Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: `tom.schmit@physik.uni-saarland.de`)

Saarbrücken, den 22.12.23

Blatt 9 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

(Abgabe bis 4.01.24, 17:00 Uhr)

Übung 1 *Berechnung von Trägheitstensoren*

Betrachten Sie einige einfache Objekte mit homogener Massendichte:

a) eine Vollkugel mit Radius R und Masse M.
   i) Geben Sie $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ in Kugelkoordinaten an.
   ii) Berechnen Sie den Trägheitstensor in geeigneten Koordinaten.

b) ein Zylinder mit Höhe H, Radius R und Masse M. Sei z bzw. x_3- Achse entlang der Zylinderachse.
   i) Geben Sie $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ in Zylinderkoordinaten an.
   ii) Aufgrund der Symmetrie sind zwei Trägheitsmomente identisch: $\Theta_{11} = \Theta_{22} = I_x = I_y$. Berechnen Sie Θ_{11}.
   iii) Berechnen Sie Θ_{33}.

[2 + 3 = 5 Punkte]

Übung 2 *Physikalisches Pendel*

Betrachten Sie einen Kegel mit homogener Massedichte ρ, Grundkreisradius R, Höhe h, und Gesamtmasse M.

a) Berechnen Sie die Dichte ρ und den Schwerpunkt des Kegels.

b) Berechnen Sie den Trägheitstensor $\boldsymbol{\Theta}$ für eine Rotation um die Spitze.

c) Der Kegel sei an seiner Spitze um eine Achse drehbar gelagert und befindet sich im homogenen Schwerefeld g der Erde. Stellen Sie die Lagrangefunktion des Systems auf.

d) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen ab und lösen Sie diese für kleine Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage.

[1.5 + 2 + 1.5 + 2* = 5 Punkte + 2 Bonus]

Übung 3 *Symmetrischer Schwerer Kreisel*

Wir betrachten einen symmetrischen Kreisel, welcher am Unterstützungspunkt fixiert ist, unter dem Einfluss des homogenen Schwerefeldes der Erde.

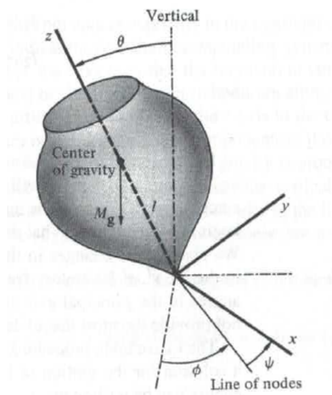

Abbildung 1: Schwerer Kreisel im homogenen Schwerefeld der Erde mit Eulerwinkeln

a) Zeigen Sie, dass die Lagrange-Funktion im Hauptachsensystems des Trägheitstensors als

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} I_1 \left(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{1}{2} I_3 \left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2 - Mgh\cos\theta$$

geschrieben werden kann. Dafür wurde der Unterstützungspunkt als Koordinatenursprung gewählt. Die Winkel ϕ, θ, ψ bezeichnen die Eulerwinkel.

Hinweis: Nutzen Sie die Darstellung der Winkelgeschwindigkeit mittels der Eulerwinkel:

$$\omega_1^2 = \left(\dot{\phi}\sin\theta\sin\psi + \dot{\theta}\cos\psi\right)^2$$
$$\omega_2^2 = \left(\dot{\phi}\sin\theta\cos\psi - \dot{\theta}\sin\psi\right)^2$$
$$\omega_3^2 = \left(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}\right)^2$$

b) Welche verallgemeinerten Impulse sind erhalten? Berechnen Sie diese. Berechnen Sie außerdem die Energie des Kreisels und eliminieren Sie (mithilfe der Impulse) die Geschwindigkeiten, deren zugehörige Impulse erhalten sind.

Zeigen Sie, dass die verschobene Energie $E' = E - \frac{1}{2}\frac{p_\psi^2}{I_3}$ als

$$E' = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V(\theta)$$

geschrieben werden kann. Bestimmen Sie die Funktion $V(\theta)$, die ein effektives Potential darstellt. Warum ist E' eine Erhaltungsgröße?

c) Zeigen Sie dass für die Zeit, die der Kreisel benötigt sich von θ_0 zu θ zu neigen

$$t(\theta) = \pm\sqrt{\frac{I_1}{2}} \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sqrt{E' - V(\theta')}}\, \mathrm{d}\theta' \tag{1}$$

gilt.

d) Gleichung 1 lässt sich formal invertieren und ermöglicht damit prinzipiell die Lösung der Bewegungsgleichungen. Sie ist jedoch nicht analytisch lösbar. Wir wollen deswegen, analog zum Kepler-Problem, die möglichen Lösungen qualitativ untersuchen.

   i) Welche Fälle in Abhängigkeit von E' und $V(\theta)$ müsste man prinzipiell untersuchen?

   ii) Untersucht man die in i) angesprochenen Fälle sieht man das eine stabilen Rotation des Kreisels möglich ist (θ ist konstant). Bestimmen Sie eine implizite Gleichung für den Winkel θ bei dem eine stabile Rotation möglich ist.

   Hinweis: Sie erhalten eine quadratische Gleichung in $p_\phi - p_\psi\cos\theta$ die Sie lösen müssen. Sie müssen dazu i) nicht bearbeitet haben.

iii) Leiten Sie aus ii) ab welche Winkelgeschwindigkeit ω_3 überschreiten muss, sodass es zu besagter stabiler Rotation kommt. Folgern Sie außerdem die beiden möglichen Rotationsgeschwindigkeiten.

[$3 + 2 + 1 + 4 = 10$ Punkte]