

Quanten und Atome

Wahrscheinlichkeitsverhalten von
Quantenobjekten

Michelle Schwarz

AG Prof. Dr. Rolf Pelster | Fakultät NT



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

Aufgabensammlung zum Wahrscheinlichkeitsverhalten von Quantenobjekten

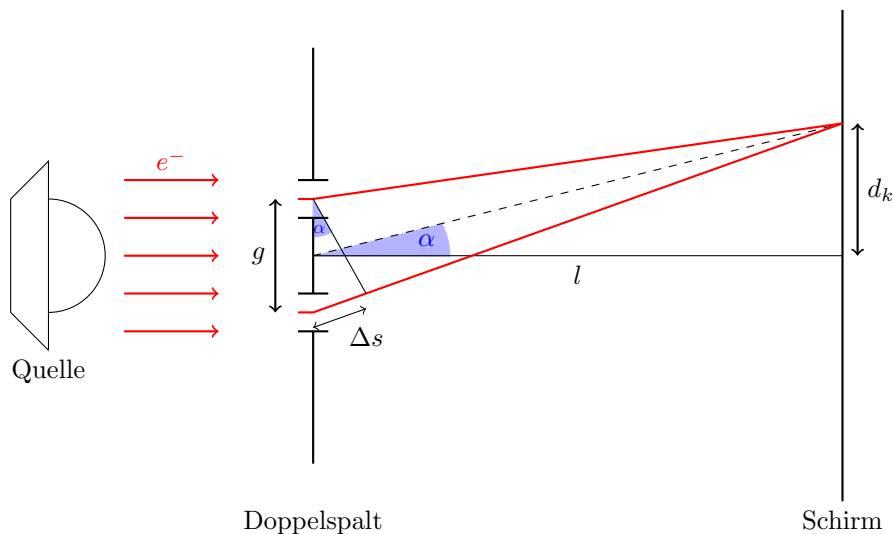
Schwerpunkt	Wahrscheinlichkeitsverhalten von Quantenobjekten
Klassenstufe	12-13, G- und L-Kurs
Art	Aufgaben
Positionierung	im Anschluss an die theoretische Behandlung des Themas „Wahrscheinlichkeitsverhalten von Quantenobjekten“
Lernvoraussetzungen	Doppelspaltversuch, Determiniertheit, Realität, Zustandsbegriff
Lernziel	Die SuS lösen Aufgaben zum Wahrscheinlichkeitsverhalten von Quantenobjekten.
Kompetenzen ¹	S1, S2, S3, S5, S7, E5, K8, B1
Kategorien	Erarbeitung von neuem Stoff 01234 Einübung von bekanntem Stoff 01234 Öffnung der Aufgabe 01234 Grad der Mathematisierung 01234 Experimenteller Anteil 01234

¹Kompetenzen entnommen aus: KMK & IQB. (2020). *Bildungsstandards im Fach Physik für die Allgemeine Hochschulreife: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.06.2020*. Kronach: Carl Link Verlag. ISBN: 978-3-556-09045-9.

Aufgabensammlung zum Wahrscheinlichkeitsverhalten von Quantenobjekten

Aufgabe 1: Die Aussagen des Versuchs

Elektronen werden in einem elektrischen Feld mit einer Beschleunigungsspannung von 1000 V beschleunigt und treffen senkrecht auf einen Doppelspalt mit Spaltabstand $g = 1 \mu\text{m}$. Auf einem 50 cm entfernten Schirm werden die auftreffenden Elektronen nachgewiesen.



- Die Elektronen treten einzeln durch den Doppelspalt. Beschreiben Sie das auf dem Schirm entstehende Bild nach kurzer Zeit (wenige durchgelaufene Elektronen) und nach langer Zeit (viele durchgelaufene Elektronen).
- Vergleichen Sie die Beobachtungen aus a) mit dem Verhalten von Licht und klassischen Teilchen am Doppelspalt.
- Bis vor Kurzem kannten Sie das Elektron nur als Teilchen. Nun haben Sie schon einige Situationen gesehen, in denen das Elektron Welleneigenschaften zeigt. Erläutern Sie die Aussage anhand des Doppelspaltexperiments: „Das Elektron kann sowohl Wellencharakter als auch Teilchencharakter zeigen.“
- Beschreiben Sie einen Versuch, mit dem man nachweisen kann, dass das Bild auf dem Schirm tatsächlich von Elektronen erzeugt wird und nicht von Licht.²
- Erläutern Sie anhand der Interferenzfähigkeit und stochastischen Verteilung, dass Elektronen Quantenobjekte sind.

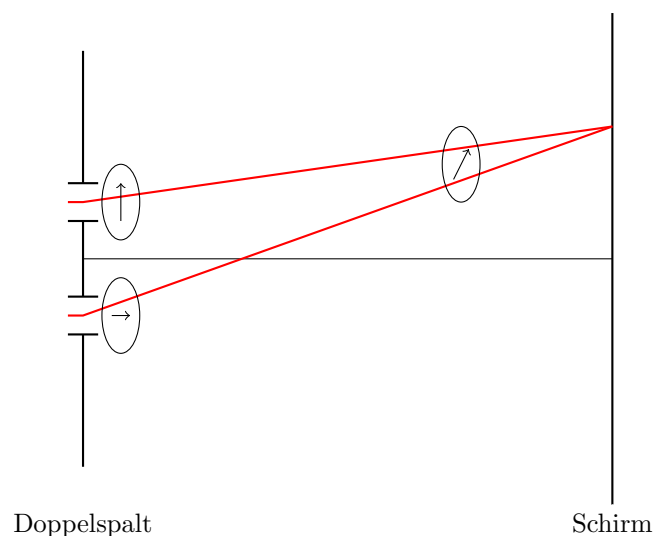
²Bruckmoser, S. (2016). Physik 12. Bad Brückenau: Franz-Miltenberger-Gymnasium, abrufbar unter https://www.fmg-brk.de/fachschaften/physik/uebungsmaterial/m_494, Zugriff am 29.02.2024.

- f) Erläutern Sie die Bedeutung der Zustandsfunktion $\Psi(x, t)$ sowie der Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x, t)|^2$ und stellen Sie Unterschiede dar.
- g) Elektronen und Photonen zeigen am Doppelspalt das gleiche Verhalten. Geben Sie Unterschiede und Gemeinsamkeiten von Elektronen und Photonen an.

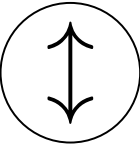
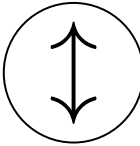
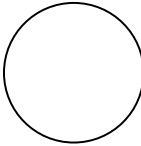
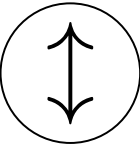
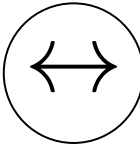
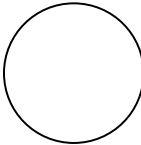
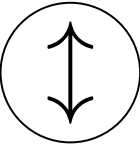
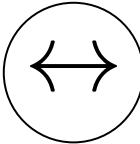
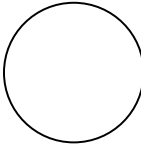
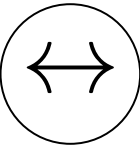
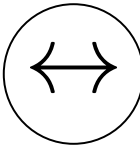
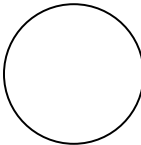
Aufgabe 2: Das Interferenzmuster

- a) Zeigen Sie, dass für den Abstand zweier Maxima am Doppelspalt allgemein $d_k = \frac{k \cdot \lambda \cdot l}{g}$ gilt, wobei l den Abstand zum Schirm und g den Spaltmittenabstand beschreibt.²
- b) Die Elektronen werden mit 500 V auf den Doppelspalt beschleunigt.
- Berechnen Sie die de Broglie-Wellenlänge der Elektronen.
 - Berechnen Sie den zu erwartenden Abstand der 1. Interferenzmaxima auf dem Schirm.
- c) Berechnen Sie für die Materiewellenlänge $5,48 \cdot 10^{-11} \text{ m}$ den Abstand vom 0. zum 2. Maximum für die Entfernungen des Schirms vom Doppelspalt $l_1 = 50 \text{ cm}$, $l_2 = 100 \text{ cm}$ und $l_3 = 150 \text{ cm}$. Finden Sie einen allgemeinen Zusammenhang zwischen Abstand der Maxima von 0. zu 2. Ordnung und dem Abstand vom Schirm zum Doppelspalt.
- d) Im Experiment wird ein Abstand der Maxima 1. Ordnung von $70 \mu\text{m}$ gemessen. Berechnen Sie die Geschwindigkeit, mit welcher die Elektronen durch den Spalt gehen und die Beschleunigungsspannung, welche sie dazu durchlaufen müssen.

Aufgabe 3: Der Quantenradierer



- a) Beschreiben Sie die Funktionsweise eines Quantenradierers und ergänzen Sie die Stellung des dritten Polarisationsfilters.³

	Polfilter Spalt 1	Polfilter Spalt 2	Polfilter vor Schirm
scharfes Interferenzmuster			
scharfes Interferenzmuster			
kein Interferenzmuster			
scharfes Interferenzmuster			

- b) Erläutern Sie das Quantenmechanische Fundamentalprinzip am Beispiel des Doppelspaltversuchs.

- c) Nehmen Sie Stellung zu folgenden Aussagen:

- 1) Mit Detektoren können wir messen durch welchen Spalt das Photon gegangen ist.
- 2) Ein Photon befindet sich bis zur Messung in einem Superpositionszustand. Die Messung zerstört diesen.
- 3) Der dritte Polarisationsfilter „hebt die Welcher-Weg-Information auf“.
- 4) Der dritte Polarisationsfilter entscheidet verzögert über den Ausgang des Experiments.
- 5) Eine Messung realisiert eine Eigenschaft.
- 6) Die Eigenschaften sind vor der Messung schon real, nur nicht bestimmt.

³Becker, P. et al. (2009). *Physik Oberstufe Gesamtband: Handreichungen für den Unterricht* (2. Aufl.). Berlin: Cornelson Verlag.

- 7) Die Eigenschaft existiert vor der Messung nicht.
- 8) Quantenobjekte interferieren mit sich selbst.

Aufgabe 4: Interferenz im Alltag?

Fullerenmoleküle zeigen, trotz ihrer deutlich größeren Masse, auch Interferenzerscheinungen. Stellen Sie sich nun eine Herde Elefanten ($m_{Elefant} = 6\text{ t}$) vor, welche mit $v = 11\text{ m/s}$ durch eine Baumreihe ($g = 4\text{ m}$) trampelt. Gehen Sie von einem riesigen Schirm hinter der Baumreihe vor, auf dem man das Interferenzmuster beobachten kann.⁴

- a) Erläutern Sie, warum wir bei der Elefantenherde keine Interferenzerscheinung beobachten können.
- b) Stellen Sie sich nun vor, die Elefantenherde befindet sich in einem abgeschlossenen physikalischen System. Berechnen Sie den Ablenkwinkel erster Ordnung. Begründen Sie, ob es nun möglich ist, ein Interferenzmuster zu sehen.

⁴Vogt, M. (2020). *Quantenmechanik und Schulmathematik. Ein Leitfaden für Lehrerinnen und Lehrer*. Göttingen: Cuvillier Verlag.

Lösungen

Aufgabe 1: Die Aussagen des Versuchs

Kompetenzen und Anforderungsbereiche

Aufgabe	Kompetenzen: Die SuS ...	Anforderungsbereich
a) b)	S5: erklären bekannte Messverfahren sowie die Funktion einzelner Komponenten eines Versuchsaufbaus.	I
c)	K8: nutzen ihr Wissen über aus physikalischer Sicht gültige Argumentationsketten zur Beurteilung vorgegebener und zur Entwicklung eigener fachlicher Argumentationen.	III
d)	E5: planen geeignete Experimente und Auswertungen zur Untersuchung einer physikalischen Fragestellung.	III
e)	S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen.	II
f)	K8: nutzen ihr Wissen über aus physikalischer Sicht gültige Argumentationsketten zur Beurteilung vorgegebener und zur Entwicklung eigener fachlicher Argumentationen.	I
g)	S5: erklären bekannte Messverfahren sowie die Funktion einzelner Komponenten eines Versuchsaufbaus.	II

- a) Auf dem Schirm erscheinen zunächst scheinbar zufällig verteilte einzelne Punkte. Nach und nach entsteht ein Interferenzmuster aus hellen und dunklen Streifen.
- b) Bei der Bestrahlung des Doppelspalts mit Licht erhält man das gleiche Interferenzbild wie in Aufgabenteil a) nach langer Belichtungszeit. Bei klassischen Teilchen beobachtet man hinter jedem Spalt ein Bild analog eines Einfachspalts.
- c) Das einzelne Auftreffen der Elektronen auf dem Schirm lässt sich mit der Teilchenvorstellung erklären und nicht mit der Wellenvorstellung, während sich die Entstehung des Interferenzmusters nur mit der Wellenvorstellung erklären lässt. Keine der Vorstellungen beschreibt das Verhalten des Elektrons damit ausreichend. Das Elektron ist ein Quantenobjekt, welches sowohl Wellen- als auch Teilcheneigenschaften aufweist.
- d) Lenkt ein Magnet das Beugungsbild ab, so wird es von Elektronen erzeugt.

- e) Interferenzfähigkeit: Elektronen kann man gemäß der Hypothese von de Broglie eine Wellenlänge zuordnen und sie zeigen Interferenz am Doppelspalt.

Stochastische Verteilung: Den Antreffer eines einzelnen Elektrons auf dem Schirm können wir nicht vorhersagen, es sind lediglich Wahrscheinlichkeitsaussagen möglich. Das entstehende Interferenzmuster lässt sich reproduzieren und dementsprechend auch vorhersagen.

Elektronen zeigen Wellen- und Teilchencharakter und sind damit Quantenobjekte.

- f) Die Zustandsfunktion ist eine mathematische Größe, physikalisch ist sie nicht messbar. Das Quadrat der Funktion ist die Wahrscheinlichkeitsdichte. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Quantenobjekt in einem Volumenelement anzutreffen ist.
- g) Elektronen und Photonen sind Quantenobjekte, denen eine Wellenlänge zugeschrieben werden kann und die Interferenz zeigen. Die Wellenlänge von Elektronen ist in Interferenzexperimenten kleiner als die von sichtbarem Licht. Photonen können in großer Zahl als elektromagnetische Welle beschrieben werden, Elektronen als Materiewelle. Photonen haben im Gegensatz zu Elektronen keine Ruhemasse und keine Ladung.

Aufgabe 2: Das Interferenzmuster

Kompetenzen und Anforderungsbereiche

Aufgabe	Kompetenzen: Die SuS ...	Anforderungsbereich
a)	S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen. S7: wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an.	III
b)-d)	S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen. S7: wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an.	II

- a) Die Bedingung für das Auftreten von Maxima am Doppelspalt ist: $\Delta s = k \cdot \lambda$. Aus der Skizze lesen wir die geometrischen Beziehungen:

$$\sin \alpha = \frac{\Delta s}{g}$$

$$\tan \alpha = \frac{d_k}{l}$$

Da $d_k \ll l$, gilt $\tan \alpha \approx \sin \alpha$ und damit:

$$\begin{aligned}\Delta s &= k \cdot \lambda = \sin \alpha \cdot g \\ \Leftrightarrow \sin \alpha &= \frac{k \cdot \lambda}{g} = \frac{d_k}{l} = \tan \alpha \\ \Leftrightarrow d_k &= \frac{k \cdot \lambda \cdot l}{g}\end{aligned}$$

b) i)

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{h}{\sqrt{2 \cdot m_e \cdot e \cdot U_B}} \\ &= \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{\sqrt{2 \cdot 1,9 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As} \cdot 500 \text{ V}}} \\ &= 5,48 \cdot 10^{-11} \text{ m}.\end{aligned}$$

ii) Wir erhalten man mit a) und i):

$$d_1 = \frac{1 \cdot \lambda \cdot l}{g} = \frac{5,48 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot 1 \text{ m}}{1 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 2,74 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 27,4 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 27,4 \mu\text{m}$$

Der Abstand der 1. Maxima beträgt also $2 \cdot d_1 = 54,8 \mu\text{m}$.

c) Für das Maximum zweiter Ordnung gilt

$$d_2 = \frac{2 \cdot \lambda \cdot l}{g}$$

Somit ergibt sich für $l_1 = 0,5 \text{ m}$:

$$d_2 = 0,5 \text{ m} \cdot \frac{2 \cdot 5,48 \cdot 10^{-11} \text{ m}}{1 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 5,48 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Für $l_2 = 1 \text{ m}$:

$$d_2 = 1 \text{ m} \cdot \frac{2 \cdot 5,48 \cdot 10^{-11} \text{ m}}{1 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 10,96 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Für $l_2 = 1,5 \text{ m}$:

$$d_2 = 1,5 \text{ m} \cdot \frac{2 \cdot 5,48 \cdot 10^{-11} \text{ m}}{1 \cdot 10^{-6} \text{ m}} = 16,44 \cdot 10^{-5} \text{ m}$$

Es gilt: $l_2 = 2 \cdot l_1$ und $l_3 = 3 \cdot l_1$. Je größer also der Abstand zwischen Doppelspalt und Schirm ist, desto größer ist auch der Abstand zwischen dem 0. und 2. Maximum.

d) Der Abstand vom 0. zum 1. Maximum beträgt also $d_1 = 35 \mu\text{m}$. Mit $d_1 = \frac{\lambda \cdot l}{g}$ erhalten wir

für die Materiewellenlänge:

$$\lambda = \frac{d_1 \cdot g}{l} = \frac{35 \cdot 10^{-6} \text{ m} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ m}}{0,5 \text{ m}} = 7 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Mit $m \cdot v = p = \frac{h}{\lambda}$ erhalten wir für die Geschwindigkeit:

$$v = \frac{h}{m_e \cdot \lambda} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 7 \cdot 10^{-11} \text{ m}} = 10,39 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Für die Berechnung der Beschleunigungsspannung gibt es zwei Möglichkeiten:

1) Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{h}{\sqrt{2m_e \cdot e \cdot U_B}} \\ \Leftrightarrow \lambda^2 &= \frac{h^2}{2m_e \cdot e \cdot U_B} \\ \Leftrightarrow U_B &= \frac{h^2}{\lambda^2 \cdot 2m_e \cdot e} = v \cdot \frac{h}{2\lambda \cdot e} \\ &= 10,39 \cdot 10^6 \text{ m/s} \cdot \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2}{2 \cdot 7 \cdot 10^{-11} \text{ m} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 307,38 \text{ V} \end{aligned}$$

2) Es gilt

$$\begin{aligned} E_{kin} &= \frac{1}{2}mv^2 = e \cdot U_B \\ U_B &= \frac{m_e v^2}{2e} = \frac{9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (10,39 \cdot 10^6 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} = 306,89 \text{ V} \end{aligned}$$

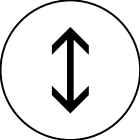
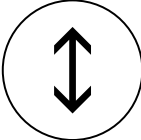
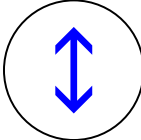
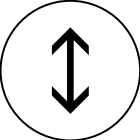
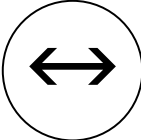
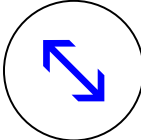
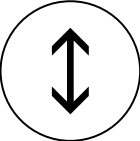
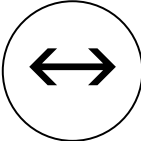
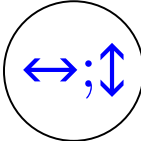
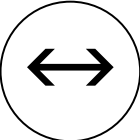
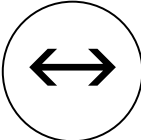
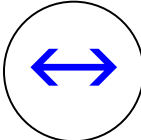
Aufgabe 3: Der Quantenradierer

Kompetenzen und Anforderungsbereiche

Aufgabe	Kompetenzen: Die SuS ...	Anforderungsbereich
a)	S5: erklären bekannte Messverfahren sowie die Funktion einzelner Komponenten eines Versuchsaufbaus. S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen.	II
b)	S2: erläutern Gültigkeitsbereiche von Modellen und Theorien und beschreiben deren Aussage- und Vorhersagemöglichkeiten.	I

c)	S2: erläutern Gültigkeitsbereiche von Modellen und Theorien und beschreiben deren Aussage- und Vorhersagemöglichkeiten. K8: nutzen ihr Wissen über aus physikalischer Sicht gültige Argumentationsketten zur Beurteilung vorgegebener und zur Entwicklung eigener innerfachlicher Argumentationen.	III
----	--	-----

- a) Bringt man hinter jedem Spalt einen Polarisationsfilter an, so beobachtet man: Sind die Polarisationsfilter parallel orientiert, so entsteht auf dem Schirm ein Interferenzmuster. Sind sie senkrecht orientiert, so verschwindet das Interferenzmuster. Bringen wir vor dem Schirm einen dritten Polarisationsfilter in den Versuchsaufbau und drehen diesen auf 45° , so erscheint das Interferenzmuster wieder.

	Polfilter Spalt 1	Polfilter Spalt 2	Polfilter vor Schirm
scharfes Interferenzmuster			
scharfes Interferenzmuster			
kein Interferenzmuster			
scharfes Interferenzmuster			

- b) Das quantenmechanische Fundamentalprinzip beschreibt die Komplementarität von Welcher-Weg-Information und Interferenzmuster. Beim Doppelspaltexperiment verschwindet das Interferenzmuster, sobald wir bestimmen können durch welchen Spalt das Elektron geht

(Detektor oder Polarisationsfilter). Diese Messung des Ortes führt zu einer Welcher-Weg-Information. Nach dem Quantenmechanischen Fundamentalprinzip muss das Interferenzmuster also verschwinden. Dies entspricht der Beobachtung im Experiment.

- c) 1) Falsch. Am Ort des Doppelspalts befindet sich das Photon immer in einem Superpositionszustand. Die Detektoren führen zum Kollaps der Wellenfunktion und zur Zerstörung des Superpositionszustands. Sie können aber nicht rückwirkend entscheiden, durch welchen Spalt das Photon gegangen ist, da es sich immer in einem Superpositionszustand befindet.
- 2) Richtig. Der Zustand eines Photons ist bis zur Messung unbestimmt. Das Photon befindet sich in einem Superpositionszustand. Eine Messung zerstört diesen Zustand und realisiert eine Eigenschaft.
- 3) Richtig. Durch die Superposition mit dem dritten Polarisationsfilter wird die Welcher-Weg-Information aufgehoben.
- 4) Richtig. Der dritte Polarisationsfilter kann auch erst eingebaut werden, wenn das Photon den Detektor bereits passiert hat. Damit kann der Ausgang verzögert beeinflusst werden.
- 5) Richtig. Eine Messung zerstört den Superpositionszustand und realisiert eine Eigenschaft.
- 6) Falsch. Die Eigenschaften liegen vor der Messung nicht vor. Erst die Messung realisiert eine Eigenschaft.
- 7) Richtig. Der Zustand eines Photons ist bis zur Messung unbestimmt.
- 8) Richtig. Es befindet sich immer nur ein Photon in der Apparatur. Es kommt zu einer Interferenz der Möglichkeiten.

Aufgabe 4: Interferenz im Alltag?

Kompetenzen und Anforderungsbereiche

Aufgabe	Kompetenzen: Die SuS ...	Anforderungsbereich
a)	S1: erklären Phänomene unter Nutzung bekannter physikalischer Modelle und Theorien.	II
b)	S3: wählen aus bekannten Modellen bzw. Theorien geeignete aus, um sie zur Lösung physikalischer Probleme zu nutzen. S7: wenden bekannte mathematische Verfahren auf physikalische Sachverhalte an.	III

- a) Im Alltag können wir allgemein keine Interferenzerscheinung beobachten, da dauerhaft eine Wechselwirkung mit der Umgebung stattfindet. Es wird also dauerhaft gemessen und damit liegt eine Welcher-Weg-Information vor. Nach dem Quantenmechanischen Fundamentalprinzip sind Welcher-Weg-Information und Interferenzmuster komplementär zueinander, weshalb bei vorhandener Welcher-Weg-Information kein Interferenzmuster auftritt.
- b) De Broglie-Wellenlänge der Elefanten:

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{mv} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}}{6000 \text{ kg} \cdot 11 \text{ m/s}} = 2,2 \cdot 10^{-38} \text{ m}$$

Bedingung für Beugungsmaxima:

$$\sin \alpha_n = \frac{n \lambda_{DB}}{g}$$

Für den Ablenkungswinkel der Maxima erster Ordnung erhält man:

$$\alpha_1 = \arcsin \left(\frac{10^{-34} \text{ m}}{4 \text{ m}} \right) = 1,44 \cdot 10^{-37} \circ$$

Der Ablenkungswinkel ist so klein, dass wir mit dem bloßen Auge keine Maxima und Minima erkennen können.