Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: tom.schmit@physik.uni-saarland.de)

Saarbrücken, den 5.01.24

Blatt 10 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

(Abgabe bis 11.01.24, 17:00 Uhr)

Übung 1 *Vektoranalysis*

Zeigen Sie folgende Identitäten für hinreichend glatte Vektorfelder $\mathbf{A} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ und Skalarfelder $\phi : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$.

a) $\nabla \cdot (\phi \mathbf{A}) = \langle \nabla\phi,\ \mathbf{A} \rangle + \phi \nabla \cdot \mathbf{A}$

b) $\nabla \times (\phi \mathbf{A}) = (\nabla \phi) \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A}$

c) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

d) $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$

e) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$

Hinweis: Schreiben Sie das Kreuzprodukt mithilfe des Levi-Civita Symbols und verwenden Sie den Satz von Schwarz. Außerdem wird die Identität $\sum_i \epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$ nützlich sein.

[1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6 Punkte]

Übung 2 *Punktladung und Delta-Distribution*

Das elektrische Feld einer Punktladung im Koordinatenursprung ist bekannterweise $\mathbf{E} = \frac{q}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r$. Nach der ersten Maxwellgleichung ist die Ladungsdichte gegeben durch $\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho(\mathbf{r})$.

a) Berechnen Sie die Divergenz $\nabla \cdot \mathbf{E}$ für die Punktladung und zeigen Sie damit, dass $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$ gilt. Die Ladungsdichte kann aber nicht $\rho = 0$ sein. Wo liegt das Problem?

Hinweis: Wo ist $\mathbf{E}$ *definiert und wo befindet sich die Punktladung?*

b) Dieser Widerspruch lässt sich mit dem Satz von Gauß aufklären. Bestimmen Sie das Oberflächenintegral $\int_{\partial V} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}\, \mathrm{d}A$ über eine Kugel mit Radius R und zeigen Sie auf diese Weise, dass $\int_V \rho(\mathbf{r})\, \mathrm{d}V = q$.

c) Die Ladungsdichte ρ lässt sich mithilfe der sogenannten Dirac'schen Deltafunktion ausdrücken $\rho(\mathbf{r}) = q\delta(\mathbf{r})$, die folgende Eigenschaften hat:

$$\int_V f(\mathbf{x})\delta(\mathbf{x})\, \mathrm{d}\mathbf{x} = \begin{cases} f(\mathbf{0}) & ; \mathbf{0} \in V \\ 0 & ; \text{sonst} \end{cases}$$

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Deltafunktion in einer Dimension.

i) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\, \mathrm{d}x = f(a)$

ii) $\delta(kx) = \frac{\delta(x)}{|k|}$

Hinweise zu (ii): Die Deltafunktion ergibt nur unter einem Integral Sinn.

[1 + 1 + 2 = 4 Punkte]

Übung 3 *Geladene Kugel mit Loch*

Berechnen Sie das elektrische Feld $\mathbf{E}$ außerhalb einer homogen geladenen Vollkugel (Ladung Q und Radius R), die im Abstand a vom Mittelpunkt einen ungeladenen kugelförmigen Hohlraum (Radius R', $a + R' < R$) hat.

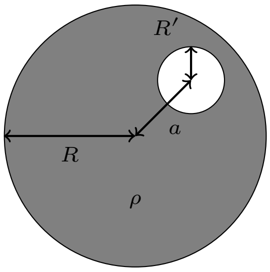

Abbildung 1: Querschnitt durch die homogen geladene Vollkugel (grau) mit kugelförmigem Loch (weiß) entlang einer Ebene, die die Mittelpunkte der Kugel und des Lochs enthält.

Hinweis: Der Satz von Gauß ist linear im $\mathbf{E}$-Feld und in der Ladungsdichte ρ.

[5 Punkte]

Übung 4 *Fourier-Transformation*

Die Fourier-Transformation $\mathcal{F}[f](k)$ von der Funktion $f(x)$ ist definiert als

$$\mathcal{F}[f](k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Man schreibt für $\mathcal{F}[f](k)$ auch $\hat{f}(k)$. Die inverse Fourier-Transformation von der Funktion $\hat{f}(k)$ ist definiert als

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}k. \tag{2}$$

Die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ entspricht der Zerlegung der Funktion $f(x)$ in ebene Wellen, die inverse Fouriertransformation $\mathcal{F}^{-1}$ entsprechend der Darstellung der Funktion f als Superposition solcher ebener Wellen.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}^{-1}$ linear sind.

b) Rechnen Sie mit den Definitionen (1) und (2) nach, dass $\mathcal{F}^{-1}[\mathcal{F}[f]] = f$.
Hinweis: Benutzen sie $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} \, \mathrm{d}k = \delta(x)$.

c) Zeigen Sie, dass
$$\mathcal{F}[\partial_x^n f(x)] = (\mathrm{i}k)^n \mathcal{F}[f(x)].$$

[1 + 1 + 3 = 5 Punkte]