Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: tom.schmit@physik.uni-saarland.de)

Saarbrücken, den 17.11.23

Blatt 4 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

(Abgabe bis 23.11.23, 17:00 Uhr)

Übung 1 *Virialsatz*

Für ein Teilchen in einem allgemeinen quadratischen Potential $U = \alpha q^2$ ist die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L} = T - U = \frac{1}{2} m\dot{q}^2 - \alpha q^2 \,.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$2T = p\dot{q} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(pq) + \frac{\partial U}{\partial q} q$$

b) Zeigen Sie, dass

$$\overline{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(pq)} = 0,$$

wenn $p(t)$ und $q(t)$ beschränkte Funktionen sind und $\bar{f}$ den zeitlichen Mittelwert

$$\bar{f} = \lim_{\tau \to \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(t)\,\mathrm{d}t$$

bezeichnet.

c) Zeigen Sie schließlich, dass für quadratische Potentiale die kinetische und potentielle Energie den gleichen zeitlichen Mittelwert annehmen, also

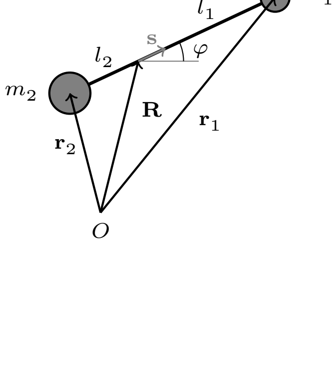
$$\bar{U} = \bar{T}$$

gilt.

[2 + 2 + 2 = 6 Punkte]

Übung 2 *Hantel in der Schwerelosigkeit*

Eine Hantel bestehend aus zwei Massen m_1 und m_2, die mit einer masselosen Stange der Länge $l = l_1 + l_2$ starr verbunden sind, bewege sich kräftefrei in der Ebene.



a) Rechnen Sie nach, dass die Abstände l_1 und l_2 des Schwerpunktes $\mathbf{R}$ zu den zwei Massen durch

$$l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \quad \text{und} \quad l_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} l$$

gegeben sind.

b) Drücken Sie $\mathbf{r}_1$ und $\mathbf{r}_2$ mithilfe von $\mathbf{R} = \left(\begin{smallmatrix} R_x \\ R_y \end{smallmatrix}\right)$ und $\mathbf{s} = \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{smallmatrix}\right)$ aus um zu zeigen, dass die Lagrangefunktion die Form

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}\dot{R}_x^2 + \frac{M}{2}\dot{R}_y^2 + \frac{\Theta}{2}\dot{\varphi}^2$$

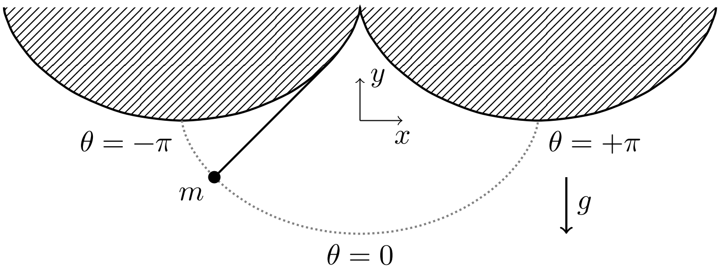
annimmt. Bestimmen Sie die Konstanten M und Θ.

c) Zeigen Sie, dass alle kanonischen Impulse erhalten sind. Integrieren Sie die Gleichungen für die (erhaltenen) Impulse um die allgemeinen Lösungen $R_x(t)$, $R_y(t)$ und $\varphi(t)$ zu finden. Die Konstanten brauchen *nicht* mit physikalischen Größen (wie Anfangsort oder -geschwindigkeit) in Verbindung gebracht zu werden.

[1 + 1.5 + 1.5 = 4 Punkte]

Übung 3 *Zykloidenpendel*

Betrachten Sie eine Masse m, deren Bewegung im homogenen Erdschwerefeld g auf eine Zykloide eingeschränkt ist.



Der Ortsvektor der Masse ist parametrisiert durch $-\pi \leq \theta \leq \pi$ als $\mathbf{r} = R\left(\begin{smallmatrix} \theta + \sin\theta \\ -1 - \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ gegeben, wobei $0 < R = \text{const.}$ ist.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems auf.

b) Zeigen Sie, dass

$$H := (mR^2\dot{\theta}^2 - mgR)(1 + \cos\theta) \tag{1}$$

eine Erhaltungsgröße ist.

c) Das Pendel wird nun um $0 < \theta_0 < \pi$ ausgelenkt und mit verschwindender Geschwindigkeit losgelassen. Zeigen Sie, dass die Periode einer Oszillation (Hin und Her) durch

$$\mathcal{T} = 4\sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^{\theta_0} \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{\cos\theta - \cos\theta_0}}\, \mathrm{d}\theta \tag{2}$$

gegeben ist.

Hinweis: Gleichung 1 kann auf die Form $f(\theta)\dot{\theta} = 1$ gebracht werden, ist also eine seperierbare Differentialgleichung für die Position θ. Mit dem Separationsansatz zur Lösung erhält man $\int_{\theta_0}^{\theta_1} f(\theta)\, \mathrm{d}\theta = \int_{t_0}^{t_1} 1\, \mathrm{d}t$, wobei θ_0 und θ_1 die Positionen zu den Zeiten t_0 und t_1 sind.

d) Nutzen Sie die Halbwinkelidentitäten

$$2\sin^2\frac{\theta}{2} = (1-\cos\theta) \quad \text{und} \quad 2\cos^2\frac{\theta}{2} = (1+\cos\theta)$$

um das Integral in die Form

$$\mathcal{T} = 4\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\theta_0} \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}}\,\mathrm{d}\theta$$

zu überführen und lösen Sie es. Zeigen Sie damit, dass die Periodendauer unabhängig vom Ausschlag ist.
Hinweis: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin(x)$

e) Verifizieren Sie dieses Ergebnis indem Sie mithilfe der Halbwinkelidentitäten und einer geeigneten Koordinatentransformation die Lagrangefunktion aus Teil a) in die Lagrangefunktion eines harmonischen Oszillators überführen und dessen Periode (mit einem Verfahren Ihrer Wahl) bestimmen.

[1 + 1 + 3 + 3 + 2 = 10 Punkte]