

Zwei Beispiele für die Berücksichtigung von Symmetrien beim Reglerentwurf

Two Examples for the Application of Invariant Feedback Control

Carsten Collon, Joachim Rudolph, Universität des Saarlandes, Saarbrücken

Zusammenfassung Es werden zwei Anwendungsbeispiele für den sogenannten invarianten Reglerentwurf diskutiert. Die Verwendung eines geometrisch motivierten Folgefehlers für das kinematische Fahrzeug erlaubt den Entwurf einer bezüglich der speziellen Euklidischen Gruppe $SE(2)$ invarianten Folgeregelung. Im Anschluss wird die Konstruktion des Folgefehlers auf den dreidimensionalen Fall übertragen. Als weiteres Beispiel dient der Entwurf einer stabilisierenden Rückführung für einen Räuber-Beute-Bioreaktor, die dem System bezüglich eines Arbeitspunktwechsels ein invarian-

tes Verhalten aufrägt. ▶▶▶ **Summary** Two examples demonstrating the application of invariant feedback design are considered. Using an invariant tracking error derived from geometric considerations a tracking control law for the kinematic car is designed which is invariant w.r.t. the special Euclidean group $SE(2)$. A possible extension to the 3-dimensional case is presented. Further, the regulation problem for a predator-prey bioreactor is approached by designing a feedback law rendering the system invariant w. r. t. set-point changes.

Schlagwörter Symmetrie, invarianter Reglerentwurf, kinematisches Fahrzeug, Bioreaktor
invariant feedback design, kinematic car, predator-prey bioreactor

▶▶▶ **Keywords** Symmetry,

1 Einleitung

Für zahlreiche technische Prozesse lassen sich Modelle als Systeme gewöhnlicher nichtlinearer Differentialgleichungen angeben, die für eine Analyse von System-eigenschaften sowie für den Entwurf von Regelungs- und Steuerungsalgorithmen genutzt werden können. Rückschlüsse über die Struktur von Differentialgleichungen können insbesondere anhand ihrer Symmetrien gezogen werden, d. h. anhand von Transformationen, die Lösungen der Differentialgleichung aufeinander abbilden.

Bei der Betrachtung von Regelungsproblemen treten Symmetrien als Transformationen zutage, bezüglich deren Wirkung die Modellgleichungen forminvariant sind, d. h., die Modellgleichungen behalten auch in den transformierten Koordinaten ihre Form. Häufig handelt es sich hierbei um recht direkt geometrisch deut-

bare Abbildungen wie z. B. den Übergang zu anderen Standard-Koordinatensystemen oder Einheitenskalierungen. Mitunter haben diese Transformationen darüber hinaus eine „natürliche“ Bedeutung für das Regelungsproblem, so dass auch das um eine Regelung ergänzte System die betrachteten Symmetrieeigenschaften aufweisen sollte. Es zeigt sich jedoch, dass Symmetrieeigenschaften durch Rückführungen verloren gehen können, d. h., Symmetrien können durch Rückführungen *gebrochen* werden. Einen möglichen Ausweg bietet die Verwendung invarianter Fehler für den Reglerentwurf, d. h. von Fehlerfunktionen, die durch die Symmetrietransformationen unverändert bleiben. Das führt auf sog. *invariante (Folge-)Regler* [11; 16; 18].

Der vorliegende Beitrag möchte mittels der Diskussion zweier Regelungsprobleme den invarianten Entwurfsan-

satz illustrieren, seine Verwendung motivieren und zu seiner Anwendung beitragen. Dabei wird an dieser Stelle bewusst auf eine Darstellung eines umfassenden theoretischen Rahmens für die Betrachtung von Symmetrien gewöhnlicher Differentialgleichungen verzichtet. Für den interessierten Leser sind stattdessen einige weiterführende Literaturstellen in Bemerkung 1 angegeben.

Der Aufsatz gliedert sich wie folgt: Im nächsten Abschnitt wird das Modell eines kinematischen Fahrzeugs als Beispiel eines Folgeregelungsproblems in der Ebene betrachtet, um die Motivation der Verwendung invarianter Folgeregler zu erläutern. Abschnitt 3 ist einer kurzen Diskussion von Symmetrien nichtlinearer Systeme in Zustandsdarstellung gewidmet. Die Ergebnisse dieser Diskussion werden in Abschnitt 4 im Rahmen des Reglerentwurfs für einen Bioreaktor angewandt, für den Symmetrieforderungen als Teil des Entwurfsproblems formuliert werden. Der hier dargestellte Entwurf eines Reglers mit Gleitregime stellt eine Fortsetzung der Diskussion in [5] dar.

Bemerkung 1 (Hinweise zur Literatur). Der Umfang an Literatur zu Symmetrien gewöhnlicher Differentialgleichungen ist zu groß, um an dieser Stelle einen Überblick zu geben. Es seien die Darstellung von Olver [12], in der zahlreiche weiterführende Literaturstellen sowie Hinweise zur historischen Entwicklung zu finden sind, sowie das Buch von Stephani [20] genannt, das eine gut lesbare Einführung in die auf Symmetrien fußenden Lösungsverfahren für Differentialgleichungen gibt.

In der regelungstechnischen Literatur wurden zunächst die strukturellen Konsequenzen der Existenz von Symmetriegruppen diskutiert, die ggf. auch eine Reduktion der Zustandsdarstellung ermöglichen [6; 24]. Die Berücksichtigung von Symmetrien beim Reglerentwurf durch invariante Folgeregler wurde in [18] vorgeschlagen und anhand von Beispielen in [15; 16] weiterführend diskutiert. In [11] geben die Autoren ein konstruktives Verfahren an, das die systematische Berechnung invarianter Folgefehler für Systeme mit einer regulären, zusammenhängenden, lokal effektiven Symmetriegruppe G und einem sog. G -verträglichen Ausgang ermöglicht.

Aus der Verwendung von Zustandsrückführungen für den invarianten Reglerentwurf entsteht das Problem des invarianten Beobachterentwurfs zur Rekonstruktion nicht gemessener Zustandsgrößen, vgl. hierzu [1; 4]. Schließlich sei darauf hingewiesen, dass sich für die Betrachtung von Symmetrien von Differentialgleichungen (gewöhnlicher wie partieller) ein differentialgeometrischer Zugang über Jets und Prolongationen als geeignet erwiesen hat; Details findet man z. B. in [2; 21].

2 Invariante Folgeregelung: kinematisches Fahrzeug

Betrachtet wird die ebene Bewegung eines (vereinfachten) Fahrzeugs der Länge l , die durch die Position des

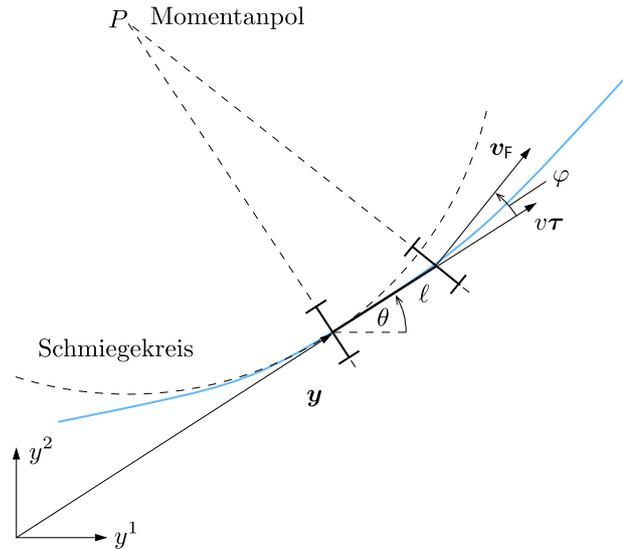


Bild 1 Kinematisches Fahrzeug: Momentanpol P und Schmiegekreis.

Hinterachsmittelpunkts y , den Lenkwinkel φ , die Fahrzeugorientierung als Winkel θ bezüglich eines festen Koordinatensystems sowie die Geschwindigkeit v beschrieben wird (vgl. Bild 1). Unter der Annahme, dass die Räder ohne Gleiten rollen, bewegen sich alle Punkte auf der Hinterachse parallel zur Richtung der Hinterräder, die mit dem Tangentialvektor τ übereinstimmt, der in den gewählten Koordinaten die Darstellung $\tau = (\cos \theta, \sin \theta)^T$ hat. Folglich wird die Bewegung des Hinterachsmittelpunkts durch die Differentialgleichung

$$\dot{y} = v\tau = v \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \quad (1a)$$

beschrieben. Für die Bewegung des Vorderachsmittelpunkts $y_F = y + l\tau$ erhält man zunächst die Gleichung

$$v_F = \dot{y}_F = \dot{y} + l\dot{\theta}\tau' = v\tau + l\dot{\theta} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \tau' = \frac{d\tau}{d\theta}.$$

Aus der in Bild 1 dargestellten Geometrie ist zu erkennen, dass die Projektion von v_F auf den Tangentialvektor τ bzw. auf den Normalenvektor $\nu = \tau'$ die Beziehungen

$$v = \langle v_F, \tau \rangle = |v_F| \cos \varphi, \quad l\dot{\theta} = \langle v_F, \nu \rangle = |v_F| \sin \varphi,$$

ergibt ($v \geq 0$). Deren Kombination liefert die Gleichung

$$\dot{\theta} = \frac{v}{l} \tan \varphi, \quad (1b)$$

die zusammen mit der Gleichung (1a) das nachfolgend betrachtete Modell des kinematischen Fahrzeugs bildet.

Invarianz der Modellgleichungen bezüglich $SE(2)$

Aus der geometrischen Anschauung ist klar, dass das Verhalten des Fahrzeugs unabhängig von der Wahl eines speziellen Koordinatensystems ist. Folglich ist zu erwarten,

ten, dass die Modellgleichungen von einer Rotation um den Koordinatenursprung sowie einer Translationen unberührt bleiben. Diese Transformationen bilden die sog. spezielle Euklidische Gruppe $SE(2)$, deren Wirkung auf die Systemgrößen durch die Beziehungen

$$\tilde{\mathbf{y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos a^3 & -\sin a^3 \\ \sin a^3 & \cos a^3 \end{pmatrix}}_{R_{a^3}} \mathbf{y} + \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\theta} = \theta + a^3, \quad (2)$$

$$\tilde{v} = v, \quad \tilde{\varphi} = \varphi,$$

gegeben ist, wobei $a^3 \in [0, 2\pi)$ als Rotationswinkel zur Rotationsmatrix R_{a^3} die Rotation um den Koordinatenursprung und $a^1, a^2 \in \mathbb{R}$ die Translation in y^1 - bzw. y^2 -Richtung beschreiben. Die transformierten Größen werden durch die Schlange gekennzeichnet. Für jedes Parametertripel (a^1, a^2, a^3) , das ein Element $g \in SE(2)$ beschreibt, werden die Modellgleichungen in

$$\dot{\tilde{\mathbf{y}}} = v R_{a^3} \boldsymbol{\tau} = \tilde{v} \begin{pmatrix} \cos \tilde{\theta} \\ \sin \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \tilde{v} \tilde{\boldsymbol{\tau}}, \quad \dot{\tilde{\theta}} = \frac{\tilde{v}}{l} \tan \tilde{\varphi},$$

transformiert. Offenbar behalten die Differentialgleichungen auch in den Schlange-Koordinaten ihre Form.

Sei durch $t \mapsto (y^1(t), y^2(t), \theta(t), v(t), \varphi(t))$ eine Lösung der Gleichungen (1) gegeben. Durch die Transformationsbeziehungen (2) wird diese auf eine Lösung $t \mapsto (\tilde{y}^1(t), \tilde{y}^2(t), \tilde{\theta}(t), \tilde{v}(t), \tilde{\varphi}(t))$ der Differentialgleichung in den neuen Koordinaten überführt, d. h., die Abbildung (2) überführt *Lösungen in Lösungen*. Da dies für alle Elemente der speziellen Euklidischen Gruppe in der Ebene gilt, bildet $SE(2)$ eine Symmetriegruppe der Differentialgleichung (1).

Die Lösung in den Schlange-Koordinaten lässt sich zudem bezüglich des ursprünglichen Koordinatensystems derart interpretieren, dass diese aus transformierten Anfangsbedingungen hervorgegangen ist. Dabei ist es unerheblich, ob zunächst die Differentialgleichung für einen Anfangswert und vorgegebene Verläufe für die Eingänge gelöst und die resultierende Lösung anschließend transformiert wird, oder, ob der Anfangswert zunächst transformiert und im Anschluss die Lösung der Differentialgleichung berechnet wird. Diese Vertauschbarkeit zwischen Anwendung der Symmetrietransformation und Bewegung entlang der Lösung der Differentialgleichung ist ein weiteres Merkmal von Symmetrien gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Möglicher Verlust der Symmetrie durch Zustandsrückführung

Es wird nun davon ausgegangen, dass ein Folgeregelungsproblem bezüglich einer (hinreichend) glatten Solltrajektorie für die Position des Hinterachsmittelpunkts¹,

$$\mathbb{R} \supset I \ni t \mapsto \mathbf{y}_d(t) \in \mathbb{R}^2,$$

¹ Dabei handelt es sich um einen flachen Ausgang des Modells [19].

durch einen Reglerentwurf für die Stellgrößen v und φ zu lösen ist. Nutzt man hierzu den üblichen Folgefehler $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_d$ (notiert bezüglich eines beliebigen festen Koordinatensystems) und gibt eine stabile, lineare zeitinvariante Fehlerdynamik

$$\ddot{\mathbf{e}} + \Lambda_1 \dot{\mathbf{e}} + \Lambda_0 \mathbf{e} = \mathbf{0}, \quad \Lambda_0, \Lambda_1 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}, \quad (3)$$

mit geeignet gewählten² konstanten Matrizen Λ_0, Λ_1 vor, so erhält man zusammen mit den Modellgleichungen die Beziehung

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{y}} &= \dot{v} \boldsymbol{\tau} + v \dot{\boldsymbol{\tau}} = R_\theta \begin{pmatrix} \dot{v} \\ \frac{v^2}{l} \tan \varphi \end{pmatrix} \\ &= \ddot{\mathbf{y}}_d - \Lambda_1 (v \boldsymbol{\tau} - \dot{\mathbf{y}}_d) - \Lambda_0 (\mathbf{y} - \mathbf{y}_d) =: \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(v, \mathbf{y}, \theta, \mathbf{y}_d^{[2]}) \end{aligned}$$

für eine Referenzbeschleunigung $\ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}$ des Hinterachsmittelpunkts. Hierbei wurden die eckigen Klammern in $\mathbf{y}_d^{[2]}$ verwendet, um Zeitableitungen der Solltrajektorie bis zur zweiten Ordnung zu notieren. Wird Vorwärtsfahrt ($v > 0$) angenommen, so erhält man hieraus durch Auflösen nach \dot{v} und φ eine dynamische Rückführung

$$\begin{aligned} \dot{v} &= \left\langle \boldsymbol{\tau}(\theta), \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(v, \mathbf{y}, \theta, \mathbf{y}_d^{[2]}) \right\rangle, \quad v(0) = |\dot{\mathbf{y}}_d(0)|, \\ \varphi &= \arctan \left\langle \mathbf{v}(\theta), \ddot{\mathbf{y}}_{\text{ref}}(v, \mathbf{y}, \theta, \mathbf{y}_d^{[2]}) \right\rangle \end{aligned}$$

als (lokalen) Regler entlang der Solltrajektorie.

Die vorangegangene Diskussion der Modellgleichungen hat gezeigt, dass diese invariant bezüglich Rotation und Translation in der Ebene sind, d. h., das Fahrzeugverhalten ist unabhängig vom gewählten Koordinatensystem. Folglich muss es ein Ziel des Reglerentwurfs sein, dass die Fehlerdynamik diese natürliche Eigenschaft des Fahrzeugs erhält, indem das Regelgesetz ebenfalls von der Koordinatenwahl unbeeinflusst bleibt. Hierzu notiert man die Fehlerdynamik in Schlange-Koordinaten,

$$\begin{aligned} R_{a^3} \ddot{\tilde{\mathbf{e}}} + R_{a^3} \Lambda_1 R_{a^3}^T R_{a^3} \dot{\tilde{\mathbf{e}}} + R_{a^3} \Lambda_0 R_{a^3}^T R_{a^3} \tilde{\mathbf{e}} \\ = \ddot{\tilde{\mathbf{e}}} + \tilde{\Lambda}_1 \dot{\tilde{\mathbf{e}}} + \tilde{\Lambda}_0 \tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

und fordert, dass diese dieselbe Form hat wie zuvor, d. h., $\Lambda_0 = \tilde{\Lambda}_0$ und $\Lambda_1 = \tilde{\Lambda}_1$ für alle $a^3 \in [0, 2\pi)$ gilt. Aus diesen Forderungen leiten sich für die Wahl der Einträge von Λ_0 und Λ_1 die Bedingungen $\lambda_{i,11} = \lambda_{i,22}$ sowie $\lambda_{i,21} = -\lambda_{i,12}$, $i = 0, 1$ ab, so dass der Reglerentwurf gewissen Einschränkungen unterworfen ist. Die Einschränkungen bei der Wahl der Reglerkoeffizienten entfallen, falls die Komponenten des verwendeten Folgefehlers selbst invariant sind. Diese Beobachtung motiviert die Verwendung *invarianter Folgefehler* für den Entwurf von Folgereglern, die Symmetrien der Modellgleichungen nicht brechen.

² Genau derart, dass die Blockmatrix $\begin{pmatrix} 0 & I_{2 \times 2} \\ -\Lambda_0 & -\Lambda_1 \end{pmatrix}$ nur Eigenwerte in der offenen linken Halbebene der komplexen Zahlenebene hat.

2.1 Ein invarianter Folgefehler

Wohlbekannte invariante Folgefehler für das betrachtete Problem ergeben sich durch die Definition des Fehlers bezüglich eines an der Solltrajektorie mitgeführten Koordinatensystems, siehe z. B. [15; 18; 23]. An dieser Stelle soll jedoch ein alternativer Fehler zur Anwendung kommen³, der sich als Projektion der aktuellen Position des Hinterachsmittelpunkts auf die Solltrajektorie ergibt⁴. Hierzu sei angenommen, dass die Solltrajektorie $[0, L] \ni s_d \mapsto \mathbf{y}_d(s_d)$ bezüglich ihrer Bogenlänge s_d parametrisiert wird⁵.

Ein invarianter Folgefehler setzt sich dann aus dem Abstand d des Punkts $\mathbf{y}(s_d)$ von der Solltrajektorie und dem Schleppfehler δ_s entlang der Solltrajektorie zusammen. Die Komponenten d und δ_s bestimmen sich durch Projektion des Punkts $\mathbf{y}(s_d)$ auf der Isttrajektorie entlang des Lots auf die Solltrajektorie, die den Punkt $\mathbf{y}_d(s_d + \delta_s)$ auf der Solltrajektorie ergibt (vgl. Bild 2). D. h., der Fehler berechnet sich als Lösung der Gleichung

$$\mathbf{y}(s_d) - d\mathbf{v}_d(s_d + \delta_s) - \mathbf{y}_d(s_d + \delta_s) = 0. \quad (4)$$

Aus dieser lassen sich die zwei entkoppelten Gleichungen $0 = \langle \mathbf{y}(s_d) - \mathbf{y}_d(s_d + \delta_s), \mathbf{y}'_d(s_d + \delta_s) \rangle,$ (5a)

$$d = \langle \mathbf{y}(s_d) - \mathbf{y}_d(s_d + \delta_s), \mathbf{v}_d(s_d + \delta_s) \rangle, \quad (5b)$$

für δ_s und d gewinnen, wobei ' die Ableitung nach dem Argument in der Bogenlängenparametrierung bezeichnet. Die Invarianz der Lösungen von Gleichung (4) (und somit auch von (5)) bezüglich der Wirkung der Symmetriegruppe $SE(2)$ ergibt sich aus (4) mit $\mathbf{a}_0 = (a^1, a^2)^T$ aus der Regularität der Rotationsmatrix R_{a^3} für alle $a^3 \in [0, 2\pi)$:

$$R_{a^3}\mathbf{y}(s_d) + \mathbf{a}_0 - dR_{a^3}\mathbf{v}_d(s_d) - R_{a^3}\mathbf{y}_d(s_d) - \mathbf{a}_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{y}(s_d) - d\mathbf{v}_d(s_d) - \mathbf{y}_d(s_d) = 0.$$

Folglich bildet das Paar (δ_s, d) tatsächlich einen invarianten Folgefehler, der als Grundlage für einen invarianten Reglerentwurf dienen kann, d. h., es können z. B. unterschiedliche Fehlerdynamiken für den Schleppfehler und die Lotdistanz vorgegeben werden.

2.2 Entwurf eines invarianten Folgereglers

Obwohl für die implizite Gleichung (5a) durch numerische Iterationsverfahren mit passender Abbruch-

³ Die Verwendung dieses Fehlers geht auf einen Vorschlag von Dr.-Ing. Frank Woittennek zurück.

⁴ Die Frage nach einer geeigneten Projektion kann unterschiedlich beantwortet werden, siehe z. B. auch [8].

⁵ Der Übergang zur Bogenlängenparametrierung ist aus geometrischer Sicht natürlich, da sie eine Invariante der Kurve unter Rotation und Translation ist. Aus regelungstechnischer Sicht ist die Bogenlänge als freier Parameter günstig, um eine Singularität bei Stillstand des Fahrzeugs in der Rückführung zu vermeiden. An dieser Stelle dient die Bogenlängenparametrierung einer vereinfachten Darstellung sowie einer anschaulichen Deutung der Komponenten des Folgefehlers.

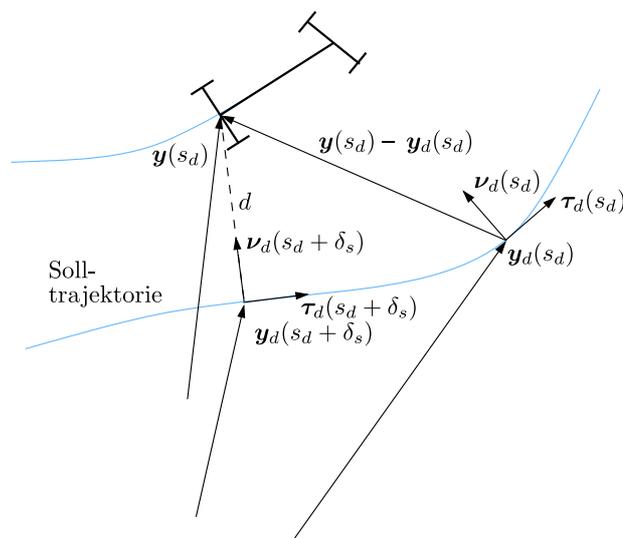


Bild 2 Geometrisch motivierter invarianter Folgefehler (δ_s, d) .

bedingung, wie z. B. $|\langle \mathbf{y}(s_d) - \mathbf{y}_d(s_d + \delta_s), \boldsymbol{\tau}(s_d + \delta_s) \rangle| < \varepsilon$, Näherungslösungen für δ_s bestimmt werden können, sind für den Reglerentwurf explizite Lösungen vorteilhaft. Hierzu sei angenommen, dass die Referenztrajektorie sinnvoll geplant wird – indem u. a. auf übereinstimmende Anfangswerte und Einhaltung von Stellgrößenbeschränkungen geachtet wird – sowie eine „funktionierende“ Regelung die Abweichungen um die Solltrajektorie hinreichend begrenzt. Unter diesen Voraussetzungen kann über einen Näherungsansatz basierend auf einer Taylorreihenentwicklung der Solltrajektorie je ein expliziter Ausdruck für Näherungen $\hat{\delta}_s$ und \hat{d} angegeben werden.

Dazu werden in der Taylorreihe für die Solltrajektorie bezüglich der Bogenlänge Terme ab der Ordnung 3 vernachlässigt⁶, so dass die Ausdrücke

$$\mathbf{y}_d(s_d + \delta_s) \approx \mathbf{y}_d(s_d) + \mathbf{y}'_d(s_d)\delta_s + \frac{1}{2}\mathbf{y}''_d(s_d)\delta_s^2 \quad \text{und}$$

$$\mathbf{y}'_d(s_d + \delta_s) \approx \mathbf{y}'_d(s_d) + \mathbf{y}''_d(s_d)\delta_s$$

zusammen mit $\mathbf{v}_d = (-y'_{d,2}, y'_{d,1})^T$ in die Lotbedingung (5a) eingesetzt werden können. Hieraus erhält man die Beziehung

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{y}''_d, \mathbf{y}''_d \rangle \delta_s^3 + \frac{3}{2} \langle \mathbf{y}'_d, \mathbf{y}''_d \rangle \delta_s^2 - (\langle \mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \mathbf{y}''_d \rangle - \langle \mathbf{y}'_d, \mathbf{y}'_d \rangle) \delta_s - \langle \mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \mathbf{y}'_d \rangle = 0.$$

Unter Vernachlässigung der Terme 3. Ordnung und durch Berücksichtigung der Tatsache, dass das Skalar-

⁶ An dieser Stelle könnten auch Terme der Ordnung größer 3 berücksichtigt werden, jedoch führt dies auf eine Bestimmungsgleichung für $\hat{\delta}_s$, die nicht mehr explizit zu lösen ist, so dass kein Mehrwert im Vergleich zur numerischen Lösung der ursprünglichen Gleichung (5a) entstände.

produkt $\langle \mathbf{y}'_d, \mathbf{y}''_d \rangle$ Null ergibt⁷, erhält man die lineare Gleichung

$$0 = -[\langle \mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \mathbf{y}''_d \rangle - 1] \hat{\delta}_s - \langle \mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \mathbf{y}'_d \rangle,$$

aus der eine explizite Lösung

$$\hat{\delta}_s = \sigma(\mathbf{y}, \mathbf{y}_d, \mathbf{y}'_d, \mathbf{y}''_d) = \frac{\langle \mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \mathbf{y}'_d \rangle}{1 - \langle \mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \mathbf{y}''_d \rangle} \quad (6)$$

abgelesen werden kann. Die Näherungslösung für den Lotabstand $\hat{d} = D(\mathbf{y}, \mathbf{y}_d, \mathbf{y}'_d, \mathbf{y}''_d)$ ergibt sich aus der Gleichung (5b). Die Invarianz der Lösung $\hat{\delta}_s$ bezüglich der Gruppenwirkung von SE(2) kann hierbei direkt aus der Form der Gleichung geschlossen werden, da sich die rechte Seite aus Projektionen des üblichen Folgefehlers zusammensetzt. Zudem ist zu erkennen, dass für eine nicht geradlinige Referenztrajektorie ($\mathbf{y}''_d \neq 0$) der Schleppfehler $\hat{\delta}_s$ nur für $\langle \mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \mathbf{y}'_d \rangle \neq 1$ definiert ist – eine Bedingung, die für hinreichend kleine Folgefehler $\mathbf{y} - \mathbf{y}_d$ erfüllt ist⁸. Für eine geometrische Deutung der Bedingung siehe Bemerkung 2.

Unter Verwendung des invarianten Folgefehlers ($\hat{\delta}_s, \hat{d}$) kann nun direkt ein invarianter Reglerentwurf erfolgen. An dieser Stelle soll hierfür zur üblichen Zeitparametrierung zurückgekehrt werden⁹. Durch Ausdrücken der Bogenlänge s_d mittels der Geschwindigkeit entlang der Solltrajektorie $v_d(t) = \sqrt{\dot{\mathbf{y}}_d(t)^T \dot{\mathbf{y}}_d(t)}$, also $s_d(t) = \int_0^t v_d(\eta) d\eta$, und unter Verwendung des Zusammenhangs $ds_d = v_d dt$ sowie der Kettenregel werden die Ableitungen bezüglich der Bogenlänge der Solltrajektorie durch Ableitungen der Solltrajektorie bezüglich der Zeit ersetzt. Aus der Vorgabe einer linearen zeitinvarianten Fehlerdynamik $\dot{\hat{\delta}}_s = -c_s \hat{\delta}_s$, $c_s > 0$, ergibt sich zusammen mit der Lie-Ableitung von σ aus (6) entlang von Trajektorien des Fahrzeugs¹⁰ eine Rückführung für die Fahrzeuggeschwindigkeit v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{y}, \mathbf{y}_d^{[2]}) v \boldsymbol{\tau}(\theta) + L_{\bar{\mathbf{y}}_d} \sigma(\mathbf{y}, \mathbf{y}_d^{[3]}) &= -c_s \sigma(\mathbf{y}, \mathbf{y}_d^{[2]}) \\ \Rightarrow v &= V(\mathbf{y}, \theta, \mathbf{y}_d^{[3]}). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $L_{\bar{\mathbf{y}}_d}$ die Lie-Ableitung entlang des Flusses des Vektorfeldes $\bar{\mathbf{y}}_d := \dot{\mathbf{y}}_d \partial_{\mathbf{y}_d} + \ddot{\mathbf{y}}_d \partial_{\dot{\mathbf{y}}_d} + \dots$, das bis zu einer hinreichend hohen Ableitungsordnung der Referenztrajektorie definiert ist. Des Weiteren ist zu beachten, dass die Rückführung für v nur dann definiert ist, wenn dies für die Lösung für $\hat{\delta}_s$ der Fall ist.

⁷ Dies erkennt man anhand der Identität $\langle \mathbf{y}'_d, \mathbf{y}'_d \rangle \equiv 1$, die für jede Kurve in Bogenlängenparametrierung gilt, bzw. anhand der Tatsache, dass der Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}_d = \mathbf{y}'_d$ und der Normalenvektor $\mathbf{v}_d \sim \mathbf{y}''_d$ immer senkrecht zueinander stehen.

⁸ Dies ist keine wesentliche Einschränkung, sofern eine Trajektorienplanung unter Berücksichtigung der anfänglichen Position des Hinterachsmittelpunkts möglich ist.

⁹ Für einen Entwurf mit dem freien Parameter der Bogenlänge und einer Zeitfunktion $t \mapsto s_d(t)$ siehe z. B. [7].

¹⁰ Dies entspricht der totalen Zeitableitung $\frac{d}{dt} \sigma(\mathbf{y}, \mathbf{y}_d^{[2]})$ unter Berücksichtigung der Fahrzeuggleichungen.

In ähnlicher Weise gelingt der Entwurf einer Rückführung für den Lenkwinkel φ . Hierzu wird erneut eine lineare zeitinvariante Fehlerdynamik $\dot{\hat{d}} = -c_{d,1} \hat{d} - c_{d,0} \hat{d}$, $c_{d,\bullet} > 0$, angesetzt. Zudem werden die erste und die zweite Zeitableitung der Lotdistanz \hat{d}

$$\begin{aligned} \dot{\hat{d}} &= v \frac{\partial D}{\partial \mathbf{y}} \boldsymbol{\tau} + L_{\bar{\mathbf{y}}_d} D(\mathbf{y}, \mathbf{y}_d^{[3]}) \quad \text{und} \\ \ddot{\hat{d}} &= \frac{\partial D}{\partial \mathbf{y}} \left(\dot{v} \boldsymbol{\tau} - v \frac{v^2}{l} \tan \varphi \right) + v^2 \boldsymbol{\tau}^T \frac{\partial^2 D}{\partial \mathbf{y}^2} \boldsymbol{\tau} + \\ &\quad L_{\bar{\mathbf{y}}_d} \left(v \frac{\partial D}{\partial \mathbf{y}} \boldsymbol{\tau} \right) + L_{\bar{\mathbf{y}}_d}^2 D(\mathbf{y}, \mathbf{y}_d^{[4]}) \end{aligned}$$

berechnet und zusammen mit der Rückführung $v = V(\mathbf{y}, \theta, \mathbf{y}_d^{[3]})$ sowie deren Zeitableitung

$$\dot{v} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{y}} V \boldsymbol{\tau} + \frac{\partial V}{\partial \theta} \frac{V}{l} \tan \varphi + L_{\bar{\mathbf{y}}_d} V$$

in die Fehlerdifferentialgleichung eingesetzt. Daraus ergibt sich eine Bestimmungsgleichung der Form

$$\begin{aligned} \ddot{\hat{d}} &= \frac{V}{l} \tan \varphi \frac{\partial D}{\partial \mathbf{y}} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \boldsymbol{\tau} - V \mathbf{v} \right) + H(\mathbf{y}, \theta, \mathbf{y}_d^{[4]}) \\ &\stackrel{!}{=} -c_{d,1} \dot{\hat{d}} - c_{d,0} \hat{d} \end{aligned} \quad (7)$$

für die Rückführung $\varphi = \Phi(\mathbf{y}, \theta, \mathbf{y}_d^{[4]})$. Hierbei ist zu beachten, dass diese nur nach $\tan \varphi$ aufgelöst werden kann, sofern $V \neq 0$ gilt, und das Fahrzeug nicht im rechten Winkel zu der gewünschten Orientierung im Punkt $s_d + \delta_s$ steht¹¹. Aufgrund der Invarianz des verwendeten Folgefehlers bleibt die Symmetrie bezüglich SE(2) auch für das um diese (lokal) stabilisierende Rückführung ergänzte System erhalten.

Simulation

In Bild 3 ist das Simulationsergebnis für eine kreisförmige Sollbahn

$$\mathbf{y}_d(t) = r_d (\cos \alpha(t), \sin \alpha(t))^T, \quad \alpha(t) = \frac{v_d t}{r_d},$$

dargestellt, wobei r_d und v_d den konstanten Sollradius und die konstante Sollgeschwindigkeit bezeichnen. Um das Folgeverhalten des Reglers darzustellen, wurde die Anfangsposition des Fahrzeugs mit einem Winkelversatz von $\alpha_0 = 10^\circ$ und einem relativen Radiusfehler von $r/r_d = 1,1$ versehen. Für die Simulation wurden die Parameter $l = 1,5$ m, $r_d = 20$ m, $v_d = 5$ m/s, $c_s = 1,2$ 1/s gesetzt und für den harmonischen Oszillator $\ddot{\hat{d}} + c_{d,1} \dot{\hat{d}} + c_{d,0} \hat{d} = 0$ der Fehlerdynamik (7) für \hat{d} die Kreisfrequenz $\omega_0 = 1,2$ rad/s sowie kritische Dämpfung gewählt.

Bemerkung 2. Die Bedingung $\langle \mathbf{y} - \mathbf{y}_d, \mathbf{y}'_d \rangle = 1$ für die Polstelle von (6) kann geometrisch gedeutet werden (vgl.

¹¹ Die erste Bedingung resultiert aus dem Verlust der Steuerbarkeit im Stillstand. Die zweite Bedingung erhält man z. B. aus der Gleichung (5b), denn mit der Näherung für δ_s gilt auch näherungsweise $\frac{\partial D}{\partial \mathbf{y}} \sim \mathbf{v}_d(s_d + \delta_s)$, und hieraus folgt die Bedingung $\langle \mathbf{v}_d(s_d + \delta_s), \mathbf{v}(s_d) \rangle \neq 0$.

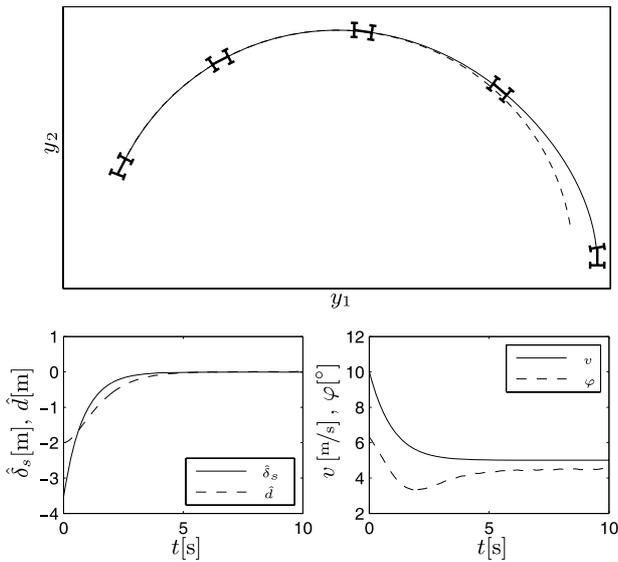


Bild 3 Simulationsergebnis: Position und Orientierung des Fahrzeugs in der Ebene (oben), Verlauf der Komponenten des invarianten Folgefehlers δ_s, \hat{d} (unten links) und der Eingangsgrößen v, φ (unten rechts).

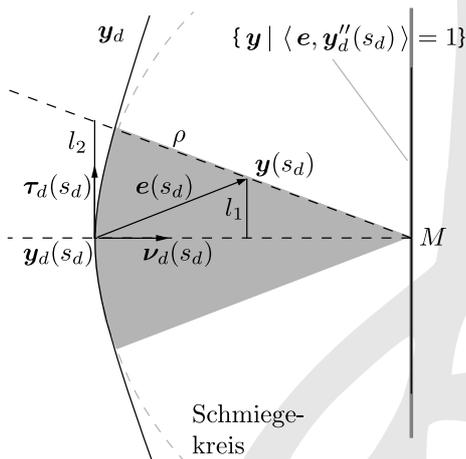


Bild 4 Geometrische Deutung der Singularität von Gleichung (6) mit Hilfe des Schmiegekreises im Punkt $y_d(s_d)$ und des 2. Strahlensatzes.

Bild 4). In einer Umgebung von $y_d(s_d)$ stimmt die Approximation der Solltrajektorie durch die abgebrochene Taylorreihe mit dem Schmiegekreis im Entwicklungspunkt $y_d(s_d)$ überein (grau strichliert). Der Schmiegekreis hat den Radius $\rho(s_d) = 1/k(s_d)$, wobei $k(s_d) = |y_d''(s_d)|$ die Krümmung der Solltrajektorie im Entwicklungspunkt $s = s_d$ bezeichnet. Aus $\tau_d'(s_d) = k(s_d)\nu_d(s_d)$ (Frenet-Serret-Formeln) ergibt sich zunächst

$$\langle y - y_d, y_d'' \rangle = \langle e, k\nu_d \rangle = 1 \Leftrightarrow \langle e, \nu_d \rangle = \frac{1}{k} = \rho,$$

d.h., die Punkte, für die $\hat{\delta}_s$ nicht definiert ist, liegen auf einer Geraden durch den Mittelpunkt M des Schmiegekreises parallel zum Tangentialvektor $\tau_d(s_d)$. Die Approximation $\hat{\delta}_s$ des Schleppfehlers wird durch eine näherungsweise Projektion von $y(s_d)$ auf den Schmiegekreis entlang des Strahls durch M berechnet, die sich

durch Anwendung des 2. Strahlensatzes ergibt. Zunächst erhält man mit dem Strahlensatz die Beziehung

$$\begin{aligned} \frac{l_2}{l_1} &= \frac{l_2}{\langle e, \tau_d \rangle} = \frac{l_2}{\langle e, y_d' \rangle} \\ &= \frac{\rho}{\rho - \langle e, \nu_d \rangle} = \frac{1}{1 - \langle e, k\nu_d \rangle}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von y_d''/k für ν_d ergibt sich dann die Bestimmungsgleichung für den approximierten Schleppfehler zu

$$\hat{\delta}_s = l_2 = \frac{\langle e, y_d'' \rangle}{1 - \langle e, y_d'' \rangle}.$$

Für $y(s_d) = M$ kommen unendlich viele Strahlen durch M als Lot durch $y(s_d)$ auf den Schmiegekreis in Frage, d.h., die Projektion ist nicht eindeutig definiert. Für alle anderen Punkte auf der Geraden $\{y \mid \langle e, y_d''(s_d) \rangle = 1\}$ existiert kein Lot auf den Schmiegekreis, das die Gerade $y_d(s_d) + \gamma \tau_d(s_d)$, $\gamma \in \mathbb{R}$, schneidet, die Projektion ist nicht definiert.

2.3 Übertragung des invarianten Folgefehlers auf den räumlichen Fall

Die Überlegungen zur Herleitung des invarianten Folgefehlers für das ebene Problem lassen sich auf dreidimensionale Folgeregelungsprobleme übertragen¹², die invariant bezüglich der Wirkung der Gruppe $SE(3)$ der Rotationen und Translationen ist. An die Stelle des Lots tritt nun eine Lotebene E (vgl. Bild 5). Da die Bestimmungsgleichung

$$\langle y(s_d) - y_d(s_d + \delta_s), \tau_d(s_d + \delta_s) \rangle = 0$$

für die Lotebene E mit der Gleichung (5a) übereinstimmt, ergeben sich auch im räumlichen Fall dieselben Beziehungen für die Bestimmung des Schleppfehlers δ_s wie im ebenen Fall. Folglich können die Überlegungen zur näherungsweise Berechnung des Schleppfehlers direkt übernommen werden, und $\hat{\delta}_s$ ergibt sich aus Gleichung (6).

Für die Definition der zwei weiteren Fehlerkomponenten ergeben sich mehrere Möglichkeiten. Hier soll auf das begleitende Dreiein der Kurve zurückgegriffen werden (Frenet-Serret-Formeln). Hierzu sei der Normalenvektor $\nu_d(s_d) = \frac{\tau_d'(s_d)}{k(s_d)}$ notiert, wobei $k(s_d)$ wie zuvor die Krümmung der Kurve bezeichnet. Neben dem Kurvenabstand in der Ebene $d = |y(s_d) - y_d(s_d + \delta_s)|$ wird der Winkel α zwischen $\nu_d(s_d + \delta_s)$ und dem Vektor $y(s_d) - y_d(s_d + \delta_s)$ als weitere Komponente des Folgefehlers eingeführt. Entsprechend werden für die Näherungswerte die Beziehungen

$$\hat{d} = |y(s_d) - y_d(s_d + \hat{\delta}_s)|$$

$$\hat{\alpha} = \arccos \frac{\langle y_d''(s_d + \hat{\delta}_s), y(s_d) - y_d(s_d + \hat{\delta}_s) \rangle}{\hat{d} |y_d''(s_d + \hat{\delta}_s)|}$$

¹² Man denke z. B. an das Führen eines Endeffektors eines Schweißroboters.

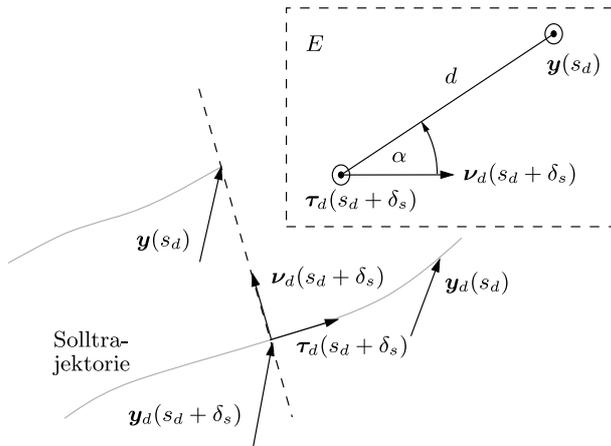


Bild 5 Skizze zur Übertragung des Fehlers auf den 3-dimensionalen Fall: Schleppfehler δ_s , Lotebene E .

eingeführt¹³. Der Folgefehler $(\hat{\delta}_s, \hat{d}, \hat{\alpha})$ ist analog zum ebenen Fall invariant bezüglich der Wirkung von $SE(3)$, so dass auf der Grundlage dieses Fehlers ein Entwurf eines invarianten Folgereglers für räumliche Bahnfolgeprobleme möglich ist.

3 Invariante Folgefehler für Systeme in Zustandsdarstellungen mit Symmetrien

Im vorangegangenen Beispiel konnte ein geeigneter invarianter Folgefehler anhand geometrischer Überlegungen hergeleitet werden. Mitunter bleibt jedoch eine geometrische Deutung der Symmetrietransformationen verwehrt. In [11] wird für Systeme in Zustandsdarstellung mit Symmetrien ein konstruktives Verfahren angegeben, das – unter gewissen Voraussetzungen – die Berechnung invarianten Folgefehler erlaubt. Für das nachfolgende Beispiel wird auf dieses Verfahren zurückgegriffen, weshalb zunächst das benötigte Ergebnis aus [11] angegeben wird.

Für die weitere Betrachtung sei davon ausgegangen, dass ein nichtlineares Streckenmodell in Zustandsdarstellung

$$\dot{x} = f(x, u)$$

mit einem Zustand $x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n$ und einem Eingang $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m$ gegeben ist. Es sei zudem eine lokale Transformationsgruppe

$$(\varphi_g \times \psi_g)_{g \in G} : \quad \tilde{x} = \varphi_g(x), \quad \tilde{u} = \psi_g(x, u) \quad (8)$$

bestehend aus einem lokalen Diffeomorphismus φ_g auf X und einer regulären Zustandsrückführung ψ_g derart bekannt, dass die Symmetriebedingung

$$\dot{\tilde{x}} = \frac{\partial \varphi_g}{\partial x}(x) f(x, u) = f(\tilde{x}, \tilde{u}) \quad (9)$$

¹³ Das Frenet-Serret-Dreibein ist für geradlinige Kurvenabschnitte ($y''_d = 0$) nicht eindeutig definiert. Hier sei vorausgesetzt, dass sich über die Frenet-Serret-Formeln $\tau'_d = kv_d$, $v'_d = -k\tau_d + w\eta_d$, $\eta'_d = -wv_d$, mit dem Binormalenvektor η_d und der Windung w (vgl. [3]) eine stetige Fortsetzung für einen geradlinigen Abschnitt angeben lässt, so dass der Folgefehler auch in diesem Fall definiert ist.

für alle Gruppenelemente $g \in G$ erfüllt ist. Dabei entspricht die Symmetriebedingung gerade der zu Beginn formulierten Beobachtung, dass Differentialgleichungssysteme bezüglich ihrer Symmetrien forminvariant sind.

In Koordinaten notiert hängen die Transformationsbeziehungen (8) von r Gruppenparametern $a = (a^1, \dots, a^r)^T$ ab, d. h., in den lokal gewählten Koordinaten gilt¹⁴ $G \ni g \simeq a$, und man erhält Gleichungen der Form¹⁵

$$\tilde{x} = \varphi(x, a), \quad \tilde{u} = \psi(x, u, a), \quad a \in \mathbb{R}^r. \quad (10)$$

Aufgrund der Forminvarianz der Zustandsdarstellung bezüglich der Wirkung der Transformationsgruppe wird G als Symmetriegruppe des Systems bezeichnet. Sei nun ein Ausgang $y = h(x)$ über eine glatte Abbildung $h : X \rightarrow Y$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, gegeben. Dieser heißt G -verträglich, wenn durch die Symmetriegruppe G eine Transformationsgruppe $(\rho_g)_{g \in G} : Y \rightarrow Y$ induziert wird, d. h., wenn lokal eine glatte Abbildung

$$\tilde{y} = \rho(y, a) = (\rho^1(y, a), \dots, \rho^m(y, a)) \quad (11)$$

existiert. An dieser Stelle soll vorausgesetzt werden, dass die induzierte Transformationsgruppe regulär und frei auf Y wirke, d. h., dass die Gleichung (11) lokal nach den r Gruppenparametern auflösbar ist¹⁶. Sei nun durch $t \mapsto y_d(t)$ eine (hinreichend) glatte¹⁷ Solltrajektorie für den G -verträglichen Ausgang gegeben. Dann lässt sich die lokale Wirkung der Symmetrietransformation auf die Solltrajektorie normalisieren, d. h., aus einer geeigneten Wahl von m Konstanten $c^i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, leiten sich m Normalisierungsgleichungen

$$c^1 = \rho^1(y_d, a), \quad c^2 = \rho^2(y_d, a), \quad \dots, \quad c^m = \rho^m(y_d, a)$$

ab, die sich lokal nach den Gruppenparametern a auflösen lassen¹⁸. Hieraus ergibt sich eine Funktion

$$\gamma : Y \rightarrow \mathbb{R}^r, \quad a = \gamma(y_d),$$

die ein mitgeführtes Koordinatensystem (repère mobile) entlang der sog. Gruppenorbits definiert. Auf Grundlage dieser Abbildung erhält man über die Beziehungen

$$e^i = \rho^i(y, \gamma(y_d)) - \rho^i(y_d, \gamma(y_d)), \quad i = 1, \dots, m, \quad (12)$$

einen vollständigen Satz invarianten Folgefehler¹⁹, der für den Entwurf eines invarianten Folgereglers genutzt werden kann [11].

¹⁴ D. h., die Lie-Gruppe G ist lokal diffeomorph zum \mathbb{R}^r (Wahl einer lokalen Karte für G als glatte Mannigfaltigkeit).

¹⁵ Diese werden auch als lokale Wirkung der Gruppe bezeichnet. Im Falle des kinematischen Fahrzeugs war $G = SE(2)$, und die lokale Wirkung wurde in Gleichung (2) beschrieben.

¹⁶ Dies ist eine starke Annahme, denn schon die Gruppe der Rotationen wirkt nicht frei im Ursprung – nicht einmal effektiv. Die Beschränkung auf freie Wirkungen genügt jedoch für das anschließende Beispiel. Für eine allgemeinere Diskussion siehe [11]; Details zu Lie-Gruppen findet man u. a. in [13; 22].

¹⁷ Dies schließt den konstanten Fall ein.

¹⁸ Gegebenenfalls müssen die Ausgangsgleichungen passend umnummeriert werden. Die Wahl der Konstanten erfolgt hierbei zweckmässig im Sinne der Auflösbarkeit der Gleichungen.

¹⁹ Da auch jede Funktion $H(\rho^i(y, \gamma(y_d)))$ eine Invariante bezüglich der Gruppenwirkung ist, kommen auch Folgefehler der Form $e^i =$

4 Arbeitspunktunabhängige Regelung eines Bioreaktors

Betrachtet wird das Modell eines Bioreaktors im kontinuierlichen Betrieb, der zur Züchtung einer Sorte von Mikroorganismen \mathcal{P} dient (Chemostat). Die Mikroorganismen ernähren sich von einer zweiten Sorte Mikroorganismen \mathcal{B} , die neben der Population der Mikroorganismen \mathcal{P} im flüssigen Reaktorinhalt mit konstantem Volumen V lebt. Um das Wachstum der Population \mathcal{P} zu sichern, muss daher dafür gesorgt werden, dass die Population \mathcal{B} in ausreichender Menge erhalten bleibt. Zu diesem Zweck wird über einen Zulauf eine Flüssigkeit eingeleitet, die ein Substrat s in der Zulaufkonzentration s_F enthält, von dem sich die Mikroorganismen der Population \mathcal{B} ernähren. Zudem findet über den Zulauf und einen am Boden des Reaktors vorhandenen Ablauf ein kontinuierlicher Austausch des Reaktorinhalts mit dem Volumenstrom Q statt. Die Entwicklung der Konzentrationen p , b und s der beiden Populationen sowie des Substrats im Reaktor kann vereinfachend durch das (Räuber-Beute-)Modell

$$\dot{p} = -Dp + \nu(b)p = f_1(p, b) \quad (13a)$$

$$\dot{b} = -Db + \mu(s)b - \alpha\nu(b)p = f_2(p, b, s) \quad (13b)$$

$$\dot{s} = D(s_F - s) - \beta\mu(s)b = f_3(b, s, s_F) \quad (13c)$$

beschrieben werden [14]. Hierbei sind die beiden positiven Konstanten α und β Ertragskoeffizienten für das Wachstum beider Populationen, $D = Q/V$ bezeichnet die Verdünnungsrate, und ν und μ sind positive, beschränkte, monoton wachsende Funktionen, welche die speziellen Wachstumsraten der Populationen \mathcal{P} und \mathcal{B} beschreiben.

In Fortsetzung der Diskussion des invarianten Reglerentwurfs für den Bioreaktor aus [5] soll nachfolgend eine Regelung mit Gleitregime entworfen werden, die eine vom Arbeitspunkt unabhängige Fehlerdynamik aufweist.

Für den Reglerentwurf wird angenommen, dass die Wachstumskinetiken für \mathcal{B} und \mathcal{P} in beiden Fällen geeignet durch die sog. Michaelis-Menten-Kinetik modelliert werden können, d. h., es werden die Funktionen

$$\mu(s) = \mu_m \frac{s}{K+s}, \quad \nu(b) = \nu_m \frac{b}{L+b},$$

mit den maximalen Wachstumsraten μ_m , ν_m sowie den positiven Konstanten K , L angesetzt [10]. Ferner gelte $D = \text{const.}$ Der Reaktor wird um Ruhelagen betrieben, die durch die jeweils im Reaktor eingestellte Konzentration $p = p^0 = \text{const.}$ vorgegeben werden. Die Aufgabe der Regelung besteht darin, Störungen, die von Modellunbestimmtheiten herrühren, auszugleichen. Da der Reaktor

$H(\rho^i(y, \gamma(y_a))) - H(\rho^i(y_a, \gamma(y_a)))$ in Frage. Durch die Wahl spezieller Normalisierungskonstanten erfolgt keine Einschränkung der Menge der invarianten Folgefehler für das Regelungsproblem, jedoch eine Festlegung der Invarianten ρ^i , auf deren Grundlage der Folgefehler definiert wird.

mit unterschiedlichen Konzentrationen betrieben wird, soll das um die Rückführung erweiterte System invariant bezüglich Arbeitspunktwechseln sein.

Flachheit des Modells für $D = \text{const.}$

Eine im weiteren Verlauf nützliche Eigenschaft des Modells (13) ist, dass durch $y = p$ ein flacher Ausgang gegeben ist. Dies erkennt man unmittelbar anhand der rückgekoppelten Form der Gleichungen. Die weiteren Systemgrößen b , s und s_F lassen sich durch den flachen Ausgang und seine Zeitableitungen bis zur dritten Ordnung parametrieren: Zunächst kann aus Gleichung (13a) b durch y und \dot{y} ausgedrückt werden, $b = B(y, \dot{y})$, eingesetzt in die zweite Zustandsgleichung (13b) liefert $s = S(y, \dot{y}, \ddot{y})$, und schließlich lässt sich über die dritte Zustandsgleichung (13c) eine Parametrierung für die Zulaufkonzentration $s_F = S_F(y, \dot{y}, \ddot{y}, y^{(3)})$ angeben.

Induzierte Zustandssymmetrie

Der Wechsel des durch die Konzentration $p^0 = \text{const.}$ gegebenen Arbeitspunkts wird durch die Skalierung (Punkttransformation)

$$\rho: \mathbb{R}_+ \times Y \rightarrow Y, \quad y \mapsto \tilde{y} = ay$$

beschrieben²⁰, wobei der Gruppenparameter für das betrachtete Problem auf ein abgeschlossenes Intervall beschränkt wird: $0 < a \in [a, \bar{a}]$. Da $y = p$ ein flacher Ausgang des Modells ist, induziert die Skalierung über die Modellgleichungen eine Transformationsgruppe auf ganz X :

$$\tilde{b} = b,$$

$$\tilde{s} = S(ay, a\dot{y}, a\ddot{y}) = \sigma(p, b, s, a)$$

$$= K \frac{\alpha(a-1)(s+K)\nu_m p + \mu_m s(L+b)}{\alpha(1-a)(s+K)\nu_m p + \mu_m K(L+b)}.$$

Um die Forderung nach Forminvarianz der Modellgleichungen (9) unter dieser Transformationsgruppe zu erfüllen, ist zudem eine Transformation des Eingangs notwendig, die sich aus der Gleichung²¹

$$\dot{\tilde{s}} = L_f \sigma \stackrel{!}{=} f_3(\tilde{p}, \tilde{b}, \tilde{s}, \tilde{s}_F)$$

bestimmt, so dass sich eine induzierte Rückführung $\tilde{s}_F = \sigma_F(p, b, s, s_F, a)$ für jedes $a \in \mathbb{R}_+$ ergibt. Dies kann derart gedeutet werden, dass die Symmetrie durch Einsatz der Stellgröße „erzeugt“ wird. Eine andere Sichtweise erlaubt die Tatsache, dass durch Einführen eines neuen Eingangs über eine reguläre Rückführung eine Transformation des Eingangs nicht mehr notwendig wird – das Reaktormodell ist also bis auf eine Rückführung äquivalent zu einem Modell mit der gewünschten Symmetrie, die nur auf X wirkt²².

²⁰ Der Übergang könnte auch durch beliebige andere Punkttransformationen beschrieben werden.

²¹ Dies entspricht der Symmetriebedingung (9), wobei auf der rechten Seite die Transformationsbeziehungen für die Schlange-Größen eingesetzt werden.

²² Aus geometrischer Sicht entspricht dies der Einführung neuer Koordinaten für den Eingang in Abhängigkeit vom Zustand.

Entwurf eines invarianten Reglers mit Gleitregime

Nachdem die Frage nach der Existenz einer zur angesetzten Symmetrie passenden Rückführung positiv beantwortet wurde, kann auf der Grundlage eines invarianten Fehlers eine invariante Rückführung entworfen werden. Wie zuvor skizziert, ist $y = p$ ein flacher Ausgang, der verträglich mit der Symmetriegruppe ist. Das in Abschnitt 3 skizzierte Normalisierungsverfahren liefert für den flachen Ausgang mit der Normalisierung für einen nominellen Arbeitspunkt p^0 und $c^1 = 1$

$$\tilde{y}_d = \rho(y_d, a) = ap^0 \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow a = \gamma(p^0) = \frac{1}{p^0}.$$

Gemäß Gleichung (12) ergibt sich hieraus der invariante Fehler

$$e = \rho(y, \gamma(p^0)) - \rho(p^0, \gamma(p^0)) = \frac{p}{p^0} - 1.$$

Aufgrund der Flachheitseigenschaft könnte z. B. durch exakte Linearisierung eine invariante stabilisierende Rückführung entworfen werden, vgl. z. B. [11]. Im Folgenden soll jedoch gezeigt werden, wie die Verwendung invarianter Fehler in Verbindung mit anderen Entwurfsansätzen auf invariante Rückführungen führt. Hierzu sei angemerkt, dass das Reaktormodell (13) in einer rückgekoppelten Form²³ vorliegt [17], so dass ein Entwurf mittels der sukzessiven Berücksichtigung von Integratoren („backstepping“) für einen Regler mit Gleitregime („sliding mode“) durchgeführt werden soll. Für einen Backstepping-Entwurf ohne Gleitregime sei auf [5] verwiesen. Da die Zustandsgrößen p, b, s für den Betrieb des Reaktors größer Null angenommen werden, ist ein Wechsel auf eine logarithmische Darstellung möglich. Hierzu wird zunächst die Gleichung (13a) unter der Transformation $\bar{p} = \ln p$ betrachtet:

$$\dot{\bar{p}} = -D + \nu(b). \tag{14}$$

Aus der oben angegebenen Normalisierung folgt der invariante Fehler $e_{\bar{p}} = \ln p/p^0 = \ln p - \ln p^0$. Durch $V_1 = \frac{1}{2}e_{\bar{p}}^2$ ist eine Ljapunov-Funktion für das Teilsystem (14) mit der durch

$$L_{f_1} V_1 = e_{\bar{p}} (-D + \nu(b)) = -k_p e_{\bar{p}} \tanh e_{\bar{p}}, \tag{15}$$

mit $k_p > 0$ definierten Rückführung

$$b_{\text{ref}}(p) = L \frac{D - k_p \tanh(\ln p - \ln p^0)}{\nu_m - D + k_p \tanh(\ln p - \ln p^0)}$$

gegeben. Die rechte Seite von (15) wurde beschränkt, um $\nu(b) \in [0, \nu_m]$ Rechnung zu tragen. Der Reglerkoeffizient k_p muss dabei in Übereinstimmung mit der Forderung

$$0 \leq D - k_p \tanh(e_{\bar{p}}) < \nu_m \Rightarrow k_p < \nu_m - D \wedge k_p \leq D$$

gewählt werden. Aus der Gleichung für b_{ref} liest man ab, dass die berechnete Rückführung invariant unter der Skalierung ist.

²³ In der Literatur zu Regelungen mit Gleitregime findet sich auch die Bezeichnung „regular form“.

Für den ersten Backstepping-Schritt wird nun Gleichung (13b) in logarithmischer Darstellung betrachtet, d. h., aus $\bar{b} = \ln b$ folgt

$$\dot{\bar{b}} = \mu(s) - D - \alpha \bar{\nu}(\bar{b}) e^{\bar{p} - \bar{b}}, \tag{16}$$

wobei $\bar{\nu}(\bar{b}) = \nu(b)|_{b=e^{\bar{b}}}$ gesetzt wird. Wie zuvor ist durch $e_{\bar{b}} = \ln b - \ln b_{\text{ref}} = \bar{b} - \bar{b}_{\text{ref}}$ ein invarianter Fehler gegeben – b ist invariant bzgl. der Skalierung. Die Betrachtung der Lie-Ableitung der Funktion $V_2 = V_1 + \frac{1}{2}e_{\bar{b}}^2$ längs des Flusses des Teilsystems $f_{[2]} = (f_1, f_2)$ liefert die Bedingung

$$\begin{aligned} L_{f_{[2]}} V_2 &= e_{\bar{p}} (\bar{\nu}(\bar{b}_{\text{ref}} + e_{\bar{b}}) - D) \\ &\quad + e_{\bar{b}} (\mu(s) - D - \alpha \bar{\nu}(\bar{b}) e^{\bar{p} - \bar{b}} - L_{f_1} \bar{b}_{\text{ref}}) \\ &= -k_p e_{\bar{p}} \tanh(e_{\bar{p}}) - k_b e_{\bar{b}} \tanh(e_{\bar{b}}). \end{aligned} \tag{17}$$

Durch Umschreiben von $\bar{\nu}(\bar{b}_{\text{ref}} + e_{\bar{b}})$ in

$$\begin{aligned} \bar{\nu}(\bar{b}_{\text{ref}} + e_{\bar{b}}) &= \bar{\nu}(\bar{b}_{\text{ref}}) + \nu_m \frac{L e^{\bar{b}_{\text{ref}}} (e^{e_{\bar{b}}} - 1)}{(L + e^{\bar{b}_{\text{ref}}})(L + e^{\bar{b}_{\text{ref}} + e_{\bar{b}}})} \\ &= \bar{\nu}(\bar{b}_{\text{ref}}) + e_{\bar{b}} R(\bar{b}_{\text{ref}}, e_{\bar{b}}) \end{aligned}$$

und Einsetzen in (17) entsteht eine Bestimmungsgleichung für die Referenz s_{ref} der Substratkonzentration s :

$$\begin{aligned} \mu(s_{\text{ref}}) &= D + \alpha \bar{\nu}(\bar{b}) e^{\bar{p} - \bar{b}} - k_b \tanh(e_{\bar{b}}) \\ &\quad - e_{\bar{p}} R(\bar{b}_{\text{ref}}, e_{\bar{b}}) + L_{f_1} \bar{b}_{\text{ref}}(p, b). \end{aligned}$$

Da μ nur Werte aus einem Intervall $[0, \mu_m]$ annehmen kann, ist $k_b > 0$ gemäß der Ungleichungen

$$k_b \leq D + \alpha \bar{\nu}(\bar{b}) e^{\bar{p} - \bar{b}} - e_{\bar{p}} R(\bar{b}_{\text{ref}}, e_{\bar{b}}) + L_{f_1} \bar{b}_{\text{ref}} < \mu_m - k_b$$

zu wählen.

Für den nächsten Schritt ist ein invarianter Folgefehler für s bezüglich der Referenz s_{ref} zu verwenden, wobei eine mögliche Wahl gemäß Gleichung (12) durch

$$e_{\bar{s}} = \ln(\sigma(p, b, s, 1/p^0)) - \ln(\sigma(p, b, s_{\text{ref}}, 1/p^0)) = \eta_s(p, b, s)$$

gegeben ist. Mittels $e_{\bar{s}}$ kann nun eine invariante Schaltfläche

$$X \supset S = \{(p, b, s) \in X : \eta_s(p, b, s) = 0\}$$

definiert werden, wobei durch die vorangegangenen Entwurfsschritte für $e_{\bar{s}} \equiv 0$ (Bewegung auf der Gleitebene) die asymptotische Stabilität um den Arbeitspunkt gesichert ist (Realisierbarkeit der Rückführungen vorausgesetzt).

Der Eingang s_F kann keine negativen Werte annehmen, und es soll angenommen werden, dass über den Zulauf lediglich zwischen einer neutralen Flüssigkeit ($s_F = 0$) und einem Substrat-Konzentrat ($s_F = \hat{s}_F = \text{const.}$) umgeschaltet werden kann. Die Betrachtung der partiellen Ableitungen von η_s nach s ergibt mit $\partial s_{\text{ref}}/\partial s = 0$

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial s} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial s} = \frac{1}{\sigma} \frac{K^2 p_0^2 \mu_m^2 (L^2 + 2Lb + b^2)}{((K + s)(p_0 - 1)\nu_m p \alpha + (L + b)p_0 \mu_m K)^2}$$

und zeigt, dass η_s monoton wachsend bzgl. s ist. Es wird daher für s_F die folgende Rückführung angesetzt

$$s_F = \frac{\hat{s}_F}{2} (1 - \text{sgn } \eta_s(p, b, s)). \quad (18)$$

Es bleibt zu untersuchen, welchen Einzugsbereich die Schaltebene S durch diese Rückführung erhält. Zu diesem Zweck wird zunächst die Lie-Ableitung der Funktion $V_{\eta_s} = \frac{1}{2}\eta_s^2$

$$L_f V_{\eta_s} = \eta_s \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial p} p (v(b) - D) + \frac{\partial \eta_s}{\partial b} ((\mu(s) - D) b - \alpha p v(b)) + \frac{\partial \eta_s}{\partial s} \left(D \left(\frac{\hat{s}_F}{2} (1 - \text{sgn } \eta_s) - s \right) - \beta \mu(s) b \right) \right)$$

berechnet. Unter Berücksichtigung des Vorzeichens von η_s ergeben sich die zwei Bedingungen

$$\begin{aligned} \eta_s > 0 : L_f \eta_s|_{s_F=0} < 0 \\ \eta_s < 0 : L_f \eta_s|_{s_F=\hat{s}_F} > 0, \end{aligned}$$

die den Einzugsbereich der Schaltebene festlegen. Da die Lie-Ableitung $L_f \eta_s|_{s_F=0}$ Lipschitz-stetig um die Arbeitspunkte ist und $L_f \eta_s = 0$ für ein $0 < s_{F,0} < \hat{s}_F$ in jedem Arbeitspunkt gilt, gibt es um jeden Arbeitspunkt einen Radius $r > 0$ mit

$$\left. \begin{aligned} L_f \eta_s|_{s_F=\hat{s}_F} > 0 \\ L_f \eta_s|_{s_F=0} < 0 \end{aligned} \right\} \forall |(p-p^0, b-b^0, s-s^0)| < r.$$

Dabei bezeichnen p^0 , b^0 und s^0 die Konzentrationen in der Gleichgewichtslage. Aus der Existenz eines solchen Radius r folgt, dass die Schaltebene in einer r -Umgebung eines Arbeitspunkts attraktiv ist. Für eine gegebene Menge von Arbeitspunkten kann diese z. B. numerisch über die oben angegebene Bedingungen abgeschätzt werden.

Simulation

Für die Simulation wurden folgende Werte für die Parameter gewählt:

$$\begin{aligned} \mu_m = 0,4, \quad K = 4, \quad v_m = 0,6, \quad L = 3, \quad \beta = 0,5, \\ \alpha = 0,6, \quad D = 0,25, \quad \hat{s}_F = 25, \quad k_p = 0,075, \quad k_b = 0,075. \end{aligned}$$

Dabei wurde davon ausgegangen, dass die interessierenden Arbeitspunkte über die Skalierung

$$p_0(a) = 0,3a, \quad a \in [1, 2],$$

ineinander überführt werden können. In Bild 6 sind drei exemplarische Trajektorien für drei Werte des Gruppenparameters a und den nominellen Arbeitspunkt $p^0 = 0,3$ zusammen mit der jeweiligen Schaltebene dargestellt. Der Anfangswert wurde hierbei aus einer Störung des nominellen Arbeitspunkts (p^0, b^0, s^0) um 8 Prozent und Anwendung der Symmetrietransformation erhalten. Die dargestellte Linie verbindet die

Arbeitspunkte gemäß der durch die Skalierung von p induzierten Transformation. Die korrespondierenden Verläufe der Zustandsgrößen p, b, s und der Fehlervariablen $e_{\bar{p}}, e_{\bar{b}}, e_{\bar{s}}$ zeigt Bild 7. Die entworfenen Rückführung für die Zulaufkonzentration (18) führt auf eine invariante Fehlerdynamik auf der Schaltebene. Da die Schaltebene für unterschiedliche Anfangswerte zu unterschiedlichen Zeitpunkten erreicht wird, liegen die Verläufe der Fehlervariablen nicht identisch übereinander.

Bemerkung 3. Soll zusätzlich auch die Fehlerdynamik für $e_{\bar{s}}$ invariant bezüglich Arbeitspunktwechseln sein, so dass die Schaltebene jeweils zum selben Zeitpunkt erreicht wird, muss die Rückführung derart gewählt werden, dass die Symmetriebedingung (9) auch für die Fehlerdifferentialgleichung

$$\dot{e}_{\bar{s}} = \frac{\partial \eta_s}{\partial p} f_1 + \frac{\partial \eta_s}{\partial b} f_2 + \frac{\partial \eta_s}{\partial s} (D(s_F - s) - \beta \mu(s) b)$$

erfüllt ist. Eine Möglichkeit besteht in der Wahl der Rückführung

$$s_F = s + \frac{\beta}{D} \mu(s) b - \left(D \frac{\partial \eta_s}{\partial s} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial p} f_1 + \frac{\partial \eta_s}{\partial b} f_2 - \hat{s}_F \text{sgn } e_{\bar{s}} \right),$$

welche auf die Fehlerdynamik

$$\dot{e}_{\bar{s}} = -\hat{s}_F \text{sgn } e_{\bar{s}}$$

führt. Im Unterschied zu der zuvor angesetzten Rückführung (18) handelt es sich nun um eine Kombination aus

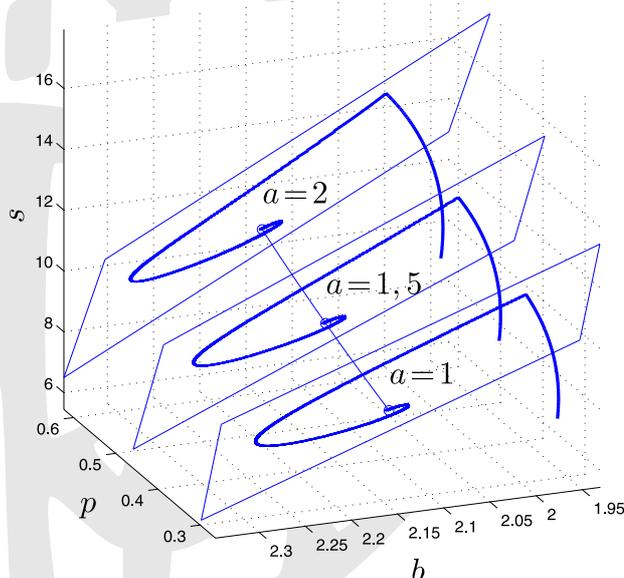


Bild 6 Verlauf dreier Trajektorien für transformierten Anfangswert und Schaltebenen für $a = 1, a = 1,5$ und $a = 2$ sowie Menge der Arbeitspunkte (Linie).

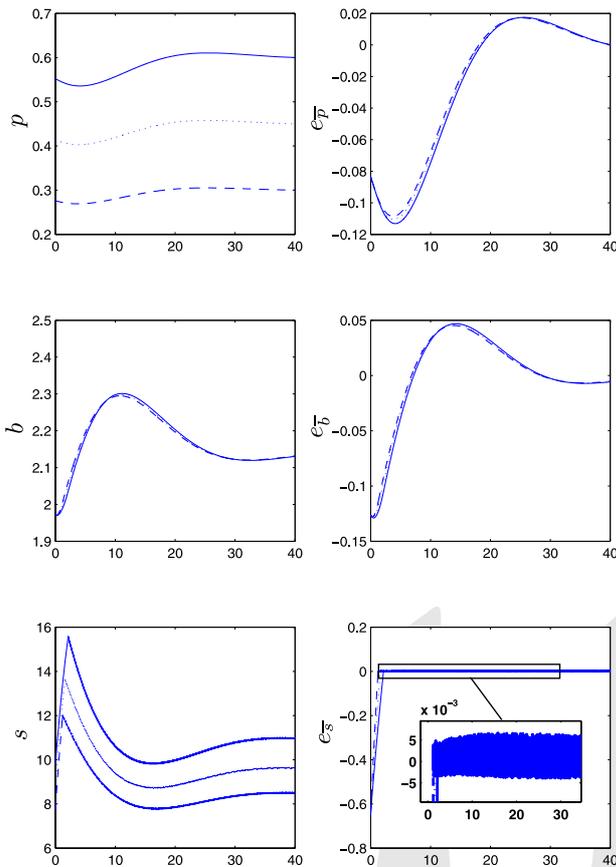


Bild 7 Verlauf der Zustandsgrößen p , b , s sowie der (invarianten) Fehler e_p , e_b , e_s für $a = 1$ (strichliert), $a = 1,5$ (gepunktet) und $a = 2$ (durchgezogen).

einem schaltenden und einem kontinuierlichen Anteil. Zudem ist der Koeffizient $\hat{s}_F > 0$ des schaltenden Anteils derart zu wählen, dass die Rückführung im gesamten Arbeitsbereich gültig ist.

5 Schlussfolgerung

Transformationen der Systemgrößen, bezüglich deren Wirkung die Systemgleichungen forminvariant sind, heißen Symmetrien des Systems. Im Allgemeinen werden die Symmetrieeigenschaften durch Rückführungen verändert, so dass Symmetrien durch eine Folgeregelung verloren gehen können. Abhilfe schafft der Entwurf invarianter Folgeregler auf der Grundlage invarianter Folgefehler. Für das Beispiel des kinematischen Fahrzeugs gelang die Konstruktion invarianter Fehler anhand von geometrischen Überlegungen. Wie das Beispiel des Bioreaktors zeigt, kann es darüber hinaus für die Umsetzung von Entwurfszielen nützlich sein, Symmetrieeigenschaften durch geeignete Rückführungen in das System einzubringen.

Danksagung

Die Arbeit des ersten Autors wurde durch ein Landesgraduiertenstipendium des Freistaats Sachsen gefördert.

Literatur

- [1] N. Aghannan, P. Rouchon: On invariant asymptotic observers. Proc. 41st IEEE Conference on Decision and Control, Las Vegas, Nevada, S. 1479–1484, 2002.
- [2] A. V. Bocharov, V. N. Chetverikov, S. V. Duzhin u. a.: Symmetries and conservation laws for differential equations of mathematical physics. Amer. Math. Soc., Translations of Mathematical Monographs, Vol. 182, 1999.
- [3] W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie, Band 1, Dover, 1945.
- [4] S. Bonnabel, P. Martin, P. Rouchon: Symmetry-preserving observers. IEEE Trans. Automat. Control, 53:2514–2536, 2008.
- [5] C. Collon, J. Rudolph: Set-point invariant control design by integrator backstepping. Prepr. 8th IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems, Bologna, S. 1163–1168, 2010.
- [6] J. W. Grizzle, S. I. Marcus: The structure of nonlinear control systems possessing symmetries, IEEE Trans. Automat. Control, 30:248–258, 1985.
- [7] D. Guillaume, P. Rouchon: Observation and control of a simplified car, Proc. IFAC Motion Control, Grenoble, S. 63–67, 1998.
- [8] P. Irle, L. Gröll, M. Werling: Zwei Zugänge zur Projektion auf 2d-Kurven für die Bahnregelung autonomer Fahrzeuge. at – Automatisierungstechnik, 57:403–410, 2009.
- [9] A. N. Kanatnikov, A. P. Krishchenko: Symmetries and decomposition of nonlinear systems, Differential Equations, 30:1735–1745, 1994.
- [10] L. Michaelis, M. Menten: Die Kinetik der Invertin-Wirkung. Biochemische Zeitung, 49:333–369, 1913.
- [11] Ph. Martin, P. Rouchon, J. Rudolph: Invariant tracking, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, 10:1–13, 2004.
- [12] P. J. Olver: Applications of Lie groups to Differential Equations, 2. Auflage, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [13] L. V. Ovsianikov: Group analysis of differential equations. Academic Press, 1982.
- [14] S. Pavlou: Dynamics of a chemostat in which one microbial population feeds on another. Biotechnol. Bioeng., 27:1525–1532, 1985.
- [15] J. Rudolph, R. Fröhlich: Invariant tracking for planar rigid body dynamics, Proc. Appl. Math. Mech., 2:9–12, 2003.
- [16] J. Rudolph: Examples for the use of invariant errors in nonlinear control. Proc. of the 48th International Scientific Colloquium (IWK), Technische Universität Ilmenau, 2003.
- [17] J. Rudolph: Rekursiver Entwurf stabiler Regelkreise durch sukzessive Berücksichtigung von Integratoren und quasi-statische Rückführungen, at – Automatisierungstechnik, 53:389–399, 2005.
- [18] P. Rouchon, J. Rudolph: Invariant tracking and stabilization, In: Aeyels, D.; Lamnabhi-Lagarrigue, F.; van der Schaft, A. (Hg.): Stability and Stabilization of Nonlinear Systems, Kap. 14, S. 261–273, Springer-Verlag 1999.
- [19] R. Rothfuß, J. Rudolph, M. Zeitz: Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme. at – Automatisierungstechnik, 45:517–525, 1997.
- [20] H. Stephani: Differential equations – Their solution using symmetries, Cambridge University Press, 1989.
- [21] A. M. Vinogradov: Local symmetries and conservation laws, Acta Applicandae Mathematicae, 2:21–78, 1984.
- [22] F. W. Warner: Foundations of differentiable manifolds and Lie groups, Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [23] C. Woernle: Flatness-based control of a nonholonomic mobile platform, ZAMM, Suppl. 1, 78:43–46, 1998.
- [24] J. Zhao, S. Zhang: Symmetries and realization and nonlinear systems, Proc. 31st IEEE Conference on Decision and Control, Tucson, Arizona, S. 86–89, 1992.

Manuskripteingang: 23. Mai 2011



Dipl.-Ing. Carsten Collon ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik der Universität des Saarlandes. Hauptarbeitsgebiete: Berücksichtigung von Symmetrien nichtlinearer Systeme beim Reglerentwurf.

Adresse: Universität des Saarlandes, Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik, 66123 Saarbrücken, E-Mail: carsten.collon@gmail.com



Prof. Dr.-Ing. habil. Joachim Rudolph, Hauptarbeitsgebiete: Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Regelstrecken, algebraische Methoden, lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme; Anwendungen in der Mechatronik und der Verfahrenstechnik.

Adresse: Universität des Saarlandes, Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik, 66123 Saarbrücken, E-Mail: j.rudolph@lsr.uni-saarland.de



Java Schritt für Schritt



Rolf Dornberger, Rainer Telesko

Java-Training zur Objektorientierten Programmierung

Leitfaden für Lehre, Unterricht und Selbststudium

2010 | 350 S. | Broschur | € 39,80 | ISBN 978-3-486-58739-5

Dieses verständlich geschriebene Buch vermittelt fundiertes Wissen über Java und Objektorientierte Programmierung bis hin zur Vertiefung komplexerer Anwendungen. Jedes Kapitel schließt mit Lernzielen und Aufgaben, die zur Wiederholung bzw. Vertiefung des Stoffinhaltes dienen.

Die Autoren legen Wert darauf, Programmieren nicht nur als das Schreiben syntaktisch korrekter Programme zu lehren, sondern auch die Philosophie der Programmierung und den Einstieg in die Objektorientiertheit zu vermitteln.

Schwerpunkte sind die Themen algorithmisches Denken, systematischer Programmentwurf und der Einsatz moderner Softwarekonzepte. Elementare Konzepte von Programmiersprachen werden unter Verwendung von Java veranschaulicht und einfache Entwicklungswerkzeuge für Java vorgestellt. Thematisiert werden auch Grundkonzepte der Objektorientierung und der Einsatz von Java für komplexere Anwendungen.

Das Buch richtet sich an Programmierneinsteiger und ist geeignet für die Lehre an Hochschulen (in der Wirtschaftsinformatik, Informatik, dem Ingenieurwesen o. Ä.), aber auch für den Informatikunterricht in der Oberstufe.

Bestellen Sie in Ihrer Fachbuchhandlung oder direkt bei uns:
Tel: 089/45051-248, Fax: 089/45051-333, verkauf@oldenbourg.de, www.oldenbourg-wissenschaftsverlag.de