Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: tom.schmit@physik.uni-saarland.de)

Saarbrücken, den 24.11.23

Blatt 5 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

(Abgabe bis 30.11.23, 17:00 Uhr)

Übung 1 *Eindimensionale Bewegung*

Bestimmen Sie die Periodendauer $\mathcal{T}$ der Oszillationen eines Körpers der Masse m im Potential

$$U(x) = A\,|x|^n\,, \quad A > 0\,,$$

als Funktion der Gesamtenergie E. Verwenden Sie die Eulersche Betafunktion

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}\,(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

um eine besser Darstellung des resultierenden Integrals zu finden.

[2 Punkte]

Übung 2 *Zentralpotential*

Für einen Körper der Masse m im Zentralpotential $U(r)$ ist die Lagrangefunktion in Kugelkoordinaten durch

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2(\theta) + r^2\dot{\theta}^2\right) - U(r)$$

gegeben.

a) Berechnen Sie die Energie E und den Drehimpuls in φ Richtung explizit und begründen Sie, dass diese erhalten sind.

b) Man kann aus a) folgern das der Drehimpuls erhalten sein muss. Nutzen sie dies um zu zeigen, dass die Bewegung nur in einer Ebene stattfindet und wählen Sie θ, sodass diese der x-y-Ebene entspricht.

   Eliminieren Sie außerdem $\dot{\varphi}$ aus der Energie E um einen Ausdruck $E(r,\dot{r})$ zu erhalten, der nur von r und $\dot{r}$ abhängt.

   Wie lautet das effektive Potential U_{eff} in dem so erhaltenen Ausdruck $E(r,\dot{r})$?

c) Bestimmen Sie die implizite Bahngleichung $\varphi(r)$.

   Hinweis: Nutzen Sie die Gleichung für den zu φ gehörigen Drehimpuls und die Energieerhaltung.

d) Wir nehmen an, dass die Bahnkurve eines Körpers eine logarithmische Spirale

$$r(\varphi(t)) = ae^{b\varphi(t)}$$

   beschreibt. Wie lautet das zugehörige Potential $U(r)$ in dem sich der Körper bewegt?

[1 + 2 + 2 + 2 = 7 Punkte]

Übung 3 *Inverses quadratisches Zentralpotential*

Wir betrachten ein Teilchen der Masse m im Zentralpotential

$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2}.$$

a) Begründen Sie, dass der zum Azimutwinkel φ konjugierte kanonische Impuls $\ell_z = mr^2\dot{\varphi}$ erhalten ist.

b) Zeigen Sie, dass der radiale Abstand vom Kraftzentrum der Differentialgleichung

$$\dot{r}^2 = \frac{2}{m}\left(E - \frac{\kappa}{r^2}\right), \tag{1}$$

wobei $\kappa = \frac{\ell_z^2}{2m} - \alpha$ und E die Gesamtenergie ist, gehorcht. Identifizieren Sie das effektive Potential $U_{\text{eff.}}(r)$.

c) Untersuchen Sie die Radialbewegung mithilfe der folgenden Fragestellungen und Aufgaben qualitativ:

   i) Bestimmen Sie die Umkehrpunkte der Bewegung.

   ii) Skizzieren Sie das effektive Potential $U_{\text{eff.}}(r)$ für $\kappa > 0$ und $\kappa < 0$. Welche Kombinationen der Vorzeichen von E und κ sind möglich?

   iii) Skizzieren Sie für alle möglichen Kombinationen der Vorzeichen von E und κ die Bewegung in der von r und $\dot{r}$ aufgespannten Ebene und beschreiben Sie die Art der Bewegung. *Hinweis:* Benutzen Sie Gleichung 1

d) Zeigen Sie, dass die implizite Bahngleichung durch

$$\varphi(r) - \varphi(r_0) = \pm\frac{\ell_z}{\sqrt{2m}}\int_{r_0}^{r}\frac{1}{r'}\frac{1}{\sqrt{Er'^2 - \kappa}}\,\mathrm{d}r' \tag{2}$$

gegeben ist.

Das Vorzeichen hängt davon ab, ob Sie sich auf den Ursprung zu oder wegbewegen.

e) Sei nun $\kappa > 0$ und $E > 0$. Bestimmen Sie den Winkel $\Delta\varphi$, den die Trajektorie des einlaufenden Teilchens mit der Trajektorie des auslaufenden Teilchen einschließen. Gehen Sie davon aus, dass das Teilchen von $-\varphi_\infty$ aus dem Unendlichen einläuft, bei $\varphi = 0$ den minimalen Abstand r^* vom Kraftzentrum hat und in Richtung φ_∞ wieder ins Unendliche verschwindet.

Tipp: $\int \frac{n}{2x\sqrt{x^n-1}}\,\mathrm{d}x = \arctan(\sqrt{x^n - 1})$

[1 + 1 + 3 + 2 + 2 = 9 Punkte]