

Quanten und Atome

Materiewellen

Michelle Schwarz

AG Prof. Dr. Rolf Pelster | Fakultät NT



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

Aufgabensammlung zu Materiewellen

Schwerpunkt	Materiewellen
Klassenstufe	12-13 G- und L-Kurs
Art	Aufgaben
Positionierung	im Anschluss an die theoretische Behandlung des Themas „Materiewellen“
Lernvoraussetzungen	Hypothese von de Broglie, Bragg-Bedingung (Aufgabe 2)
Lernziel	Die SuS lösen Aufgaben zu Welleneigenschaften von Elektronen.
Kompetenzen ¹	S3, S5, S7, K4, E7, E8
Kategorien	Erarbeitung von neuem Stoff -----●-----●-----●-----●-----●----- 0 1 2 3 4 Einübung von bekanntem Stoff -----●-----●-----●-----●-----●----- 0 1 2 3 4 Öffnung der Aufgabe -----●-----●-----●-----●-----●----- 0 1 2 3 4 Grad der Mathematisierung -----●-----●-----●-----●-----●----- 0 1 2 3 4 Experimenteller Anteil -----●-----●-----●-----●-----●----- 0 1 2 3 4

¹Kompetenzen entnommen aus: KMK & IQB. (2020). *Bildungsstandards im Fach Physik für die Allgemeine Hochschulreife: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.06.2020*. Kronach: Carl Link Verlag. ISBN: 978-3-556-09045-9.

Aufgabensammlung zu Materiewellen

Aufgabe 1: Die Hypothese von de Broglie

- a) Nennen Sie die Hypothese von de Broglie und beschreiben Sie ein Experiment, mit welchem die Hypothese gezeigt werden kann. Fertigen Sie auch eine Skizze dazu an.
- b) Leiten Sie mit Hilfe der de Broglie-Wellenlänge einen Zusammenhang zwischen Wellenlänge und kinetischer Energie her. Formulieren Sie dazu eine Je-desto-Aussage.

Aufgabe 2: Elektronenbeugung an verschiedenen Kristallen

In einer evakuierten Röhre trifft ein fein gebündelter Strahl von Elektronen mit der kinetischen Energie $E_{kin} = 150 \text{ keV}$ senkrecht auf eine dünne Schicht aus polykristallinem **Wolfram**. Auf einem im Abstand von 20 cm dahinter stehenden Schirm beobachtet man einen zentralen Leuchtpunkt und als Beugungsfiguren mehrere Kreise. Der Durchmesser des innersten Kreises beträgt 5,3 mm.²

- a) Für hochenergetische Elektronen liefert ein relativistischer Ansatz genauere Ergebnisse. Leiten Sie die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$\lambda_{dB} = \frac{h \cdot c}{\sqrt{(e \cdot U_B)^2 + 2 \cdot e \cdot U_B \cdot m_e \cdot c^2}}$$

her. Berechnen Sie damit relativistisch, die den Elektronen zugeordnete de Broglie-Wellenlänge.

- b) Berechnen Sie den Netzebenenabstand von Wolfram aus den gegebenen Daten und der berechneten Wellenlänge.²
- c) Berechnen Sie die Wellenlänge klassisch und bestimmen Sie die relative Abweichung zur relativistischen Rechnung. Bewerten Sie die Abweichung für solche hochenergetischen Photonen.
- d) Zeigen Sie, dass für Elektronen mit niedrigerer kinetischen Energie ($E_{kin} = 54 \text{ eV}$) klassisch gerechnet werden darf.

Elektronen der kinetischen Energie $E_{kin} = 54 \text{ eV}$ treffen nun senkrecht auf die Oberfläche eines **Nickelkristalls**. Dieser wirkt aufgrund der regelmäßigen Anordnung der Atome in der Oberfläche wie ein Reflexionsgitter mit der Gitterkonstanten $2,15 \cdot 10^{-10} \text{ m}$.

²LEIFI-Physik, abrufbar unter <https://www.leifiphysik.de/quantenphysik/quantenobjekt-elektron/aufgabe/beugung-am-wolframkristall-abitur-2001-lk-a3-2>, Zugriff am 09.05.2023.

- e) Berechnen Sie die Weite des Winkels, unter dem das Maximum erster Ordnung beobachtet wird.

Elektronen mit der Materiewellenlänge $2,5 \cdot 10^{-11}$ m treffen senkrecht auf einen **Graphitkristall**. Sie können an dieser Stelle klassisch rechnen.

- f) Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit der die Elektronen auf den Graphitkristall treffen sowie die Beschleunigungsspannung, die sie durchlaufen haben.
- g) Bei einer Messung treten auf dem Leuchtschirm unter den Streuwinkeln $\alpha_1 = 3,4^\circ$ beziehungsweise $\alpha_2 = 5,8^\circ$ Interferenzringe auf. Bestätigen Sie durch Berechnung der Netzebenenabstände, dass es sich tatsächlich um einen Graphitkristall handelt. (Hinweis: Berechnen Sie die relative Abweichung zu den Literaturwerten $d_1 = 2,11 \cdot 10^{-10}$ m und $d_2 = 1,23 \cdot 10^{-10}$ m).

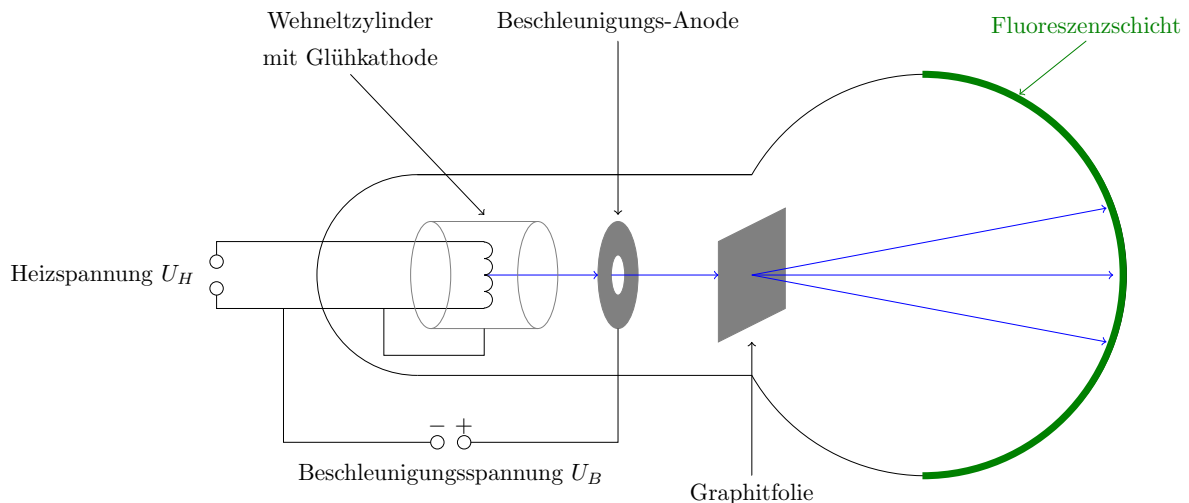
Lösungen

Aufgabe 1: Hypothese von de Broglie

Kompetenzen und Anforderungsbereiche

Aufgabe	Kompetenzen: Die SuS ...	Anforderungsbereich
a)	S5: erklären bekannte Messverfahren sowie die Funktion einzelner Komponenten eines Versuchsaufbaus. K4: formulieren unter Verwendung der Fachsprache chronologisch und kausal korrekt strukturiert.	I
b)	S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen. S7: wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an.	III

- a) Hypothese von de Broglie: Kleine bewegte Teilchen verhalten sich wie eine Welle (Materiewelle) mit der Materiewellenlänge (de Broglie-Wellenlänge) $\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$.



Eine Elektronenbeugungsröhre besteht aus einer Elektronenkanone, einer dünnen Folie aus polykristallinem Graphit und einem Fluoreszenzschirm. In dieser evakuierten Glasröhre treten Elektronen aus einer Glühkathode aus, werden durch eine anliegende Spannung beschleunigt und treffen auf die Graphitfolie. Wir beobachten ein kreisförmiges Interferenzmuster. Je größer die Beschleunigungsspannung, desto kleiner die Radien der Ringe.

- b) Es gilt: $\lambda = \frac{h}{p}$ oder $p = \frac{h}{\lambda}$. Das heißt eine kleinere Wellenlänge führt zu einem größeren Impuls und deshalb zu einer größeren kinetischen Energie gemäß $E_{kin} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}pv$. Es gilt also: Je kleiner die Wellenlänge ist, desto größer ist die kinetische Energie.

Aufgabe 2: Elektronenbeugung an verschiedenen Kristallen

Kompetenzen und Anforderungsbereiche

Aufgabe	Kompetenzen: Die SuS ...	Anforderungsbereich
a)	S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen. S7: wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an.	III
b)f)	S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen. S7: wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an.	II

c)d)g)	S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen. S7: wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an. E7: berücksichtigen Messunsicherheiten und analysieren die Konsequenzen für die Interpretation des Ergebnisses.	II
e)	S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen. S7: wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an. E8: beurteilen die Eignung physikalischer Modelle und Theorien für die Lösung von Problemen.	II

a) Es gilt die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \sqrt{E_0^2 + (c \cdot p)^2} \Leftrightarrow p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c}$$

Mit $E = E_0 + E_{kin}$ erhält man:

$$p = \frac{\sqrt{(E_0 + E_{kin})^2 - E_0^2}}{c} = \frac{\sqrt{2 \cdot E_0 \cdot E_{kin} + E_{kin}^2}}{c}$$

Einsetzen in die Formel für die de Broglie-Wellenlänge liefert:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p} = \frac{h \cdot c}{\sqrt{2 \cdot E_0 \cdot E_{kin} + E_{kin}^2}}$$

Mit $E_0 = m_e \cdot c^2$ und $E_{kin} = e \cdot U_B$ erhält man

$$\lambda_{dB} = \frac{h \cdot c}{\sqrt{(e \cdot U_B)^2 + 2 \cdot e \cdot U_B \cdot m_e \cdot c^2}}$$

Mit $E_{kin} = 150 \cdot 10^3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ V}$, $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ und $c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ erhält man für die de Broglie-Wellenlänge

$$\lambda_{dB} = 2,96 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

- b) Die kreisförmigen Maxima entstehen durch Bragg-Streuung. Die Punkte auf der Kreislinie sind um den doppelten Bragg-Winkel gebeugt. Es gilt

$$\tan \alpha = \frac{r}{2L}$$

$$\alpha = \arctan \frac{r}{2L} = \arctan \frac{5,3 \text{ mm}}{2 \cdot 200 \text{ mm}} = 0,75^\circ$$

und damit

$$\lambda = 2 \cdot d \cdot \sin \alpha$$

$$d = \frac{\lambda}{2 \cdot \sin \alpha} = \frac{2,96 \cdot 10^{-12} \text{ m}}{2 \cdot \sin 0,75^\circ} = 1,13 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

- c) Mit $E_{kin} = e \cdot U_B$ können wir die Materiewellenlänge klassisch bestimmen mit:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{\sqrt{2m_e \cdot e \cdot U_B}}$$

$$= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 150 \cdot 10^3 \text{ V}}} = 3,17 \cdot 10^{-12} \text{ m}$$

Die relative Abweichung vom relativistisch berechneten Wert beträgt damit $\approx 7,1\%$. Diese große Abweichung zeigt, dass eine klassische Rechnung bei hochenergetischen Elektronen zu einem recht großen Fehler führt.

- d) Wir berechnen die de Broglie-Wellenlänge relativistisch und klassisch mit den gegebenen Daten:

$$\lambda_{dB,relativistisch} = \frac{h \cdot c}{\sqrt{(e \cdot U_B)^2 + 2m_e \cdot e \cdot U_B \cdot c^2}}$$

$$= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{\sqrt{(1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 54 \text{ V})^2 + 2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 54 \text{ V} \cdot (3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}}$$

$$= 1,67 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

$$\lambda_{dB,klassisch} = \frac{h}{\sqrt{2m_e \cdot e \cdot U_B}}$$

$$= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 54 \text{ V}}} = 1,67 \cdot 10^{-10} \text{ m}$$

Wir erhalten bei beiden Rechnungen den gleichen Wert. Bei Elektronen niedrigerer kinetischer Energie kann damit klassisch gerechnet werden.

- e) Da die Elektronen eine geringe Energie haben, weicht das Ergebnis einer klassischen Rechnung nur wenig von dem einer relativistischen Rechnung ab. Daher können wir klassisch

rechnen. Für den Gangunterschied Δs gilt

$$\Delta s = g \cdot \sin \alpha.$$

Für das Maximum erster Ordnung gilt $\Delta s = \lambda$. Einsetzen liefert:

$$\lambda = g \cdot \sin \alpha$$

Für die Geschwindigkeit der Elektronen gilt

$$\frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = E_{kin} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{kin}}{m}}$$

Mit der Wellenlänge von de Broglie erhalten wir

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot E_{kin}}} \\ \sin \alpha &= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{2,15 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot \sqrt{2 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 54 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot \text{V}}} \\ &\approx 0,77 \\ \Rightarrow \alpha &\approx 51^\circ \end{aligned}$$

f) Für die Geschwindigkeit der Elektronen erhalten wir:

$$v = \frac{h}{m_e \cdot \lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 2,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}} = 2,9 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

Daraus ergibt sich für die durchlaufene Beschleunigungsspannung:

$$U_B = \frac{m_e \cdot v^2}{2e} = \frac{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (2,9 \cdot 10^7 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \approx 2,4 \text{ kV}$$

g) Bedingung für Maxima erster Ordnung bei Bragg-Reflexion:

$$d = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$$

Für die Abstände der Kristallebenen ergibt das

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{2,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}}{2 \cdot \sin 3,4^\circ} = 2,11 \cdot 10^{-10} \text{ m} \\ d_2 &= \frac{2,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}}{2 \cdot \sin 5,8^\circ} = 1,24 \cdot 10^{-10} \text{ m} \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit den Literaturwerten bestätigt den Graphitkristall.