \Omega^\star\end{smallmatrix}\right)$ des Systems, also die Punkte für die $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\begin{smallmatrix}\theta^\star\\ \Omega^\star\end{smallmatrix}\right) = \mathbf{0}$ gilt.

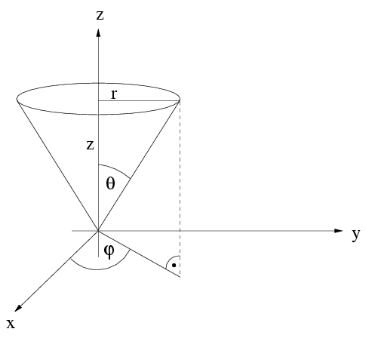
e) Untersuchen Sie die Fixpunkte auf ihre Stabilität. Betrachten Sie dazu eine eine kleine Störung $\left(\begin{smallmatrix}\theta^\star\\ \Omega^\star\end{smallmatrix}\right) + \left(\begin{smallmatrix}\delta\theta\\ \delta\Omega\end{smallmatrix}\right)$ und betrachten Sie die sich ergebende Differentialgleichung in linearer Ordnung von $\left(\begin{smallmatrix}\delta\theta\\ \delta\Omega\end{smallmatrix}\right)$. Die Stabilität ergibt sich aus den Eigenwerten λ_i der Systemmatrix: Gilt für alle Eigenwerte $\Re(\lambda_i) \leq 0$, dann ist der Fixpunkt stabil, ansonsten ist er instabil.
Hinweis: Mit dem trigonometrischen Pythagoras zeigt man leicht, dass $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

f) Tragen Sie die Fixpunkte $\theta^\star$ über den Parameter μ auf. Zeichnen Sie stabile Fixpunkte als durchgezogene und instabile als durchbrochene Linie.

[0.5 + 3 + 2 + 1 + 2 + 0.5 = 9 Punkte]

Übung 2 *Teilchen auf Kegelmantel*

Wir betrachten einen Massenpunkt auf einem Kegelmantel mit halben Öffnungswinkel θ im homogenen Schwerefeld der Erde.



a) Was sind die Koordinaten des Massenpunktes in den eingezeichneten Koordinaten?

b) Berechnen Sie die Lagrangefunktion.

c) Welche räumliche Symmetrie hat die Lagrangefunktion?

d) Welche Erhaltungsgröße folgt aus der Symmetrie? Was nutzt Ihnen die Erhaltungsgröße ?

e) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

[0.5 + 0.5 + 1 + 1 + 2 = 5 Punkte]