

Quanten und Atome

Wahrscheinlichkeitsverhalten von
Quantenobjekten

Michelle Schwarz

AG Prof. Dr. Rolf Pelster | Fakultät NT



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

Determiniertheit

Schwerpunkt	Wahrscheinlichkeitsverhalten von Quantenobjekten
Klassenstufe	12-13, G-Kurs und L-Kurs
Art	Informationsblatt
Positionierung	nach der Behandlung des Doppelspaltversuchs
Lernvoraussetzungen	Doppelspaltversuch mit einzelnen Quantenobjekten
Lernziel	Die SuS erläutern den Begriff der Determiniertheit in der Quantenphysik und beschreiben Quantenobjekte durch Wellenfunktionen.
Kompetenzen ¹	S2
Kategorien	Erarbeitung von neuem Stoff 01234 Einübung von bekanntem Stoff 01234 Öffnung der Aufgabe 01234 Grad der Mathematisierung 01234 Experimenteller Anteil 01234

¹Kompetenzen entnommen aus: KMK & IQB. (2020). *Bildungsstandards im Fach Physik für die Allgemeine Hochschulreife: Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.06.2020*. Kronach: Carl Link Verlag. ISBN: 978-3-556-09045-9.

Determiniertheit in der Quantenphysik

Klassische Definition des Determinismus

Kennen wir die Anfangsbedingungen sowie die äußeren Bedingungen eines Experiments, so können wir das Ergebnis vorhersagen. Die klassische Physik ist also deterministisch.

Beispiel: Kennen wir Ort und Impuls eines Objekts sowie alle einwirkenden Kräfte, so können wir das Verhalten des Objekts beliebig in die Zukunft und die Vergangenheit berechnen.

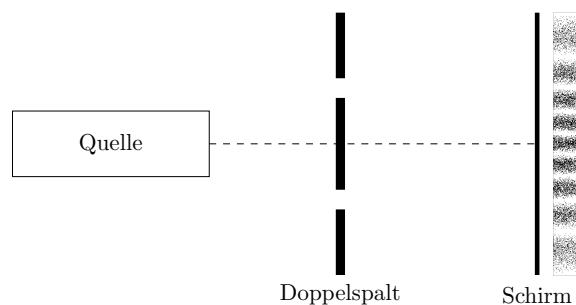
Aufgabe 1

Passiert ein einzelnes Photon einen Doppelspalt, so können wir den genauen Antrefftort des Photons auf dem Schirm nicht vorhersagen. Erläutern Sie den Widerspruch zur klassischen Definition des Determinismus.

Trotz des bekannten Spaltabstands und der bekannten Spaltbreite, können wir den Antrefftort des Photons auf dem Schirm nicht vorhersagen. Gemäß der klassischen Definition des Determinismus müssten wir bei bekannten Anfangsbedingungen den Antrefftort des Photons auf dem Schirm bestimmen können. Wir erhalten damit einen Widerspruch zur klassischen Definition.

Für ein einzelnes Photon ist die Quantenphysik nicht deterministisch.

Passieren viele Photonen den Doppelspalt, so sieht man, dass in der Mitte des Schirms deutlich mehr Photonen ankommen als am Rand. Es entsteht ein Interferenzmuster. Die Wahrscheinlichkeit ein Photon in der Mitte des Schirms anzutreffen ist deutlich größer als am Rand.



Max Born schlug im Jahr 1926 eine statistische Deutung der Quantenmechanik vor, welche heute unter dem Namen „Born'sche Wahrscheinlichkeitsinterpretation“ bekannt ist.

Born'sche Wahrscheinlichkeitsinterpretation

Quantenobjekte zeigen Wellencharakter, weshalb sie mit der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ in Abhängigkeit des Ortes x und der Zeit t beschrieben werden können. Das Betragsquadrat $|\Psi(x, t)|^2$ beschreibt die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Quantenobjekt am Ort x auf dem Schirm anzutreffen. Sie ist proportional zur Wahrscheinlichkeit das Quantenobjekt im Intervall $x + dx$ anzutreffen:

$$P(x, t)dx \propto |\Psi(x, t)|^2 dx$$

Die Wahrscheinlichkeit P ein Photon auf dem Intervall $[a, b]$ anzutreffen ist

$$P([a, b]) = \int_a^b |\Psi(x, t)|^2 dx.$$

Die Wahrscheinlichkeit das Quantenobjekt im gesamten Raum (also irgendwo) zu finden, muss 1 sein. Daraus folgt die Normierungsbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, t)|^2 dx = 1.$$

Daraus folgt

$$P(x, t)dx = |\Psi(x, t)|^2 dx$$

Deutung des Doppelspaltversuchs

Wir erhalten für die Wahrscheinlichkeit ein Photon zwischen $x = a$ und $x = b$ auf dem Schirm anzutreffen

$$P([a, b]) = \int_a^b |\Psi(x)|^2 dx.$$

Die Variable x beschreibt die Lage auf dem Schirm mit dem Maximum 0. Ordnung bei $x = 0$. Es sei nun Ψ_1 die Wellenfunktion, wenn nur der linke Spalt geöffnet ist und Ψ_2 die Wellenfunktion, wenn nur der rechte Spalt geöffnet ist. Für den Fall, dass beide Spalten geöffnet sind, erhalten wir

$$\Psi_{res} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1 + \Psi_2).$$

Wir erhalten für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$|\Psi|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_1 + \Psi_2) \right|^2 = \frac{1}{2} (|\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2) + \Psi_1 \Psi_2.$$

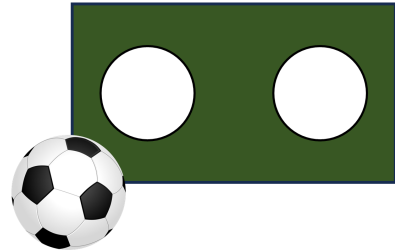
Der Term $\Psi_1 \Psi_2$ zeigt das Auftreten eines Interferenzmusters und wird deshalb als Interferenzterm bezeichnet.

Determiniertheit in der Quantenmechanik

Für ein einzelnes Quantenobjekt (System) ist die Quantenphysik nicht deterministisch. Nach dem Auftreffen vieler Photonen entsteht das typische Doppelspaltinterferenzmuster. Diese Verteilung ist bei gleichen Anfangsbedingungen (Spaltbreite, Spaltabstand) reproduzierbar und damit **stochastisch vorhersagbar**.

Aufgabe 2

Erklären Sie anhand des Torwandschießens und dem Verhalten eines einzelnen Photons am Doppelspalt den Unterschied zwischen dem klassischen Determinismus und der quantenmechanischen Determiniertheit.

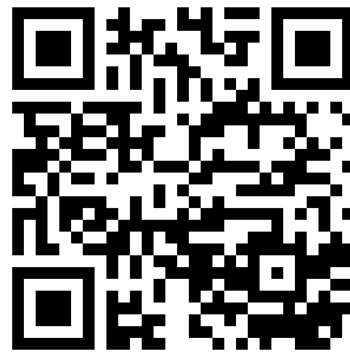


Schießen wir einen Fußball durch die abgebildete Torwand, so können wir bei bekannten Anfangsbedingungen (Ort, Impuls, einwirkende Kräfte) bestimmen, wo der Fußball an einer Wand hinter der Torwand auftrifft. Das Verhalten des Fußballs ist deterministisch. Schicken wir aber ein einzelnes Photon durch einen Doppelspalt, so können wir trotz genauer Kenntnis über die Anfangsbedingungen nicht vorhersagen, wo wir das Photon auf dem Schirm antreffen. Wir können lediglich Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen. Erst für viele Photonen ist die Verteilung reproduzierbar und stochastisch vorhersagbar. Die Quantenphysik ist determiniert.

Lösung



Lösung



LEK

Didaktische Hinweise

- Der Lehrplan sieht bei der Born'schen Wahrscheinlichkeitsinterpretation vor, dass die Superposition angegeben wird mit $\Psi_{res} = \Psi_1 + \Psi_2$ vor. Der Normierungsfaktor wird damit

vernachlässigt. Da die SuS zu diesem Zeitpunkt bereits mit der Integralrechnung vertraut sind, empfiehlt sich die korrekte Formulierung mit der Normierungskonstanten $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Die komplexe Darstellung der Wahrscheinlichkeitsdichte am Doppelspalt wird nicht thematisiert, da komplexe Zahlen kein Inhalt der Schulmathematik sind.

- Im Lehrplan wird der Begriff „Determiniertheit der Zufallsverteilung“ genannt. Dieser Begriff sollte vermieden werden, da er zu Fehlvorstellungen durch die Kombination der sich ausschließenden Wörter Determiniertheit und Zufall führt. Die SuS könnten assoziieren, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung auch zufällig ist. Gemeint ist, dass die Verteilung der „zufällig“ auftreffenden Photonen reproduzierbar und determiniert ist.
- Ein Schwerpunkt sollte auf der Unterscheidung des klassischen Determinismus und der quantenmechanischen Determiniertheit liegen. Es empfiehlt sich den Begriff „Determinismus“ in der Quantenphysik zu meiden und stets von „Determiniertheit“ zu sprechen, um die unterschiedliche Bedeutung hervorzuheben.

Kompetenzen und Anforderungsbereiche

Aufgabe	Kompetenzen: Die SuS ...	Anforderungsbereich
Aufgaben 1 & 2		
1, 2	S2: erläutern Gültigkeitsbereiche von Modellen und Theorien und beschreiben deren Aussage- und Vorhersagemöglichkeiten.	II