Universität des Saarlandes
Naturwissenschaftlich-Technische Fakultät (NT)

Fachrichtung Physik
Dr. Ferdi Schank
Tom Schmit (Mail: tom.schmit@physik.uni-saarland.de) Saarbrücken, den 26.01.24

Blatt 13 zur Theoretischen Physik I/II, WS2023/2024

(Abgabe bis 1.02.24, 17:00 Uhr)

Übung 1 *Elektrostatisches Potential und Multipolentwicklung*

Das elektrostatische Potential ist (in cgs Einheiten) definiert als

$$\Phi(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\vec{x}' \ \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}\,, \tag{1}$$

wobei ρ die Ladungsverteilung bezeichnet, welche generell auf ganz $\mathbb{R}^3$ definiert ist. Unter Verwendung der Taylor-Entwicklung

$$\frac{1}{|\vec{x} - \vec{x}'|} = \frac{1}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,2,3} \frac{x_i(3x_i'x_j' - \delta_{i,j}|\vec{x}'|^2)x_j}{|\vec{x}|^5} + \ldots \tag{2}$$

kann Φ systematisch genähert werden. Der Ausdruck bis einschließlich zweiter Ordnung lautet

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{q}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{|\vec{x}|^3} + \frac{1}{2} \frac{\vec{x}^T Q \vec{x}}{|\vec{x}|^5}\,. \tag{3}$$

Dies ist die sogenannte *Multipolentwicklung*. Die ersten drei Ordnungen werden durch die Gesamtladung $q = \int \mathrm{d}\vec{x}' \ \rho(\vec{x}')$, das elektrische Dipolmoment $\vec{p} = \int \mathrm{d}\vec{x}' \ \rho(\vec{x}')\vec{x}'$, und den Quadropoltensor Q, mit Einträgen $Q_{ij} = \int \mathrm{d}\vec{x}' \ \rho(\vec{x}')(3x_i'x_j' - \delta_{i,j}|\vec{x}'|^2)$, charakterisiert. Berechnen Sie für die nachfolgenden Anordnungen von Ladungen die Größen q, $\vec{p}$, und Q. Bestimmen Sie daraus das genäherte elektrostatische Potential Φ aus Gleichung 3 und berechnen Sie das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}$.

a) Drei Punktladungen, welche als gleichseitiges Dreieck um den Ursprung angeordnet sind. Dabei hat die Verbindungslinie vom Ursprung zu einer Punkladung jeweils die Länge a. Zwei der Punktladungen haben die Ladung e und die dritte Ladung ist $-e$.

b) Eine homogen geladene Vollkugel mit Ladung e und Radius R.

c) Zwei homogen geladene Platten, welche sich parallel zueinander im Abstand L befinden. Jede Platte habe die Kantenlänge a und wird als unendlich dünn angenommen. Die Ladungen der beiden Platten seien entgegengesetzt, d.h. e und $-e$.

[4 + 3 + 4 = 11 Punkte]

Übung 2 *Stromdurchflossene Leiterschleife*

Betrachten Sie eine Leiterschleife, also ein unendlich dünner kreisförmiger Draht, mit Radius R, welche in der x-y-Ebene zentriert um den Ursprung liegt. Sie wird von einem konstanten Strom I entgegen des Uhrzeigersinns durchflossen.

a) Bestimmen Sie die Stromdichte $\vec{j} \in \mathbb{R}^3$.

b) Unter Verwendung der Taylor-Entwicklung aus Gleichung 2, leiten Sie einen allgemeinen Ausdruck für das Vektorpotential $\vec{A}$ der Form

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{c}\left(\frac{\vec{c}_0}{|\vec{x}|} + \frac{\vec{c}_1}{|\vec{x}|^3}\right) \tag{4}$$

her und bestimmen Sie dabei Ausdrücke für die Koeffizienten $\vec{c}_{0,1}$. Wann ist der Ausdruck eine gute Näherung für das exakte Vektorpotential?

c) Zeigen Sie, dass der Koeffizient $\vec{c}_1$ mit Hilfe des magnetischen Moments

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2c}\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\vec{x}'\,\vec{x}' \times \vec{j}(\vec{x}') \tag{5}$$

als $\vec{c}_1/c = \vec{\mu} \times \vec{x}$ geschrieben werden kann.

Hinweis: Verwenden Sie, dass

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}\vec{x}(x_\mu j_\nu + j_\mu x_\nu) = 0\,, \quad \forall \mu, \nu = 1, 2, 3\,,$$

wobei x_ν und j_ν jeweils die Komponenten des Ortsvektors und der Stromdichte darstellen. Diese Relation gilt für quellenfreie Systeme wie das vorliegende und folgt unmittelbar aus der Kontinuitätsgleichung.

d) Berechnen Sie explizit für die Leiterschleife den Koeffizienten $\vec{c}_0$ und das magnetische Moment $\vec{\mu}$. Folgern Sie daraus den Ausdruck für das Vektorpotential mittels Aufgabenteil b).

e) Leiten Sie einen Ausdruck für die magnetische Induktion $\vec{B}$ her.

[2 + 1 + 2 + 2 + 2 = 9 Punkte]