Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: `tom.schmit@physik.uni-saarland.de`)

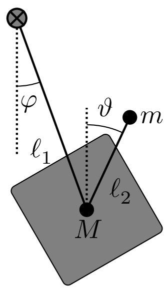
Saarbrücken, den 08.12.23

Blatt 7 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

(Abgabe bis 14.12.23, 17:00 Uhr)

Übung 1 *Das Christkind in der Gondel unter dem fliegenden Weihnachtsmann*

Die folgende Aufgabe beschäftigt sich mit hypothetischen Ereignissen auf dem Saarbrücker Christkindlmarkt. Das Christkind der Masse m fährt in der Gondel der Masse M unter dem fliegenden Weihnachtsmann mit. Das Ganze wird durch die folgende Pendelanordnung mit jeweils masselosen Stangen modelliert; alle Bewegungen finden in der Ebene statt:



a) Zeigen Sie, dass die Lagrangefunktion der Anordnung durch

$$\mathcal{L} = \frac{M+m}{2}\ell_1^2\dot{\varphi}^2 + \frac{m}{2}\ell_2^2\dot{\vartheta}^2 - m\ell_1\ell_2\dot{\varphi}\dot{\vartheta}\cos(\varphi-\vartheta) + (M+m)g\ell_1\cos\varphi - mg\ell_2\cos\vartheta$$

gegeben ist.

Hinweis: $\cos x\cos y + \sin x \sin y = \cos(x-y)$

b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für φ auf.

c) Aufgrund von vorausgegangenem Glühweinkonsum schwankt das Christkind, sodass $\vartheta(t) = -\tilde{A}\cos(\Omega t)$ gilt. Zeige Sie, dass die Bewegungsgleichung für φ für kleine Auslenkungen φ, ϑ und Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\varphi}$, $\dot{\vartheta}$ durch

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = A\cos(\Omega t)$$

gegeben ist. Bestimmen Sie die Konstanten A und ω.

d) Lösen Sie die Bewegungsgleichung für φ für die Anfangswerte $\varphi(0) = 0$ und $\dot{\varphi}(0) = 0$.

[2 + 2 + 1 + 2 = 7 Punkte]

Übung 2 *Die Bommelmütze*

Die Bommel (Masse m) der Mütze des Weihnachtsmanns hängt durch die Gewichtskraft mg am masselosen Zipfel der Mütze (Länge ℓ) herunter, sodass beide zusammen ein Fadenpendel bilden.

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion der Bommel auf.

b) Die Bommel sei weiterhin der Reibung unterworfen, die durch die Dissipationsfunktion $D(\dot{\vartheta}) = m\ell^2\gamma\dot{\vartheta}^2$, wobei $\gamma > 0$, beschrieben wird. ϑ bezeichnet dabei den Winkel, den die Bommel mit der Vertikalen einschließt.

   Zeigen Sie, dass ϑ für kleine Auslenkungen der Bewegungsgleichung der Form

$$\ddot{\vartheta} + 2\gamma\dot{\vartheta} + \omega_0^2\vartheta = 0 \tag{1}$$

   gehorcht. Bestimmen Sie ω_0.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung (1). Da sich der Weihnachtsmann nicht von der Viskosität des ihn umgebenden Mediums aufhalten lässt, diskutieren Sie alle möglichen Fälle ($\frac{\omega_0}{\gamma} < 1$, $\frac{\omega_0}{\gamma} > 1$ und $\frac{\omega_0}{\gamma} = 1$).

d) Sei nun $\frac{\omega_0}{\gamma} > 1$. Durch den energischen Schritt des Weihnachtsmanns wippt der Kopf und damit auch die Mütze hin und her. Damit führt der der Aufhängepunkt des Pendels eine Bewegung der Form $A\frac{\ell}{\Omega^2}\cos(\Omega t)$ quer zur Gewichtskraft aus.

   Stellen Sie die Lagrangefunktion auf und zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung für kleine Auslenkungen ϑ durch

$$\ddot{\vartheta} + 2\gamma\dot{\vartheta} + \omega_0^2\vartheta = A\cos(\Omega t) \tag{2}$$

   gegeben ist.

e) Bestimmen Sie die Lösung der Bewegungsgleichung (2) für Zeiten $t \gg \frac{1}{\gamma}$.

[1 + 1 + 3 + 2 + 1 = 8 Punkte]

Übung 3 *Fall mit Luftreibung*

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das im Gravitationsfeld g fällt. Dabei ist es der Luftreibung ausgesetzt, die durch die Reibungskraft $F_R(v) = -\frac{\rho}{2}c_w A\,|v|\,v$ beschrieben wird. A ist die Querschnittsfläche des Teilchens, ρ die Dichte der Luft, c_w der Widerstandsbeiwert und v die Geschwindigkeit des Teilchens ist. Diese Reibungskraft führt zu der Dissipationsfunktion $\mathcal{F}(\dot{x}) = \frac{\rho}{6}c_w A\,|\dot{x}|^3$. Beschränken Sie Ihre Betrachtungen auf die Vertikale (i.e. Richtung von g).

a) Stellen Sie die Lagrangefunktion $\mathcal{L}$ des Teilchens auf.

b) Zeigen Sie, dass die Bewegungsgleichung (für die Geschwindigkeit v) die Form[1]

$$\dot{v} = g - \alpha\,|v|\,v \tag{3}$$

   hat, wobei α eine Konstante ist. Bestimmen Sie α.

c) Lösen Sie die Bewegungsgleichung 3 für v. Die Anfangsbedingung sei $v(0) = 0$.

   Hinweis: $\int \frac{1}{1-u^2}\,\mathrm{d}u = \tanh^{-1}(u)$, wobei $\tanh^{-1}(u)$ der Areatangenshyperbolicus, die Umkehrfunktion des Tangenshyperbolicus ist.

d) Bestimmen Sie die stationäre Geschwindigkeit des Teilchens.

   Hinweis: Sie brauchen dafür c) nicht gelöst zu haben.

[1 + 1 + 2 + 1 = 5 Punkte]

[1] Die positive Richtung wurde hier entlang g gelegt.