

Quanten und Atome

Heisenberg'sche

Unbestimmtheitsrelation

Michelle Schwarz

AG Prof. Dr. Rolf Pelster | Fakultät NT



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

Aufgabensammlung zur Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation

Schwerpunkt	Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation
Klassenstufe	12-13, L-Kurs
Art	Aufgaben
Positionierung	im Anschluss an die theoretische Behandlung des Themas „Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation“
Lernvoraussetzungen	Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation, Wellen- und Teilchencharakter von Quantenobjekten
Lernziel	Die SuS lösen Aufgaben zur Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation.
Kompetenzen ¹	S2, S3, S5, S7, K4, B1, B4
Kategorien	Erarbeitung von neuem Stoff -----●-----●-----●-----●-----●----- 0 1 2 3 4 Einübung von bekanntem Stoff -----●-----●-----●-----●-----●----- 0 1 2 3 4 Öffnung der Aufgabe -----●-----●-----●-----●-----●----- 0 1 2 3 4 Grad der Mathematisierung -----●-----●-----●-----●-----●----- 0 1 2 3 4 Experimenteller Anteil -----●-----●-----●-----●-----●----- 0 1 2 3 4

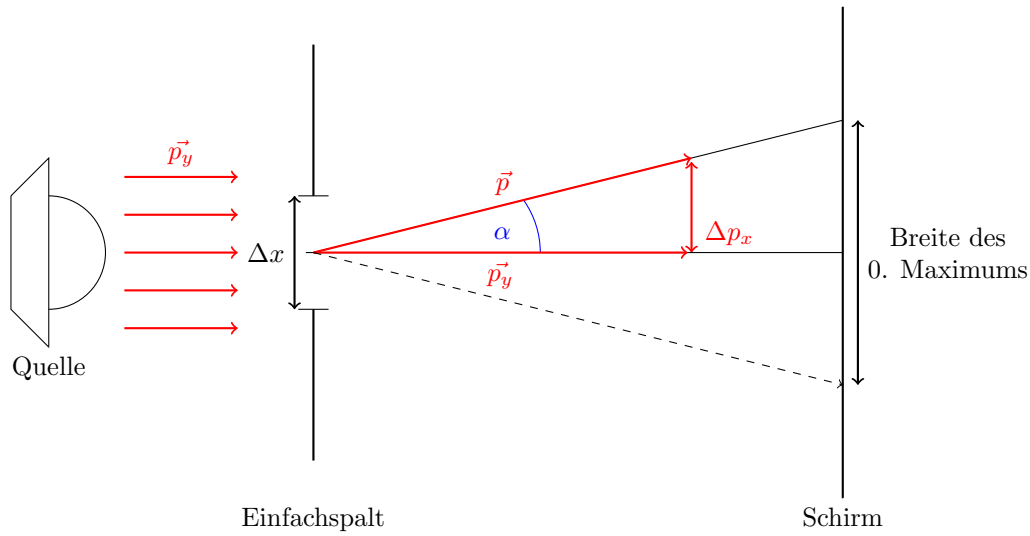
¹Kompetenzen entnommen aus: KMK & IQB. (2020). *Bildungsstandards im Fach Physik für die Allgemeine*

Aufgabensammlung zur Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation

Aufgabe 1: Elektronen am Einfachspalt

- a) Formulieren Sie die Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation und erläutern Sie den Begriff der komplementären Größen.

Elektronen werden auf einen Einfachspalt geschickt.



- b) Beschreiben Sie, wie mit diesem Versuch die Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation qualitativ bestätigt werden kann.
- c) Elektronen treffen senkrecht auf einen Einfachspalt der Breite $\Delta x = 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Die kinetische Energie der Elektronen ist im ersten Fall $E_{kin,1} = 10 \text{ eV}$ und im zweiten Fall $E_{kin,2} = 0,5 \text{ MeV}$.
- Schätzen Sie den Betrag Δp_x des Impulses der Teilchen mit Hilfe der Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation ab.²
 - Ermitteln Sie den Gesamtimpuls der Teilchen durch vektorielle Addition der Impulse Δp_x und Δp_y (Impuls vor dem Spalt). Entscheiden Sie, ob die Richtung des Gesamtimpulses deutlich von der Richtung des ursprünglichen Impulses abweicht.²
 - Bestimmen Sie für $E_{kin,1}$ und $E_{kin,2}$ die Breite des Beugungsbilds s , wenn der Schirm in einem Abstand von 2 m aufgestellt wird.

Hochschulreihe: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.06.2020. Kronach: Carl Link Verlag. ISBN: 978-3-556-09045-9.

²LEIFI-Physik, abrufbar unter <https://www.leifiphysik.de/quantenphysik/quantenobjekt-elektron/aufgabe/alphateilchen-am-spalt>, Zugriff am 15.03.2024

- iv) Berechnen Sie die Entfernung des Schirms, wenn eine Aufweitung von 1 m zu beobachten ist.

Aufgabe 2: Materiewellen und Unbestimmtheit

Bei einem Doppelspaltversuch treffen beschleunigte Elektronen mit der Materiewellenlänge $\lambda = 30 \text{ pm}$ auf einen Doppelspalt mit dem Spaltmittenabstand $g = 6,2 \mu\text{m}$.³

- a) Berechnen Sie für die Wellenlänge λ die Geschwindigkeit v der Elektronen und die erforderliche Beschleunigungsspannung, welche die zu Anfang ruhenden Elektronen durchlaufen müssen, damit sie diese Geschwindigkeit erreichen.³
- b) Der Abstand zwischen Schirm und Doppelspalt beträgt $l = 1 \text{ m}$. Berechnen Sie den Abstand b zwischen dem 0. und 1. Interferenzmaximum.³
- c) Die Impulsunbestimmtheit Δp_x senkrecht zur Flugrichtung lässt sich mit der Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$ abschätzen. Legen Sie dabei der Ortsunbestimmtheit Δx den Spaltmittenabstand d zugrunde. Berechnen Sie die Impulsunbestimmtheit Δp_x und die dazugehörige Geschwindigkeitskomponente Δv_x senkrecht zur Flugrichtung der Elektronen.³

Aufgabe 3: Wahr oder falsch?

- a) Betrachten Sie nun ein ideal präpariertes quantenmechanisches System. Nehmen Sie also an, dass keine Wechselwirkung mit der Umgebung stattfindet, also keine ständige Messung. Wir betrachten Elfmeterschießen mit einem Fußball ($m = 450 \text{ g}$). Im Falle eines verwandelten Elfmeters wird die Ortsunbestimmtheit in Querrichtung durch die Breite eines Fußballtores von 7,32 m begrenzt. Zeigen Sie, dass sich der Torwart bei ständig nichtgehaltenen Elfmetschüssen nicht quantenmechanisch mit der Unbestimmtheit der Geschwindigkeitskomponenten der Fußbälle in Querrichtung und der angeblich daraus resultierenden Unberechenbarkeit ihrer Flugbahnen herausreden kann.⁴
- b) Erläutern Sie, warum die Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation im Alltag nicht auftritt.

Erläutern Sie, inwiefern es sich bei folgenden Aussagen über die Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation um wahre oder falsche Aussagen handelt:

³Bruckmoser, S. (2016). Physik 12. Bad Brückenau: Franz-Miltenberger-Gymnasium, abrufbar unter https://www.fmg-brk.de/fachschaften/physik/uebungsmaterial/m_494, Zugriff am 15.03.2024.

⁴Vogt, M. (2020). *Quantenmechanik und Schulmathematik. Ein Leitfaden für Lehrerinnen und Lehrer*. Göttingen: Cuvillier Verlag.

- c) Die Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation stellt eine Grenze für die Genauigkeit dar, mit der wir die Werte physikalischer Größen herausfinden können. ⁴
- d) Die Größen Δx und Δp_x beschreiben die Abweichungen zum wahren Wert der Größe.

Lösungen

Aufgabe 1: Elektronen am Einfachspalt

Kompetenzen und Anforderungsbereiche

Aufgabe	Kompetenzen: Die SuS ...	Anforderungsbereich
a)	S2: erläutern Gültigkeitsbereiche von Modellen und Theorien und beschreiben deren Aussage- und Vorhersagemöglichkeiten. K4: formulieren unter Verwendung der Fachsprache chronologisch und kausal korrekt strukturiert.	I
b)	S5: erklären bekannte Messverfahren sowie die Funktion einzelner Komponenten eines Versuchsaufbaus. K4: formulieren unter Verwendung der Fachsprache chronologisch und kausal korrekt strukturiert.	I
c)	S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen. S7: wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an.	III

- a) Die Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation beschreibt die Unmöglichkeit einen Zustand zu präparieren, bei dem zueinander komplementäre Größen jeweils einen exakten Wert haben. Für die Orts-Impuls-Unbestimmtheit lautet sie

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi},$$

wobei Δx die Ortsunbestimmtheit und Δp_x die Impulsunbestimmtheit in x-Richtung beschreibt.

- b) Bei Variation der Spaltbreite beobachtet man für die Breite des Hauptmaximums folgendes: Eine kleinere Spaltbreite führt zu einem breiteren Hauptmaximum. Eine größere Spaltbreite führt zu einem schmalen Hauptmaximum.

Eine Verkleinerung der Spaltbreite führt zu einer kleineren Ortsunbestimmtheit, eine Verkleinerung der Breite des Hauptmaximums führt zu einer kleineren Impulsunbestimmtheit. Analog zur Beobachtung führt also eine Vergrößerung der Genauigkeit der Messung des Ortes (Verkleinerung der Spaltbreite) zu einer Verringerung der Genauigkeit der Messung

der zugehörigen Impulskomponente (breiteres nulltes Maximum). Diese Beobachtung entspricht der Aussage der Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation.

c) i) Für beide Fälle gilt:

$$\begin{aligned}\Delta p_x \cdot \Delta x &\geq \frac{h}{4 \cdot \pi} \\ \Leftrightarrow \Delta p_x &\geq \frac{h}{4 \cdot \pi \cdot \Delta x} \\ &= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{4 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \\ &= 5,3 \cdot 10^{-29} \text{ Ns}\end{aligned}$$

ii) In i) haben wir den Impuls in x-Richtung berechnet:

$$\Delta p_x \geq 5,3 \cdot 10^{-29} \text{ Ns}$$

Den Impulsbetrag p_y bestimmen wir aus der klassischen Energie-Impuls-Beziehung:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2$$

Mit $p_y = m_e v \Leftrightarrow v = \frac{p_y}{m_e}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}E_{kin} &= \frac{p_y^2}{2 \cdot m_e} \\ \Leftrightarrow p_y &= \sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_{kin}} \\ \Rightarrow p_{y,1} &= \sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot \text{V}} = 1,71 \cdot 10^{-24} \text{ Ns} \\ \Rightarrow p_{y,2} &= \sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 0,5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot \text{V}} = 3,82 \cdot 10^{-22} \text{ Ns}\end{aligned}$$

Für den Betrag des Gesamtimpulses p_{ges} gilt:

$$p_{ges} = \sqrt{p_y^2 + (\Delta p_x)^2}$$

Da in beiden Fällen $p_y \gg \Delta p_x$ ist, gilt:

$$p_{ges} \approx p_y$$

Da p_y um mindestens sieben Größenordnungen über Δp_x liegt, kommt es in beiden Fällen zu keiner merklichen Aufweitung des Strahls.

iii) Mit dem Strahlensatz erhält man für die Aufweitung s des Strahls:

$$\frac{\frac{s}{2}}{\Delta p_x} = \frac{2 \text{ m}}{p_y}$$

Für $E_{kin,1} = 10 \text{ eV}$ erhält man:

$$\Leftrightarrow s_1 = \frac{2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \Delta p_x}{p_y} = \frac{2 \cdot 2 \text{ m} \cdot 5,3 \cdot 10^{-29} \text{ Ns}}{1,71 \cdot 10^{-24} \text{ Ns}} = 12,39 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

Für $E_{kin,2} = 0,5 \text{ MeV}$ erhält man:

$$\Leftrightarrow s_2 = \frac{2 \cdot 2 \text{ m} \cdot \Delta p_x}{p_y} = \frac{2 \cdot 2 \text{ m} \cdot 5,3 \cdot 10^{-29} \text{ Ns}}{3,82 \cdot 10^{-22} \text{ Ns}} = 5,55 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Zur Bestimmung der Breite des Beugungsbilds müssen wir zu der Aufweitung noch die Breite des Spalts addieren. Wir erhalten damit für die Breiten:

$$s_1 = 1,24 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$s_2 = 1,55 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

iv) Wir subtrahieren die Spaltbreite von der Aufweitung:

$$s = 1 \text{ m} - \Delta x \approx 0,99 \text{ m}$$

Mit dem Strahlensatz gilt für $E_{kin,1} = 10 \text{ eV}$:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{s}{2}}{\Delta p_x} &= \frac{2 \text{ m}}{p_y} \\ \Leftrightarrow l &= \frac{s \cdot p_y}{2 \cdot \Delta p_x} = \frac{0,99 \text{ m} \cdot 1,71 \cdot 10^{-24} \text{ Ns}}{2 \cdot 5,3 \cdot 10^{-29} \text{ Ns}} = 15970,75 \text{ m} \approx 16 \text{ km} \end{aligned}$$

Für $E_{kin,2} = 0,5 \text{ MeV}$ erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{s}{2}}{\Delta p_x} &= \frac{2 \text{ m}}{p_y} \\ \Leftrightarrow l &= \frac{s \cdot p_y}{2 \cdot \Delta p_x} = \frac{0,99 \text{ m} \cdot 3,82 \cdot 10^{-22} \text{ Ns}}{2 \cdot 5,3 \cdot 10^{-29} \text{ Ns}} \approx 3568 \text{ km} \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Materiewellen und Unbestimmtheit

Kompetenzen und Anforderungsbereiche

Aufgabe	Kompetenzen: Die SuS ...	Anforderungsbereich
a)-c)	S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen. S7: wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an.	II

a) Die Geschwindigkeit der Elektronen ergibt sich zu:

$$\frac{h}{\lambda} = p = m \cdot v$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{h}{m \cdot \lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 30 \cdot 10^{-12} \text{ m}} = 2,43 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

$$U \cdot e = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$$

Um diese Geschwindigkeit zu erreichen, müssen die Elektronen die Beschleunigungsspannung

$$\Leftrightarrow U = \frac{m \cdot v^2}{2e} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} (2,43 \cdot 10^7 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 1,68 \text{ kV}$$

durchlaufen.

b) Allgemein gilt am Mehrfachspalt für die Wellenlänge λ , den Spaltabstand g , den Abstand vom k -ten zum 0. Maximum b_k sowie den Abstand von Schirm zu Doppelspalt l :

$$\lambda = \frac{g \cdot b_k}{k \cdot l}$$

Für den Abstand vom 1. zum 0. Maximum erhält man:

$$\lambda = \frac{g \cdot b}{l}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{l \cdot \lambda}{g} = \frac{1 \text{ m} \cdot 30 \cdot 10^{-12} \text{ m}}{6,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 4,84 \mu\text{m}$$

c)

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} \Leftrightarrow \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi \Delta x} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{4\pi \cdot 6,2 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \geq 8,5 \cdot 10^{-30} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

$$\Delta p_x = m \cdot \Delta v_x \Leftrightarrow \Delta v_x = \frac{\Delta p_x}{m} = \frac{8,5 \cdot 10^{-30} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 9,3 \text{ m/s}$$

Aufgabe 3: Aussagen über die Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation

Kompetenzen und Anforderungsbereiche

Aufgabe	Kompetenzen: Die SuS ...	Anforderungsbereich
a)	S7: wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an. B4: bilden sich reflektiert und rational in außerfachlichen Kontexten ein eigenes Urteil.	III
b)	S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen. K4: formulieren unter Verwendung der Fachsprache chronologisch und kausal korrekt strukturiert.	III
c) - d)	B1: erläutern aus verschiedenen Perspektiven Eigenschaften einer schlüssigen und überzeugenden Argumentation. K4: formulieren unter Verwendung der Fachsprache chronologisch und kausal korrekt strukturiert.	III

- a) Betrachtet man den Fußball als Massepunkt mit der Masse 450 g, so erhält man mit $\Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi \Delta x}$ und $\Delta p_x = m \cdot \Delta v_x$:

$$\Delta v_x \geq \frac{h}{4\pi \cdot m \cdot \Delta x} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{4\pi \cdot 0,45 \text{ kg} \cdot 7,32 \text{ m}} = 1,6 \cdot 10^{-35} \text{ m}$$

Die Unbestimmtheit der Geschwindigkeit ist so klein, dass der Torwart davon nicht beeinflusst wird.

- b) Im Alltag kommt es immer zu einer Wechselwirkung mit der Umgebung, es findet also dauerhaft eine Messung statt. Gemäß des Realitätsprinzips zerstört eine Messung allerdings den quantenmechanischen Zustand eines System. Daher kann die Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation im Alltag nicht beobachtet werden.

- c) „Wahre Werte“ physikalischer Größen, die man nur nicht genau kennt, gibt es in der Quantenmechanik im Allgemeinen nicht. Bei der Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation wird eine untere Grenze angegeben, inwieweit Ort und Impuls an einem Systems gleichzeitig genau bestimmt werden können.
- d) Die Größen Δx und Δp_x beschreiben die Standardabweichung statistischer Verteilungen von Messwerten.