Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: `tom.schmit@physik.uni-saarland.de`)

Saarbrücken, den 10.11.23

Blatt 3 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

(Abgabe bis 16.11.23, 17:00 Uhr)

Übung 1 *Impulserhaltung im Mehrteilchensystem*

Betrachten Sie ein System mit N Teilchen, deren potentielle Energie U nur vom Abstand der Teilchen abhängt. Die potentielle Energie eines Teilchenpaares sei also $U_{i,j} = U\left(\left\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right\|\right) \ i \neq j$.

Zeigen Sie unter Verwendung der Euler-Lagrange-Gleichungen, dass der Gesamtimpuls

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i$$

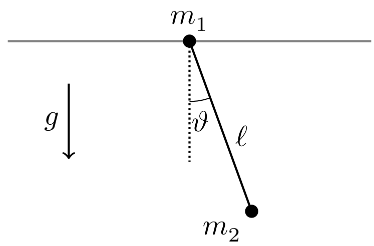
eine Erhaltungsgröße ist. Hierbei bezeichnet $(\mathbf{p}_i)_n = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\mathbf{r}}_i)_n}$ die n-te Komponente des generalisierten Impulses des i-ten Teilchens.

Hinweis: Benutzen Sie das Noether-Theorem oder verwenden Sie die Bewegungsgleichungen. Wenn Sie letzteren Weg wählen, rechnen Sie nach, dass $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} U\left(\left\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right\|\right) = \frac{U'\left(\left\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right\|\right)}{\left\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right\|}\left(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right)\left(\delta_{ki} - \delta_{kj}\right)$ gilt, wobei $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_k} f(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial r_{k,1}} \\ \frac{\partial f}{\partial r_{k,2}} \\ \frac{\partial f}{\partial r_{k,3}} \end{pmatrix}$ den Gradienten bzgl. der Koordinaten des k-ten Teilchens und $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ das Kronecker-Delta bezeichnet.

[4 Punkte]

Übung 2 *Gleitendes Pendel*

Wir betrachten ein gleitendes Pendel im homogenen Schwerefeld der Erde. Die Masse m_1 kann sich reibungsfrei auf einer horizontalen Achse bewegen. Das Pendel kann nur in der Ebene schwingen, die durch diese Achse und die Richtung des Erdschwerefeldes aufgespannt ist.



a) Berechnen Sie die Lagrangefunktion.

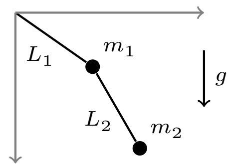
b) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf.

c) Geben Sie die Erhaltungsgrößen des Systems einschließlich ihrer physikalischen Bedeutung an.

[1 + 2 + 2 = 5 Punkte]

Übung 3 *Doppelpendel*

Wir betrachten ein Doppelpendel im homogenen Schwerefeld der Erde.



a) Was sind geeignete verallgemeinerte Koordinaten zur Beschreibung des Doppelpendels?

b) Berechnen Sie die Lagrangefunktion. *Hinweis:* Es gilt $\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 = \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$

[2 + 3 = 5 Punkte]

Übung 4 *Hamiltonsches Prinzip (Bonus)*

Leiten Sie aus dem Hamiltonschen Prinzip

$$\delta A = \delta \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \, \mathrm{d}t \overset{!}{=} 0$$

die Euler-Lagrange-Gleichungen für Lagrangefunktion $\mathcal{L}(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$, die neben dem Ort q und der Geschwindigkeit $\dot{q}$ auch von der Beschleunigung $\ddot{q}$ abhängen, her. Gehen Sie davon aus, das die Trajektorie und die Momentangeschwindigkeit am Anfangs- und Endpunkt festgelassen werden.

[5 Bonus]