Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: tom.schmit@physik.uni-saarland.de)

Saarbrücken, den 01.12.23

Blatt 6 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

(Abgabe bis 07.12.23, 17:00 Uhr)

Übung 1 *Keplerproblem*

Das Keplerproblem beschreibt ein System von zwei Punktmassen mit Massen m_1,m_2 deren einzige Wechselwirkung die Gravitation ist. Damit ergibt sich die Lagrangefunktion zu:

$$\mathcal{L} = \frac{m_1}{2}\left\|\dot{\mathbf{r}}_1\right\|^2 + \frac{m_2}{2}\left\|\dot{\mathbf{r}}_2\right\|^2 + G\frac{m_1 m_2}{\left\|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\right\|}$$

a) Überführen Sie das Zweikörperproblem in ein Einkörperproblem indem Sie Schwerpunkts- und Relativkoordinaten mit reduzierter Masse μ einführen und zeigen Sie, dass sich die Lagrangefunktion aus zwei unabhängige Summanden schreiben lässt.

b) Sie wissen bereits, dass die Bewegung in einem Zentralpotential in einer Ebene stattfindet. Wir wählen Polarkoordinaten sodass, diese in der eben genannten Ebene liegen. Bestimmen Sie die implizite Bahngleichung $\varphi(r)$.

c) Folgern Sie die Bahngleichung $r(\varphi) = \frac{r_0}{1-\epsilon\cos\varphi}$ mit $r_0 = \frac{L_z^2}{\mu G m_1 m_2}, \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2EL_z^2}{\mu(Gm_1m_2)^2}}$

Hinweis: Dazu müssen Sie am Ende den Winkel um eine Konstante verschieben. Die Winkel in Aufgabe b) und c) werden demnach leicht anders gemessen.

d) Führen Sie kartesische Koordinaten ein und zeigen Sie, dass die Bahnen je nach Parameter Kreise, Ellipsen, Hyperbeln oder Parabeln sind. Diskutieren Sie außerdem welche Bahnformen in Abhängigkeit des Parameters ϵ vorliegen. Geben Sie zudem deren Charakteristika wieder (z.Bsp. bei elliptischen Bahnen die Halbachsen).

e) Zeigen Sie die Keplerschen Gesetze. Nehmen Sie dazu an, dass einer der Körper, welchen wir Sonne nennen, viel schwerer als der andere Körper, welchen wir Planet nennen, ist.

   i) Der Planet bewegt sich auf einer elliptischen Bahn, in derem einem Brennpunkt die Sonne steht.

   ii) Ein von der Sonne zum Planeten gezogener Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.

   iii) Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben (dritte Potenzen) der großen Bahnhalbachsen.

f) Es gibt im Keplerproblem neben der Energie und dem Drehimpuls eine weitere Erhaltungsgröße. Diese Erhaltungsgröße ist der sogenannte Laplace-Lenz-Runge Vektor $\mathbf{A} = \mathbf{p} \times \mathbf{L} - \mu\alpha\mathbf{e}_r$.

   i) Berechnen Sie $\mathbf{A}$ explizit. Sie werden sehen, dass $\mathbf{A}$ in der Ebene der Bewegung liegt.

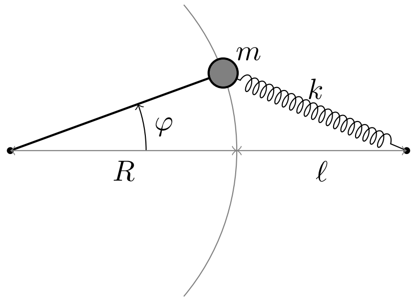
   ii) Bestimmen Sie α, sodass der Laplace-Lenz-Runge Vektor wirklich eine Erhaltungsgröße ist.

   iii) Leiten Sie mittels der Erhaltung des Laplace-Lenz-Runge Vektors die Bahngleichung her. Wählen Sie dafür den Polarwinkel, sodass $\mathbf{A}$ anti-parallel zu x-Achse zeigt.

[2 + 1 + 2 + 4 + 3 + 3 = 15 Punkte]

Übung 2 *Pendel mit Feder*

Im kräftefreien Raum ist ein Plendel der Masse m und Pendellänge R an einem festen Punkt befestigt. An der Masse befindet ich eine Hooksche Feder mit Federkonstante k, deren anderes Ende im Abstand $R + \ell$ vom Aufhängepunkt des Pendels fest gemacht ist.



a) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion dieses System als

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} R^2 \dot{\varphi}^2 - k(R^2 + R\ell)(1 - \cos\varphi)$$

gewählt werden kann.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichung für φ her.

c) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen um die Gleichgewichtslage und lösen Sie sie für die Anfangswerte $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = \Omega_0$.

[2 + 1 + 2 = 5 Punkte]