Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: tom.schmit@physik.uni-saarland.de)

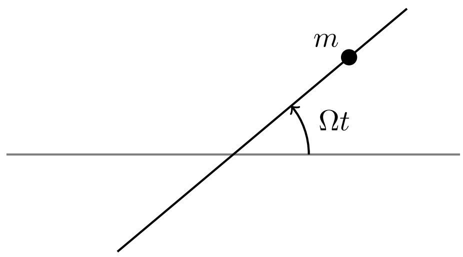
Saarbrücken, den 15.12.23

Blatt 8 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

(Abgabe bis 21.12.23, 17:00 Uhr)

Übung 1 *Perle auf rotierendem Draht*

Betrachten Sie eine Perle der Masse m, die frei auf einem geraden, unendlich langen Draht, der mit der Winkelgeschwindigkeit Ω um den Ursprung rotiert, gleiten kann.



a) Stellen Sie die Lagrangefunktion der Perle auf

b) Zeigen Sie mittels der Beltrami-Identität, dass

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 - \Omega^2 r^2\right),$$

wobei r den Abstand der Perle zum Ursprung bezeichnet, erhalten ist.

c) Stellen Sie die Bewegungsgleichung der Perle auf und lösen Sie sie für eine Perle, die bei $t = 0$ den Abstand r_0 vom Ursprung und eine verschwindende Geschwindigkeit in Richtung des Drahtes hat.

d) Ist die Summe aus kinetischer und potentieller Energie $T + V$ erhalten?

[$2 + 1 + 2 + 1 = 6$ Punkte]

Übung 2 *Beschleunigte Bezugssysteme*

In einem Inertialsystem hat die Lagrangefunktion beispielsweise eines einzelnen Teilchens im äußeren Feld die Form

$$\mathcal{L}_0 = \frac{m}{2}\left\|\mathbf{v}_0\right\|^2 - U(\mathbf{r}_0) \tag{1}$$

Betrachten wir jetzt ein Bezugssystem K', das sich relativ zum Inertialsystem K_0 mit der Translationsgeschwindigkeit $\mathbf{V}(t)$ bewegt. $\mathbf{r}_0$ bezeichnet den Ortsvektor bzgl. K_0 und $\mathbf{r}'$ den Ortsvektor bzgl. K'. Die Geschwindigkeiten $\mathbf{v}_0$ und $\mathbf{v}'$ des Teilchens bezüglich der Systeme K_0 und K' sind miteinander durch die Beziehung

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}' + \mathbf{V}(t) \tag{2}$$

verknüpft.

a) Geben Sie die Lagrangefunktion im System K' an.

b) Den Term $\frac{m}{2}\left\|\mathbf{V}(t)\right\|^2$ in a) kann man vernachlässigen. Warum?

c) Drücken Sie die Lagrangefunktion in folgender Form aus:

$$\mathcal{L}' = \frac{m}{2}\left\|\mathbf{v}'\right\|^2 - m\left\langle \mathbf{W}(t),\ \mathbf{r}'\right\rangle - U'(\mathbf{r}'),$$

wobei $\mathbf{W}(t) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{V}}{\mathrm{d}t}$ die Beschleunigung der Translationsbewegung des Bezugssystems K' darstellt und das Potential im bewegten Bezugssystem durch $U'(\mathbf{r}') = U(\mathbf{r}_0(\mathbf{r}'))$ gegeben ist.

d) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für die Lagrangefunktion aus c) auf.

[1.5 + 1.5 + 2.5 + 1.5 = 7 Punkte]

Übung 3 *Corioliskraft*

Bestimmen Sie, für kleine Winkelgeschwindigkeiten $\mathbf{\Omega}$, die Ablenkung eines auf der Nordhalbkugel freien fallenden Körpers von der Vertikalen infolge der Erdrotation. Des Weiteren soll folgendes gelten:

- Die anfängliche Höhe h sei klein gegenüber dem Erdradius R, sodass sich das Gravitationspotential durch $U = -m\mathbf{g}\cdot\mathbf{r}$ approximieren lässt ($\mathbf{g}$ ist dabei die Erdbeschleunigung).
- Da wir von kleinen Winkelgeschwindigkeiten ausgehen wollen, vernachlässigen Sie alle Terme die quadratisch in der Winkelgeschwindigkeit sind. Dazu gehört insbesondere die Zentrifugalkraft.

a) Zeigen Sie, dass für die Bewegungsgleichung im rotierenden Bezugssystem $\dot{\mathbf{v}} = 2\mathbf{v}\times\mathbf{\Omega} + \mathbf{g}$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass für die Ablenkung

$$\Delta y = \frac{1}{3}\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} g\,\Omega\cos\lambda$$

gilt (λ Breitengrad). Wird der Körper nach Osten oder Westen abgelenkt?

Hinweis: Nehmen Sie eine Anfangshöhe von h und Anfangsgeschwindigkeiten von Null an. Das rotierenden Bezugssystem sei so gewählt, dass die z-Achse senkrecht auf der Oberfläche steht. Die x-Achse zeige tangential Richtung Südpol und die y-Achse in Richtung Osten.

[3 + 4 = 7 Punkte]