



Sachanalyse und didaktische Analyse

Sachanalyse

Da Photonen Teilchencharakter zeigen, kann man ihnen auch typische Teilcheneigenschaften, wie Masse und Impuls, zuschreiben. Jedes Photon besitzt die Energie

$$E_{\text{Photon}} = h \cdot f = h \cdot \frac{c}{\lambda}.$$

Mit dem aus der Relativitätstheorie bekannten Zusammenhang zwischen der Ruhemasse m_0 und der dynamischen Masse m eines Körpers

$$m_0 = m \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

sowie der Kenntnis, dass die Geschwindigkeit eines Photons die Lichtgeschwindigkeit ($v = c$) ist, erhält man

$$m_{0,\text{Photon}} = m \cdot \sqrt{1 - \frac{c^2}{c^2}} = m \cdot 0 = 0.$$

Photonen besitzen somit keine Ruhemasse und können sich in keinem System in Ruhe befinden. Sie besitzen aber eine Energie, weshalb die dynamische Masse von 0 verschieden sein muss. Wir erhalten durch Gleichsetzen

$$E = h \cdot f = m_{\text{Photon}} \cdot c^2 \Leftrightarrow m_{\text{Photon}} = \frac{h \cdot f}{c^2} = \frac{h}{c \cdot \lambda}.$$

Diese Masse bewirkt, dass Photonen von Gravitationsfeldern abgelenkt werden und dabei Energie verlieren oder gewinnen können. Mit $p = \frac{E}{c}$ erhält man für den Betrag des Impulses

$$|\vec{p}_{\text{Photon}}| = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h}{\lambda}.$$

Für den vektoriellen Impuls erhält man

$$\vec{p} = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\vec{k}}{|\vec{k}|} = \frac{h}{2\pi} \cdot \vec{k} \quad \text{mit} \quad |\vec{k}| = \frac{2\pi f}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

mit dem Wellenvektor $\vec{k}$ [1].

Nachdem Einstein die Lichtquantenhypothese begründete, postulierte Louis de Broglie 1924, dass man diese dualistische Beschreibung durch das Wellen- und Teilchenmodell auch auf andere Körper anwenden sollte [2]. Er erhielt 1929 den Nobelpreis in Physik für seine Arbeit [1]. Aussage des Postulats von de Broglie ist, dass man Teilchen als Folge der dualistischen Eigenschaft auch eine Wellenlänge

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot E_{kin}}}$$

zuordnen kann. Für Teilchen im thermischen Gleichgewicht ist die de Broglie-Wellenlänge mit $E_{kin} = \frac{3}{2}k_B T$

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{\sqrt{3mk_B T}},$$

wobei T die Temperatur im thermischen Gleichgewicht ist. Analog erhält man für Teilchen, die eine Spannung U_B durchlaufen und damit auf eine Geschwindigkeit $v \ll c$ beschleunigt werden mit $E_{kin} = e \cdot U_B$ die de Broglie-Wellenlänge

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{\sqrt{2meU_B}}.$$

Für relativistische Teilchen ($v \approx c$) erhält man die de Broglie-Wellenlänge über die relativistische Energie-Impuls-Beziehung

$$E = \sqrt{E_0^2 + p^2 c^2} \Leftrightarrow p = \frac{\sqrt{E^2 - E_0^2}}{c}.$$

Mit $E = E_0 + E_{kin}$ gilt

$$p = \frac{\sqrt{(E_0 + E_{kin})^2 - E_0^2}}{c} = \frac{\sqrt{2 \cdot E_0 \cdot E_{kin} + E_{kin}^2}}{c}.$$

Mit der de Broglie-Wellenlänge $\lambda_{dB} = \frac{h}{p}$ folgt

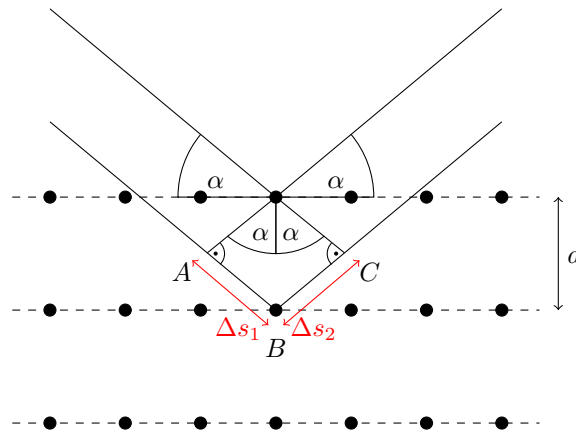
$$\lambda_{dB} = \frac{h \cdot c}{\sqrt{2 \cdot E_0 \cdot E_{kin} + E_{kin}^2}}.$$

Man erhält

$$\lambda_{dB} = \frac{h \cdot c}{\sqrt{2 \cdot e \cdot U_B \cdot m_e \cdot c^2 + (e \cdot U_B)^2}}$$

durch Einsetzen von $E_0 = m_e \cdot c^2$ und $E_{kin} = e \cdot U_B$ [3].

Clinton Joseph Davisson und Lester Halbert Germer konnten dieses von de Broglie aufgestellte



Skizze zur Herleitung der Bragg-Bedingung. Die einlaufenden Lichtstrahlen werden an den Gitteratomen gemäß dem Reflexionsgesetz reflektiert .

Postulat erstmals beweisen. Sie schickten in einer Serie von Experimenten Elektronen auf einen Einkristall aus Nickel und maßen die Intensität der gestreuten Elektronen in verschiedenen Richtungen. Sie beobachteten je nach Beschleunigungsspannung unterschiedliche Intensitätsmaxima, welche die von de Broglie postulierte Beziehung $\lambda_{dB} = \frac{h}{mv}$ bestätigten. Außerdem konnten sie zeigen, dass die Messergebnisse die optische Gitterformel, heute bekannt als Bragg-Bedingung, erfüllen [4].

Die Bragg Bedingung wurde 1912 von William Lawrence Bragg hergeleitet und gemeinsam mit seinem Vater William Henry Bragg veröffentlicht. Sie beschreibt mit

$$2d \cdot \sin \alpha = k \cdot \lambda_{dB}, \quad k \in \mathbb{N}$$

die bei der Beugung von Röntgenstrahlung an Kristallen entstehenden Muster durch die Struktur der Gitterebenen. Dabei beschreibt d den Abstand zwischen den Gitterebenen, k die Beugungsordnung und α den Winkel zwischen Röntgenstrahl und Gitterebene [5].

Diese Bragg-Bedingung lässt sich wie folgt nach [6] herleiten. Eine Graphitfolie besteht aus vielen kleinen Kristallen mit unterschiedlich orientierten Netzebenen. Die Kristalle besitzen eine regelmäßige Gitterstruktur, an welcher die Elektronen gebeugt werden. Sie wirken als teildurchlässiger Spiegel und reflektieren nur dann, wenn die Reflexionen an den Schichtebenen zu konstruktiver Interferenz führen. Abbildung 1 zeigt eine solche Gitterstruktur.

Sei d der Abstand der Kristallebenen, dann gilt für den Gangunterschied Δs zwischen Weg 1 und Weg 2

$$\begin{aligned} \Delta s &= \Delta s_1 + \Delta s_2 \\ &= |\overline{AB}| + |\overline{BC}|. \end{aligned}$$

Mit $|\overline{AB}| = |\overline{BC}|$ und $\sin \alpha = \frac{|\overline{AB}|}{d}$ folgt

$$\Delta s = 2 |\overline{AB}| = 2d \cdot \sin \alpha.$$

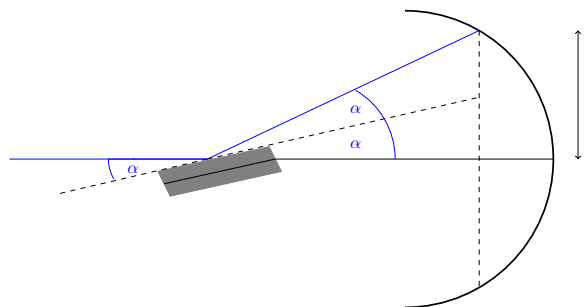
Die Bedingung für konstruktive Interferenz ist

$$\Delta s = k\lambda, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Damit folgt die Bragg-Bedingung

$$2d \cdot \sin \alpha = k \cdot \lambda_{DB}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Ringstruktur entsteht durch die zufälligen Orientierungen der Mikrokristalle der Graphitfolie im Raum. Abbildung 2 zeigt einen zufälligen Mikrokristall. Es kommt nur dann zu einer Reflexion, wenn die Bragg-Bedingung erfüllt ist. Dies bedingt eine axialsymmetrische Streuung zur ursprünglichen Richtung des Elektronenstrahls. Die ringförmigen Maxima und Minima mit einem gemeinsamen Mittelpunkt entstehen unter dem Winkel 2α durch die zylindrischen Streuwinkel. Zu Maxima kommt es, wenn die Bragg-Bedingung erfüllt ist. Da die Bragg-Bedingung abhängig von der Wellenlänge ist, ändert sich auch der Radius der Maxima und Minima mit der Wellenlänge der Elektronen [3].



Erklärung der Entstehung der Beugungsringe bei Bragg-Reflexion. Die Beugungsringe entstehen durch die zufällige Orientierung der Graphitkristalle im Raum nach [3].

Die Hypothese von de Broglie lässt sich auch experimentell (siehe Abbildung 3) bestätigen. Es sei L der Abstand von Graphit zum Schirm, R der Radius der Glaskugel und r der Radius der Ringe auf dem Schirm, wie in Abbildung 3 dargestellt. Aus der Zeichnung erhält man

$$\tan 2\alpha = \frac{r}{l_1 + l_2}.$$

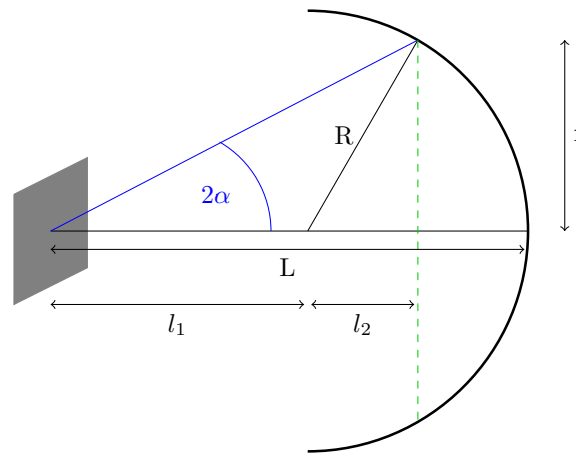
Mit $l_1 = L - R$ und $l_2 = \sqrt{R^2 - r^2}$ folgt

$$\tan 2\alpha = \frac{r}{L - R + \sqrt{R^2 - r^2}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{r}{L - R + \sqrt{R^2 - r^2}} \right).$$

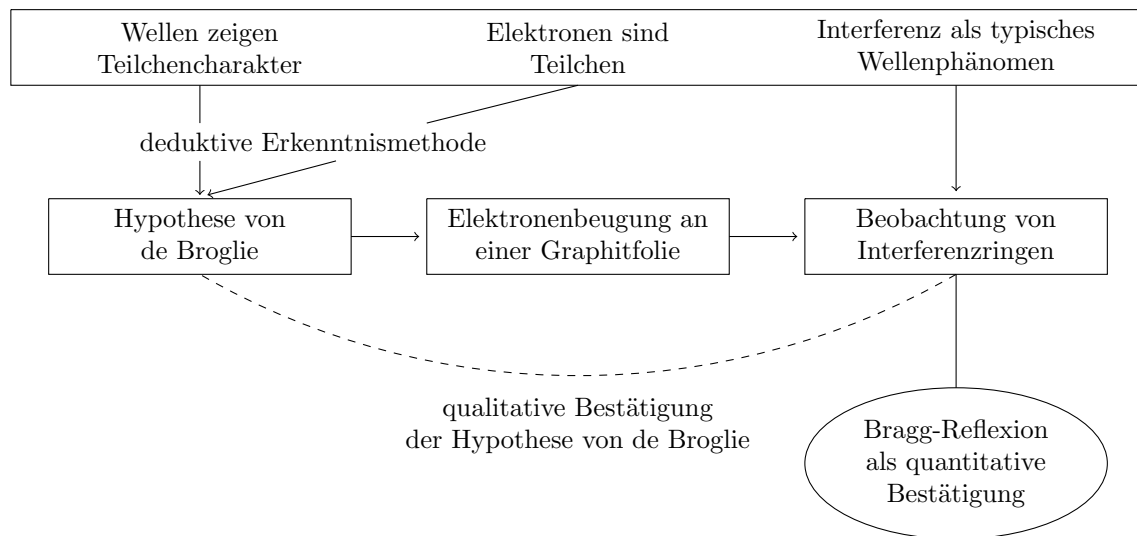
Interferenzmaxima treten bei Erfüllung der Bragg-Bedingung auf. Wir nehmen an, dass der innere Ring ein Beugungsmaximum 1. Ordnung ist. Damit folgt für die Wellenlänge

$$\lambda_{\text{Experiment}} = 2d \cdot \sin \alpha = 2d \cdot \sin \left(\frac{1}{2} \cdot \tan^{-1} \left(\frac{r}{L - R + \sqrt{R^2 - r^2}} \right) \right).$$



Experimentelle Bestätigung der Hypothese von de Broglie nach [3].

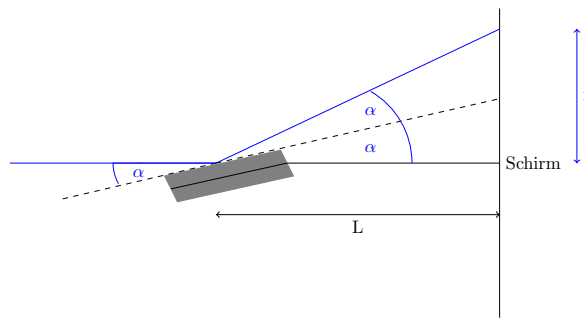
Ein Netzebenenabstand von Graphit beträgt $d = 2,13 \cdot 10^{-10}$ m. Vergleicht man diese experimentellen Werte für die Wellenlänge mit den berechneten Werten, so kann die Hypothese von de Broglie bestätigt werden. Auf dem Schirm sieht man im Experiment einen zweiten Interferenzring, welcher ebenfalls ein Maximum 1. Ordnung ist. Das liegt an den zwei unterschiedlichen Netzebenenabständen von Graphit. Graphit besitzt die Netzebenenabstände $d_1 = 2,13 \cdot 10^{-10}$ m und $d_2 = 1,23 \cdot 10^{-10}$ m [3].



Sachstrukturdiagramm zu „Materiewellen“

Es bietet sich an, auch in der Schule analog des historischen Gangs die Hypothese von de Broglie als Postulat aufzustellen und anschließend an einem Experiment zu bestätigen. Lernvoraussetzungen für dieses Kapitel sind, wie im Sachstrukturdiagramm in Abbildung 4 dargestellt, der Teilchencharakter von Wellen, Elektronen als Teilchen und Interferenz als Wellenphänomen. Aus der lichtelektrischen Gleichung und den bekannten Formeln aus der Relativitätstheorie lassen sich Masse und Impuls von Photonen herleiten. Ziel ist, dass die SuS angeben, „dass aus der Relativitätstheorie folgt, dass man Photonen Masse und Impuls zuordnen kann und dass für den Impuls gilt: $p_{Ph} = \frac{E_{Ph}}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$ “ [7, Seite 57]. Die vektorielle Darstellung des Impulses wird nicht berücksichtigt.

Aus der Erkenntnis, dass Wellen Teilchencharakter zeigen, gelangt man deduktiv zu der Folgerung, dass Teilchen Wellencharakter zeigen und damit zur Hypothese von de Broglie. Durch die Hypothese von de Broglie wird eine historisch bedeutsame Entwicklungsstufe in den Unterricht integriert. Der Lehrplan sieht vor, dass die SuS „die Hypothese von de Broglie [formulieren]: kleine bewegte Teilchen verhalten sich wie eine Welle (Materiewelle) mit der Materiewellenlänge (de Broglie-Wellenlänge): $\lambda = \frac{h}{p}$ mit $p = m \cdot v$ “ [7, Seite 57]. Hier ist auf einen vorsichtigen Umgang mit dem Begriff der „Materiewelle“ zu achten. Man sollte betonen, dass es sich um einen formalen Ansatz handelt, um den Wellencharakter von Teilchen zu beschreiben. SuS könnten sonst die Vorstellung entwickeln, dass „etwas Materielles schwingt“ [8]. Weiterhin sollen die SuS „die Formel zur Bestimmung der Materiewellenlänge eines geladenen Teilchens [herleiten], das die Beschleunigungsspannung U_B durchlaufen hat (nichtrelativistischer Ansatz): $\lambda = \frac{h}{\sqrt{2q \cdot U_B \cdot m}}$ “ [7, Seite 57]. Mit dieser Formel werden einige de Broglie-Wellenlängen für verschiedene Beschleunigungsspannungen berechnet und damit gezeigt, dass die de Broglie-Wellenlänge in der Größen-



Skizze zur Herleitung der Formel für die experimentelle Bestätigung der Bragg-Bedingung in der Schule

ordnung der Gitterkonstanten des Netzebenenabstands von Kristallen liegt. Mit der Elektronenbeugungsröhre wird die Hypothese von de Broglie qualitativ bestätigt [7]. Elektronen werden an Graphit gebeugt und es entsteht ein Interferenzmuster auf dem Fluoreszenzschirm der Elektronenbeugungsröhre. Da Interferenzerscheinungen bislang als typisches Wellenphänomen bekannt sind, ist die Hypothese damit qualitativ bestätigt. Auf eine relativistische Betrachtung wird an dieser Stelle verzichtet. Im LK kann die relativistische Betrachtung und die Abweichung zum klassischen Wert im Rahmen einer Fehlerbetrachtung zusätzlich besprochen werden. In der Aufgabensammlung findet sich eine Aufgabe zur relativistischen Rechnung.

Auf eine quantitative Begründung mit Hilfe der Bragg-Reflexion sowie die Thematisierung von zwei Interferenzringen erster Ordnung wird im saarländischen Lehrplan verzichtet. Im LK bietet es sich an, die quantitative Begründung als Vertiefung zu besprechen. Die Herleitung der Bragg-Bedingung kann in der Schule analog der Herleitung in der Sachanalyse durchgeführt werden. Bei der experimentellen Bestätigung kann von einem idealisierten, geraden Schirm ausgegangen werden, wie in Abbildung 5 dargestellt. Aus der Zeichnung kann man

$$\tan \alpha = \frac{r}{2L}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{r}{2L} \right)$$

ablesen. Mit der Bragg-Bedingung $2d \cdot \sin(\alpha) = k \cdot \lambda$ erhält man

$$\lambda_{\text{Experiment}} = \frac{2d \cdot \sin(\tan^{-1}(\frac{r}{2L}))}{k}.$$

Diese Formel ist für die SuS leichter nachzuvollziehen als die Herleitung über die Elektronenbeugungsröhre mit einem kugelförmigen Schirm. Außerdem benötigt man den Radius der Kugel nicht und kann die Berechnungen mit einer Simulation problemlos durchführen.

Dass es sich um zwei Interferenzringe erster Ordnung handelt und nicht um eine höhere Ordnung, kann an dieser Stelle ebenfalls experimentell gezeigt werden. Auf die Begründung der Ringstruktur kann in der Schule verzichtet werden. Bei aufkommenden Fragen kann die Ringstruktur mit

der räumlichen Anordnung der Graphitkristalle im Raum begründet werden.

Aus didaktischer Perspektive wird in diesem Kapitel das EIS-Modell nach Bruner angewendet. Als enaktive Darstellung kann die Beobachtung der Interferenzringe im Experiment gesehen werden. Ikonisch ist die Darstellung in einer Zeichnung und symbolisch die Bragg-Bedingung als Bedingung für das Entstehen der Interferenzringe auf dem Schirm.

Literatur

- [1] Wolfgang Demtröder. *Experimentalphysik 3: Atome, Moleküle und Festkörper*. 5. Aufl. Springer Spektrum, 2016, S. 71–96, 233–234. ISBN: 978-3-662-49093-8.
- [2] Louis de Broglie. „XXXV. A tentative theory of light quanta“. In: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 47.278 (Feb. 1924), S. 446–458. ISSN: 1941-5982. DOI: 10.1080/14786442408634378. URL: <https://doi.org/10.1080/14786442408634378> (besucht am 12.01.2024).
- [3] Stefan Richtberg. *Bewegung von Elektronen im E- und B-Feld: Elektronenbeugung*. URL: <https://virtuelle-experimente.de/elektronenbeugung/einfuehrung/versuchsaufbau.php> (besucht am 12.01.2024).
- [4] Clinton Davisson und Lester H. Germer. „The scattering of electrons by a single crystal of nickel“. In: *Nature* 119.2998 (01.04.1927), S. 558–560.
- [5] William Henry Bragg und William Lawrence Bragg. „The reflection of X-rays by crystals“. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 88.605 (01.07.1913), S. 428–438. ISSN: 2053-9150. DOI: 10.1098/rspa.1913.0040. URL: <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1913.0040> (besucht am 12.01.2024).
- [6] Markus Vogt. *Quantenmechanik und Schulmathematik. Ein Leitfaden für Lehrerinnen und Lehrer*. Göttingen: Cuvillier Verlag, 2020. ISBN: 978-3-7369-7303-9.
- [7] *Physik Lehrplan Gymnasiale Oberstufe Leistungskurs*. Ministerium für Bildung und Kultur des Saarlandes. Juli. 2023. URL: chrome-extension://efaidnbmnnnibpcajpcglclefindmkaj/https://www.saarland.de/SharedDocs/Downloads/DE/mbk/Lehrplaene/Lehrplaene_GOS_ab_2019_2020/Physik/LP_Ph_HP_LK_2023.pdf?__blob=publicationFile&v=1 (besucht am 12.01.2024).
- [8] *LEIFI-Physik: Quantenphysik*. Joachim Herz Stiftung. URL: <https://www.leifiphysik.de/quantenphysik> (besucht am 12.01.2024).