Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: tom.schmit@physik.uni-saarland.de)

Saarbrücken, den 19.01.24

Blatt 12 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

(Abgabe bis 25.01.24, 17:00 Uhr)

Übung 1 *Maxwell'scher Spannungstensor*

Betrachten Sie zwei Ladungen mit gleichem Betrag $q \geq 0$, die sich auf der z-Achse bei $z_{1,2} = \pm\frac{a}{2}$ befinden.

a) Bestimmen Sie die Feldstärke in der x-y-Ebene für die Fälle, dass

(++) beide Ladungen gleich sind, d.h. $q_1 = q_2 = q$.

(+−) die Ladungen unterschiedliche Vorzeichen haben, d.h. $q_1 = -q_2 = q$.

Tipp: Nutzen Sie Zylinderkoordinaten.

b) Begründen Sie, warum die Kraft auf die Ladung q bei $z = \pm\frac{a}{2}$ geschrieben werden kann als:

$$\mathbf{F} = \oint_{\partial V} \mathsf{T}\, \mathrm{d}\mathbf{f}, \tag{1}$$

wobei T der Maxwellsche Spannungstensor, V ein geeignetes Volumen und $\mathrm{d}\mathbf{f}$ das infinitesimale vektorielle Oberflächenelement ist.

c) Bestimmen Sie die z-Komponenten des Maxwell'schen Spannungstensors T_{zk}^{++} und T_{zk}^{+-}.

d) Zeigen Sie mit Hilfe von Gleichung 1, dass die Kraft auf die Ladung bei $z = -\frac{a}{2}$ der Coulombkraft entspricht.

Hinweis: Wählen sie V als den kompletten unteren Halbraum und überlegen Sie sich, dass Gleichung 1 sich zu $\mathbf{F} = \iint_{x\text{-}y\text{-Ebene}} \mathsf{T}(x, y, 0)\ \mathbf{e}_z \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ reduziert.

[1 + 2 + 1 + 2 = 6 Punkte]

Übung 2 *Potentiale*

Finden Sie die Ladungsdichte und Stromdichte, die zu den Potentialen

$$\phi(x, y, z) = 0$$

und

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \begin{cases} k(ct - |x|)^2 \mathbf{e}_z & \text{wenn } |x| < ct \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

führen würden.

Hinweis: Da $|x|$ bei $x = 0$ nicht differenzierbar ist muss die Ableitung im schwachen Sinne[1] interpretiert werden. Im schwachen Sinne ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}|x| = \mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{sgn}(x) = 2\delta(x)$.

[2 Punkte]

[1] Die schwache Ableitung Df einer Funktion f ist die Lösung der Gleichung $\int \varphi(x) Df(x)\, \mathrm{d}x = -\int \varphi'(x) f(x)\, \mathrm{d}x$, wobei φ eine beliebige Testfunktion (hinreichend glatt und auf den Rändern verschwindend) ist.

Übung 3 *Eichinvarianz von Skalar- und Vektorpotential*

In der Vorlesung wurden das Vektorpotential $\mathbf{A}$ und das Skalarpotential ϕ, deren erzeugte Felder $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ und $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{A}$ die homogenen Maxwellgleichungen automatisch lösen, eingeführt. Die Potentiale sind nicht eindeutig, d.h. sie besitzen die Eichfreiheit

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}(\mathbf{r},t) - \nabla\Lambda(\mathbf{r},t) \quad \text{und} \quad \phi'(\mathbf{r},t) = \phi(\mathbf{r},t) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda(\mathbf{r},t), \tag{2}$$

wobei $\Lambda(\mathbf{r},t)$ eine beliebige Funktion – die Eichfunktion – ist.

a) Rechnen Sie nach, dass zu gegebenen Potentialen $\mathbf{A}$ und ϕ die umgeeichten Potentiale aus Gleichung 2 zu den selben $\mathbf{E}$- und $\mathbf{B}$-Feldern führen.

b) Die in der Vorlesung vorgestellen Lorentz- und Coulombeichungen besitzen jeweils noch eine „Resteichfreiheit“. Zeigen Sie:

   i) Die Lorentzeichung ist invariant unter der in Gleichung 2 gegebenen Eichtransformation für Eichfunktionen, die
   $$\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Lambda = 0$$
   erfüllen.

   ii) Die Coulombeichung ist invariant unter der in Gleichung 2 gegebenen Eichtransformation für Eichfunktionen, die
   $$\Delta\Lambda = 0$$
   erfüllen.

[2 + 3 = 5 Punkte]

Übung 4 *Elektrostatisches Potential*

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass die statischen Maxwell-Gleichungen für das elektrische Feld durch die Einführung eines Potentials $E = -\nabla\phi$ zu $\Delta\phi = -4\pi\rho$ entkoppelt werden können. Ferner haben Sie gelernt, dass sich die Lösung im freiem Raum zu

$$\phi(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\|} \, \mathrm{d}^3\mathbf{r}'$$

ergibt.

Parametrisieren Sie für die nachfolgende Fälle die Ladungsverteilungen und berechnen Sie das Potential:

a) Zwei Ladungen Q_1, Q_2 mit Positionen $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$.

b) Einen von $(-L, 0, 0)$ bis $(L, 0, 0)$ in gerader Linie gespannten, unendlich dünnen homogenen Draht mit Gesamtladung Q.

c) Eine unendlich dünne, geladene Kugelschale mit Radius R und Gesamtladung Q.

   Hinweis: Wählen Sie das Koordinatensystem so, dass $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ den Winkel θ' in Kugelkoordinaten einschließen.

[1 + 2 + 3 = 6 Punkte]

Übung 5 *Die Lorentzkraft*

Die Lagrangefunktion eines Teilchens mit Masse m und Ladung q im elektromagnetischen Feld mit Vektorpotential $\mathbf{A}(\mathbf{x},t)$ und Skalarpotential $\phi(\mathbf{x},t)$ lautet

$$\mathcal{L}(t,\mathbf{x},\mathbf{v}) = \frac{m}{2}\|\mathbf{v}\|^2 + \frac{q}{c}\langle \mathbf{v},\ \mathbf{A}\rangle - q\phi. \tag{3}$$

a) Zeigen Sie, dass für zwei differenzierbare Vektorfelder $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ die Identität

$$\nabla\langle \mathbf{a},\ \mathbf{b}\rangle = \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b}) + \mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a}) + \langle \mathbf{a},\ \nabla\rangle\,\mathbf{b} + \langle \mathbf{b},\ \nabla\rangle\,\mathbf{a} \tag{4}$$

gilt.

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Terme $\mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})$ und $\mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a})$ und addieren Sie die Ergebnisse. Weiterhin gilt $\sum_k \epsilon_{kij}\epsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

b) Leiten Sie die Bewegungsgleichungen aus Gleichung 3 ab und bringen Sie diese auf die Form

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{c}\left(\langle \mathbf{v},\ \nabla\rangle\,\mathbf{A} + \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}\right) = \frac{q}{c}\nabla\langle \mathbf{v},\ \mathbf{A}\rangle - q\nabla\phi.$$

Hinweis: Beachten Sie, dass der Nablaoperator nur auf die Orte und *nicht* auf die Geschwindigkeiten wirkt.

c) Verwenden Sie Gleichung 4 und die Beziehungen

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}$$
$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

um die Bewegungsgleichungen weiter umzuformen. Sie erhalten damit einen Ausdruck der Form

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}_L.$$

Identifizieren Sie die Lorentzkraft $\mathbf{F}_L$. Diese enthält nur noch Felder, keine Potentiale mehr.

[2 + 2 + 2 = 6 Punkte]