

Algebraische Methoden zur Parameteridentifikation für das schwere Seil

Algebraic Identification of Heavy Rope Parameters

Nicole Gehring, Universität des Saarlandes, Saarbrücken,
Torsten Knüppel, Technische Universität Dresden,
Joachim Rudolph, Universität des Saarlandes, Saarbrücken,
Frank Woittenek, Technische Universität Dresden

Zusammenfassung Vorgestellt wird eine Methode zur Identifikation von Parameter eines linearen, verteiltparametrischen Modells für das schwere Seil unter ausschließlicher Verwendung gemessener Randgrößen. Die Methode basiert auf der Operator Darstellung der Lösung des zugehörigen Randwertproblems. Aus dieser erhält man durch sukzessives Falten der gemessenen Trajektorien ein System algebraischer Gleichungen in den gesuchten Parametern. Simulationsergebnisse illustrieren

den Ansatz. **Summary** A method is presented that allows for the identification of parameters in a linear infinite-dimensional model for the heavy rope using only boundary measurements. The approach relies on an operational representation of the solution of the corresponding boundary value problem. A system of algebraic equations in the parameters is generated by repeated convolution of the measured trajectories. Simulations illustrate the results.

Schlagwörter Schweres Seil, Parameteridentifikation, partielle Differentialgleichungen, Systeme unendlicher Dimension, Operatorenrechnung **Keywords** Heavy rope, parameter identification, partial differential equations, infinite dimensional systems, operational calculus

1 Einleitung

Die bekannten Methoden zur Identifikation von Parametern in Systemen unendlicher Dimension, die durch Totzeitgleichungen oder partielle Differentialgleichungen (Dgl.) beschrieben werden, basieren häufig auf endlichdimensionalen Ersatzmodellen. Für die letztere Systemklasse stehen eine Vielzahl an Methoden zur Parameteridentifikation zur Verfügung. Geeignete Ersatzmodelle erhält man beispielsweise durch Diskretisierung der Ortsvariable oder eine modale Entwicklung der Lösung¹.

Derartige Approximationen sind bei dem hier vorgestellten algebraischen Ansatz nicht erforderlich. Grundsätzlich wird bei dieser Methode durch den Einsatz des Operatorenkalküls von Mikusiński (vgl. [7]) eine partielle Dgl. als gewöhnliche Dgl. aufgefasst, in der die Systemgrößen und ihre Ableitungen durch Operatoren oder Operatorfunktionen repräsentiert werden². Im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall treten in diesen gewöhnlichen Dgl. spezielle Operatoren auf, beispielsweise der Totzeitoperator $e^{-\tau s}$. Diese können jedoch ausgehend von der Kenntnis der Dgl. bzgl. s , der sie genügen, elimi-

¹ Eine nicht mehr ganz aktuelle jedoch sehr gelungene Übersicht findet sich in [9].

² Im Anhang von [10] finden sich einige grundlegende Anmerkungen zur Operatorenrechnung.

niert werden. Dadurch ergeben sich Gleichungen, die im Zeitbereich einfach zu interpretieren sind. Letztlich müssen zur Berechnung der Parameter Faltungprodukte der gemessenen Trajektorien ausgewertet werden. Als zusätzliche Schwierigkeit kommt hinzu, dass die zu identifizierenden Parameter in polynomialer Form auftreten können.

Das oben beschriebene Vorgehen wurde in [2; 3; 10] auf lineare Totzeitsysteme angewandt. Zwei der Autoren haben darüber hinaus in [10] eine allgemeine Methodik zur Parameteridentifikation für lineare partielle Dgl. zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten vorgestellt. In [11] wurden mit Hilfe der algebraischen Methoden die Parameter eines Wärmetauschers bestimmt.

In diesem Beitrag soll am Beispiel der ebenen Bewegung eines schweren Seils, die durch eine partielle Dgl. mit ortsabhängigen Koeffizienten beschrieben wird und damit nicht in die in [10] betrachtete Systemklasse fällt, illustriert werden, dass sich die algebraische Methode auch zur Parameteridentifikation für derartige Probleme eignet. Die in der Lösung des Randwertproblems auftretenden Bessel-Funktionen können dabei ähnlich wie der Totzeitoperator eliminiert werden. Ausgehend von der Kenntnis einer geeigneten Anzahl von Messgrößen ergibt sich eine Gleichung, die polynomial in den zu identifizierenden Parametern ist und außerdem Faltungsprodukte der Messgrößen enthält.

Zur Veranschaulichung des Ansatzes wird das einfache Totzeitsystem aus [10] erneut aufgegriffen. Setzt man darin $b = 1$, so gilt

$$\dot{y}(t) = ay(t) + u(t - \tau) \tag{1}$$

mit dem um die Totzeit $\tau > 0$ verzögerten Eingang u . Es wird davon ausgegangen, dass die homogenen Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \quad u(t) = 0, \quad t \in [-\tau, 0] \tag{2}$$

gelten.

Um der Frage nachzugehen, ob und wie die konstanten Parameter a und τ aus den Trajektorien $t \mapsto u(t)$ und $t \mapsto y(t)$ bestimmt werden können, werden Operatoren eingeführt. Unter Berücksichtigung von (2) geht (1) über in³

$$(s - a)\hat{y} = \hat{u} e^{-\tau s}. \tag{3}$$

Da der Totzeitoperator $e^{-\tau s}$ einer (bekannten) Dgl. bzgl. s genügt,

$$\left(\frac{d}{ds} + \tau\right) e^{-\tau s} = 0, \tag{4}$$

wird es im Folgenden möglich sein, eine algebraische Beziehung für die Parameter zu ermitteln. Bei Anwendung

³ Alle Systemgrößen werden zu Operatoren oder Operatorfunktionen und sind durch Dächer gekennzeichnet.

des Operators $\frac{d}{ds} + \tau$ auf die nach dem Totzeitoperator $e^{-\tau s}$ aufgelöste Gleichung (3) kann dieser eliminiert werden:

$$\left(\frac{d}{ds} + \tau\right) \frac{(s - a)\hat{y}}{\hat{u}} = 0. \tag{5}$$

Nach elementaren Umformungen ergibt sich daraus

$$(1 - as^{-1})(\hat{u}\hat{y}' - \hat{u}'\hat{y}) + s^{-1}\hat{u}\hat{y} = -\tau(1 - as^{-1})\hat{u}\hat{y}, \tag{6}$$

wobei \hat{u}' und \hat{y}' die Ableitungen von \hat{u} und \hat{y} nach s bezeichnen. Durch Multiplikation mit s^{-1} wurde bereits sichergestellt, dass keine positiven Potenzen von s auftreten. Folglich werden keine Ableitungen der Systemgrößen u und y bei der Darstellung dieser Gleichung im Zeitbereich auftreten (vgl. [7] für Korrespondenzen). Man erhält

$$a \int_0^t v_1(\sigma) d\sigma - a\tau \int_0^t v_2(\sigma) d\sigma + \tau v_2(t) = v_1(t) - \int_0^t v_2(\sigma) d\sigma \tag{7}$$

mit

$$v_1 = u * \bar{t}y - \bar{t}u * y \tag{8a}$$

$$v_2 = u * y \tag{8b}$$

und der identischen Abbildung $\bar{t}: t \mapsto t$. Dabei bezeichnet $u * y$ die Faltung⁴ von u und y . Da (7) nichtlinear in den Parametern a und τ ist, muss zu deren Berechnung ein nichtlineares Problem gelöst werden. Alternativ können a , $a\tau$ und τ wie in [10] oder [2] als unabhängige Parameter aufgefasst werden, die sich als Lösung eines linearen Gleichungssystems ergeben. Ein solches Gleichungssystem lässt sich beispielsweise durch sukzessive Integration von (7) gewinnen (vgl. [5]). Die Berechnung der numerischen Lösung wird in Abschnitt 4.2 an einem Beispiel diskutiert.

Im Folgenden wird zunächst das Modell des schweren Seils angegeben. Anschließend wird die Parameteridentifikation für verschiedene Systemkonfigurationen, d. h. mit und ohne Last am unteren Seilende, betrachtet. In beiden Fällen dienen Simulationsergebnisse zur Veranschaulichung der Ergebnisse.

2 Modell des schweren Seils

Das Modell des schweren Seils stellt im regelungstechnischen Kontext ein klassisches Beispiel für ein System dar, dessen Dynamik durch eine partielle Dgl. mit ortsabhängigen Koeffizienten beschrieben wird (siehe z. B. [6; 8]).

⁴ Bei expliziter Angabe der Faltungsintegrale in (8) folgt

$$v_1(t) = \int_0^t \sigma(u(t - \sigma)y(\sigma) - u(\sigma)y(t - \sigma)) d\sigma$$

$$v_2(t) = \int_0^t u(\sigma)y(t - \sigma) d\sigma.$$

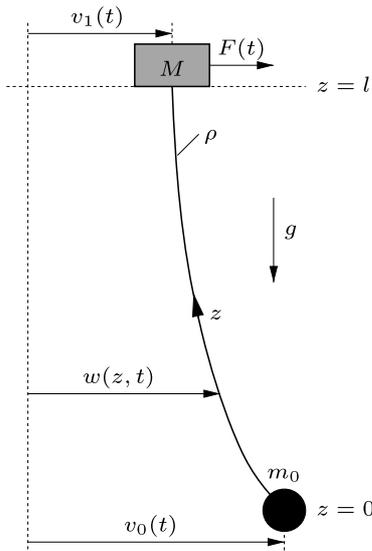


Bild 1 Skizze des schweren Seils.

Hier wird ein homogenes Seil der Länge l mit konstanter Querschnittsfläche und der Liniendichte ρ betrachtet, das sich im Schwerfeld der Erde bewegt (vgl. Skizze in Bild 1). Mit der krummlinigen Koordinate z entlang des Seils bezeichnet $w(z, t)$ die horizontale Position eines Punktes relativ zu einer festen vertikalen Referenz zum Zeitpunkt t . Am unteren Ende des Seils, bei $z = 0$, kann eine Last der Masse m_0 befestigt sein. Für kleine Auslenkungen wird das dynamische Verhalten durch⁵

$$(Pw_z)_z - \rho w_{tt} = 0, \quad z \in [0, l], \quad t \geq 0, \quad (9)$$

beschrieben, wobei

$$P(z) = g(\rho z + m_0) \quad (10)$$

die Kraft im Seil und g die Erdbeschleunigung bezeichnen.

Das obere Ende des Seils ist an einem horizontal beweglichen Wagen der Masse M befestigt, an dem parallel zur Bewegungsrichtung eine Kraft F angreift. Die horizontale Position $w(l, t) = v_1(t)$ des Wagens genügt der Bewegungsgleichung

$$P(l)w_z(l, t) + Mw_{tt}(l, t) = F(t). \quad (11)$$

Entsprechend führt eine Kräftebilanz am unteren Seilende auf

$$P(0)w_z(0, t) - m_0 w_{tt}(0, t) = 0. \quad (12)$$

Die horizontale Position $w(0, t)$ an diesem Ende wird mit $v_0(t)$ bezeichnet. Das Modell wird durch homogene Anfangsbedingungen

$$w(z, 0) = 0, \quad w_t(z, 0) = 0 \quad (13)$$

vervollständigt.

⁵ Es kennzeichnen w_z die partielle Ableitung von w nach dem Ort z und w_t jene nach der Zeit t .

Sowohl Mikusiński's Operatorrechnung (vgl. [7]) als auch die Laplace-Transformation können verwendet werden, um das zugehörige Randwertproblem zu lösen. Im Fall $m_0 \neq 0$ gelten

$$0 = g(\rho z + m_0)\hat{w}_{zz}(z) + g\rho\hat{w}_z(z) - \rho s^2\hat{w}(z) \quad (14a)$$

$$\hat{F} = P(l)\hat{w}_z(l) + Ms^2\hat{w}(l) \quad (14b)$$

$$0 = P(0)\hat{w}_z(0) - m_0s^2\hat{w}(0). \quad (14c)$$

Durch Anwendung der klassischen Koordinatentransformation (vgl. [8])

$$x = f(z) = 2s\sqrt{\frac{z}{g} + \frac{m_0}{g\rho}} \quad (15)$$

kann (14a) in die modifizierte Bessel-Gleichung nullter Ordnung überführt werden:

$$x^2\bar{w}_{xx}(x) + x\bar{w}_x(x) - x^2\bar{w}(x) = 0. \quad (16)$$

In deren bekannter Lösung

$$\bar{w}(x) = \hat{C}_1 I_0(x) + \hat{C}_2 K_0(x), \quad (17)$$

für $x \neq 0$, bezeichnen I_0 und K_0 die modifizierten Bessel-Funktionen nullter Ordnung und erster bzw. zweiter Art. Die Operatoren \hat{C}_1 und \hat{C}_2 hängen von den Randbedingungen (14b) und (14c) ab. In den ursprünglichen Koordinaten erhält man damit

$$\hat{w}(z) = \hat{C}_1 I_0(f(z)) + \hat{C}_2 K_0(f(z)). \quad (18)$$

Die Dgl. (14a) mit der allgemeinen Lösung (18) stellt die Grundlage für die Parameteridentifikation dar, die im Folgenden diskutiert wird. Da der Fall ohne Last (am unteren Seilende) bedeutend einfacher ist, wird er zuerst diskutiert.

3 Identifikation im Fall ohne Last

Hängt bei $z = 0$ keine Last am Seil, d. h. $m_0 = 0$, so ergibt sich $\hat{C}_2 = 0$ durch Auswertung der Lösung (18). Andernfalls wäre die Auslenkung $\hat{w}(0)$ unendlich groß. Die zweite Randbedingung (14c) wird trivial. Allerdings folgt aus (18) unmittelbar $w_z(0, t) = 0$ bzw.

$$\hat{w}_z(0) = 0. \quad (19)$$

Da in diesem Fall sowohl die Dgl. (14a) als auch die Randbedingungen (14b) und (19) nicht von der Liniendichte ρ abhängen, ist dieser Parameter nicht identifizierbar.

Die Parameteridentifikation erfordert die Messung von mindestens zwei Größen am Seil. Der Einfachheit halber wird angenommen, es werde die horizontale Position an beiden Enden gemessen, d. h. die Randgrößen⁶ $\hat{w}(0)$ und $\hat{w}(l)$. Da somit die Position des Wagens bekannt ist, wird der Identifikationsalgorithmus unabhängig von der zu-

⁶ Die Auslenkung bei $z = 0$ könnte beispielsweise optisch gemessen werden. Alternativ könnte die Beschleunigung \ddot{v}_0 gemessen werden, die (bei homogenen Anfangsbedingungen) dem Operator $s^2\hat{v}_0$ entspricht.

gehörigen Randbedingung (14b) sein, womit auch die Masse M des Wagens nicht identifizierbar ist (vgl. Bemerkung 2).

Ersetzt man \hat{w} in den Definitionen $\hat{w}(0) = \hat{v}_0$ und $\hat{w}(l) = \hat{v}_1$ der Messgrößen mit Hilfe des Lösungsansatzes (18), so ergibt sich wegen $\hat{C}_2 = 0$ der Zusammenhang

$$\hat{v}_1 = \hat{v}_0 I_0(\alpha s), \quad (20)$$

wobei zur Vereinfachung der Notation der Parameter

$$\alpha = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \quad (21)$$

eingeführt wurde.

Unter Verwendung der bekannten Dgln. für die Bessel-Funktionen erster Art (vgl. (51) im Anhang) folgen durch wiederholte Anwendung von $\frac{d}{ds}$ auf (20)

$$\hat{v}'_1 = \hat{v}'_0 I_0(\alpha s) + \alpha \hat{v}_0 I_1(\alpha s) \quad (22a)$$

$$\hat{v}''_1 = (\hat{v}''_0 + \alpha^2 \hat{v}_0) I_0(\alpha s) + \alpha (2\hat{v}'_0 - s^{-1} \hat{v}_0) I_1(\alpha s). \quad (22b)$$

Zusammen mit (20) lassen sich die Bessel-Funktionen I_0 und I_1 leicht eliminieren, und es ergibt sich

$$\hat{y}_1 = \alpha^2 \hat{y}_2 \quad (23)$$

mit

$$\hat{y}_1 = \hat{v}_0 (\hat{v}_0 \hat{v}''_1 - \hat{v}''_0 \hat{v}_1) + (s^{-1} \hat{v}_0 - 2\hat{v}'_0) (\hat{v}_0 \hat{v}'_1 - \hat{v}'_0 \hat{v}_1) \quad (24a)$$

$$\hat{y}_2 = \hat{v}_0 \hat{v}_0 \hat{v}_1. \quad (24b)$$

Bei (23) handelt es sich offensichtlich um ein in α^2 parameterlineares Problem, wobei der Parameter aus dem Quotienten der Signale y_1 und y_2 berechnet werden kann. Diese sind entsprechend (24) im Zeitbereich durch

$$y_1(t) = (v_0 * v_0 * \bar{t}^2 v_1)(t) - (v_0 * \bar{t}^2 v_0 * v_1)(t) - 2(\bar{t} v_0 * v_0 * \bar{t} v_1)(t) + 2(\bar{t} v_0 * \bar{t} v_0 * v_1)(t) + \int_0^t (v_0 * \bar{t} v_0 * v_1 - v_0 * v_0 * \bar{t} v_1)(\sigma) d\sigma \quad (25a)$$

$$y_2(t) = (v_0 * v_0 * v_1)(t) \quad (25b)$$

gegeben. Erneut ist $\bar{t}: t \mapsto t$ die identische Abbildung. Es wird unmittelbar klar, dass α^2 aus beliebigen Trajektorien der Messgrößen, also bei beliebiger Bewegung des Seils, ermittelt werden kann, solange $y_2(t) \neq 0$ gilt.

Auch aus physikalischer Sicht erscheint es naheliegend, dass aus den Trajektorien der Positionen des unteren und des oberen Seilendes lediglich der Quotient $l/g \sim \alpha^2$ der Länge des Seils und der Erdbeschleunigung bestimmt werden kann. Ist g bekannt, so liefert (23) im Zeitbereich einen Schätzwert⁷ für l :

$$l = \frac{g}{4} \alpha^2 = \frac{g}{4} \frac{y_1(t)}{y_2(t)}. \quad (26)$$

⁷Die sich anschließende Bemerkung gibt eine Begründung für die Verwendung der Bezeichnung „Schätzwert“.

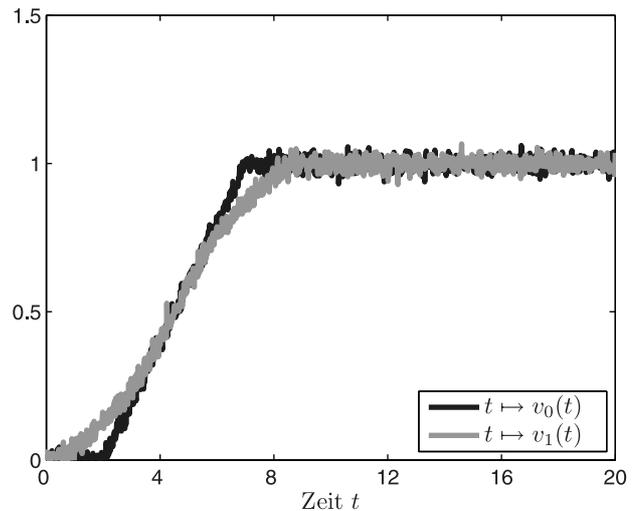


Bild 2 Trajektorien von unterem und oberem Seilende mit additivem mittelwertfreiem Rauschen.

Bemerkung 1. Bei der verwendeten algebraischen Identifikationsmethode handelt es sich um ein nicht-asymptotisches Verfahren. Damit lässt sich (wie im vorliegenden Fall) ein Parameter exakt berechnen, sobald Identifizierbarkeit vorliegt (vgl. [10]), also hier $y_2(t) \neq 0$. Bei der numerischen Berechnung von y_1 und y_2 kommt es jedoch zu Fehlern, z. B. durch die Approximation bei der Integration, was letztlich dazu führt, dass ein Schätzwert für einen Parameter erst mit zunehmender Zeit gegen den tatsächlichen Wert „konvergiert“.

Zur Validierung des Ansatzes wurden in einer Simulation die Trajektorien $t \mapsto v_0(t)$ und $t \mapsto v_1(t)$ ausgehend von einer flachheitsbasierten Parametrierung des unteren Seilendes v_0 berechnet⁸. Beiden Signalen wurde additiv weißes Rauschen überlagert (vgl. Bild 2). Wie in Bild 3 dargestellt, kann unter der Annahme, dass die Erdbeschleunigung $g = 9,81$ bekannt ist, für $t > 10$ näherungsweise die für die Trajektoriengenerierung verwendete Seillänge $l = 10$ berechnet werden⁹. Das Ergebnis der Identifikation lässt sich verbessern, wenn in (23) anstelle der Signale y_1 und y_2 Integrale dieser Signale verwendet werden, da auf diese Weise ein mittelwertfreies Rauschen besser unterdrückt wird (vgl. [5]).

Man beachte, dass $v_0(t)$ im rauschfreien Fall aufgrund der homogenen Anfangsbedingungen auf dem Intervall $t \in [0, 2]$ verschwindet und damit $y_1(t)$ und $y_2(t)$ auf $t \in [0, 4]$ identisch Null sind. Die korrekte Seillänge wird damit für $t > 4$ identifiziert (vgl. Bild 4).

Bemerkung 2. Steht die Kraft F anstelle einer der anderen Messgrößen v_0 und v_1 zur Verfügung (oder zusätzlich zu diesen), so lässt sich (bei Kenntnis von g) zusätzlich zur Länge l des Seils zumindest ein Verhältnis der Masse M

⁸Für die Herleitung einer flachheitsbasierten Regelung sei auf [8] verwiesen.

⁹Alle Größen werden in dimensionsloser Form verwendet, nicht zuletzt da die „Konvergenz“ des geschätzten Wertes gegen den tatsächlichen stark von der Abtastzeit der Messsignale (hier $\Delta t = 0,02$) und der verwendeten Methode zur numerischen Integration abhängen.

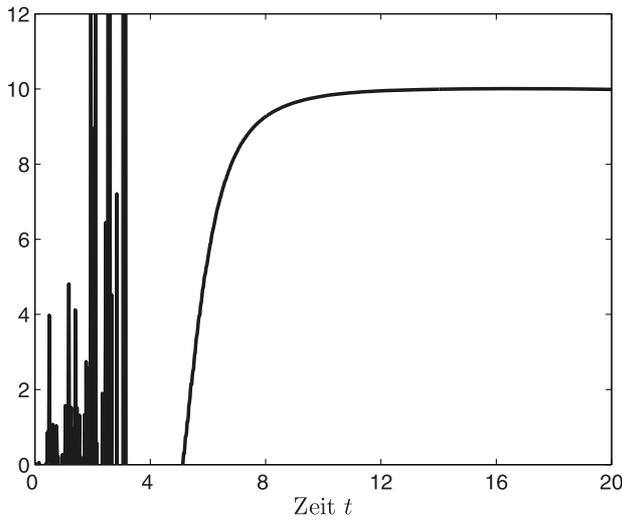


Bild 3 Identifizierte Seillänge im Fall mit Rauschen.

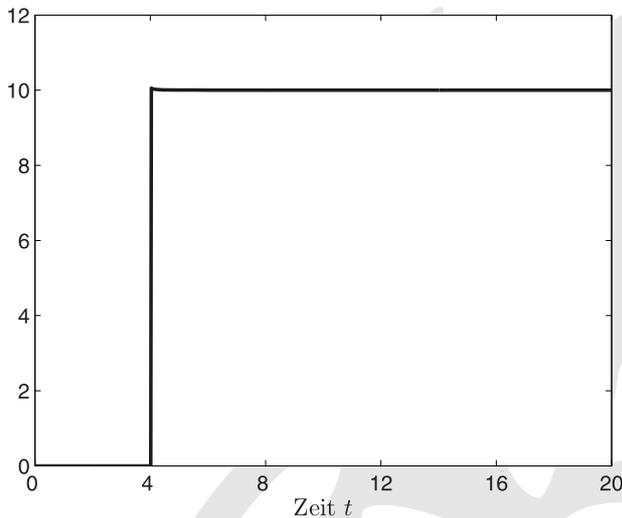


Bild 4 Identifizierte Seillänge im Fall ohne Rauschen.

des Wagens und der Liniendichte ρ des Seils identifizieren.

4 Identifikation im Fall mit Last

Im Fall $m_0 \neq 0$, also wenn eine Masse am unteren Seilende befestigt ist, wird das dynamische Verhalten des Seils durch die Gleichungen (14a)–(14c) beschrieben. Wie im vorangegangenen Fall wird angenommen, dass die untere und obere Position des Seils gemessen werden.

4.1 Herleitung der Identifikationsgleichung

In einem ersten Schritt ist erneut das Randwertproblem zu lösen, d. h., die unbekannt Operatoren \hat{C}_1 und \hat{C}_2 in (18) müssen in Abhängigkeit der Randbedingungen dargestellt werden. Dann kann die definitorische Gleichung für die zweite Messgröße \hat{v}_1 verwendet werden, um einen Zusammenhang zwischen den beiden gemessenen Größen zu gewinnen.

Mit Hilfe der Lösung (18) ersetzt man \hat{w} in $\hat{v}_0 = \hat{w}(0)$ einerseits und in (14c) andererseits, wobei sich unter Verwendung der Dgln. für die Bessel-Funktionen zweiter Art (vgl. (52) im Anhang) ein lineares Gleichungssystem für \hat{C}_1 und \hat{C}_2 ergibt:

$$\hat{v}_0 = \hat{C}_1 I_0(\alpha_1 s) + \hat{C}_2 K_0(\alpha_1 s) \quad (27a)$$

$$\frac{\alpha_1 s}{2} \hat{v}_0 = \hat{C}_1 I_1(\alpha_1 s) - \hat{C}_2 K_1(\alpha_1 s) \quad (27b)$$

mit

$$\alpha_1 s = f(0) = 2s \sqrt{\frac{m_0}{g\rho}}. \quad (28)$$

Da die Wronski-Determinante (vgl. (53) im Anhang) nicht verschwindet, kann das Gleichungssystem (27) stets nach den unbekannt Operatoren \hat{C}_1 und \hat{C}_2 aufgelöst werden. Aus $\hat{v}_1 = \hat{w}(l)$ ergibt sich demzufolge

$$\begin{aligned} \hat{v}_1 = \alpha_1 s \hat{v}_0 & (K_1(\alpha_1 s) I_0(\alpha_2 s) + I_1(\alpha_1 s) K_0(\alpha_2 s)) \\ & + \frac{\alpha_1^2 s^2}{2} \hat{v}_0 (K_0(\alpha_1 s) I_0(\alpha_2 s) - I_0(\alpha_2 s) K_0(\alpha_2 s)) \end{aligned} \quad (29)$$

mit

$$\alpha_2 s = f(l) = 2s \sqrt{\frac{l}{g} + \frac{m_0}{g\rho}}. \quad (30)$$

Für eine einfachere Notation werden die neuen Operatoren

$$\hat{T}_1 = K_0(\alpha_1 s) I_0(\alpha_2 s) - I_0(\alpha_1 s) K_0(\alpha_2 s) \quad (31a)$$

$$\hat{T}_2 = (K_1(\alpha_1 s) I_0(\alpha_2 s) + I_1(\alpha_1 s) K_0(\alpha_2 s)) \alpha_1 s \quad (31b)$$

$$\hat{T}_3 = (K_1(\alpha_1 s) I_1(\alpha_2 s) - I_1(\alpha_1 s) K_1(\alpha_2 s)) \alpha_1 \alpha_2 s^2 \quad (31c)$$

$$\hat{T}_4 = (K_0(\alpha_1 s) I_1(\alpha_2 s) + I_0(\alpha_1 s) K_1(\alpha_2 s)) \alpha_2 s \quad (31d)$$

eingeführt. Damit lautet (29)

$$\hat{v}_1 = \alpha_1^2 \hat{v}_0 \hat{T}_1 + \hat{v}_0 \hat{T}_2. \quad (32)$$

Die Dgln. für \hat{T}_i ergeben sich durch algebraische Ableitung von (31), d. h. Ableitung nach s . Unter Verwendung der Besselschen Dgln. (51) und (52) lassen sich die Produkte von Bessel-Funktionen durch $\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_4$ ersetzen. Nach kleineren Umformungen erhält man

$$\hat{T}_1' = -2\hat{T}_2 + 2\hat{T}_4 \quad (33a)$$

$$\hat{T}_2' = -\alpha_1^2 \frac{s}{2} \hat{T}_1 + 2\hat{T}_3 \quad (33b)$$

$$\hat{T}_3' = \alpha_2^2 \frac{s}{2} \hat{T}_2 - \alpha_1^2 \frac{s}{2} \hat{T}_4 \quad (33c)$$

$$\hat{T}_4' = \alpha_2^2 \frac{s}{2} \hat{T}_1 - 2\hat{T}_3. \quad (33d)$$

Um ausgehend von (32) eine Gleichung zu erhalten, in der lediglich die Messsignale und die Parameter des Seils auftreten, wird insgesamt viermal algebraisch abgeleitet, wobei die Ableitungen \hat{T}_i' jeweils durch die Ausdrücke aus (33) ersetzt werden. Aus den resultierenden fünf Gleichungen in den vier Operatoren $\hat{T}_1, \dots, \hat{T}_4$ lässt sich ein

Zusammenhang gewinnen, in der letztere nicht mehr auftreten. Mit

$$c_1 \dot{y}_1 + c_2 \dot{y}_2 + c_3 \dot{y}_3 + c_4 \dot{y}_4 + c_5 \dot{y}_5 = \dot{y}_0 \tag{34}$$

ergibt sich so eine Gleichung, die affin in den Parametern

$$c_1 = \frac{m_0}{g\rho}, \quad c_2 = \frac{m_0 l}{g\rho g}, \quad c_3 = \frac{l}{g}, \quad c_4 = \frac{l^2}{g^2}, \quad c_5 = \frac{l^3}{g^3} \tag{35}$$

ist. Die etwas länglichen Ausdrücke für die Signale \dot{y}_i , $i = 0, \dots, 5$ enthalten im Wesentlichen Summen von Produkten von fünf Signalen, wobei als Faktoren \dot{y}_0 und \dot{y}_1 sowie deren algebraische Ableitungen auftreten. Sie werden aus Platzgründen an dieser Stelle nicht angegeben.

Da in (32) und (33) lediglich Monome in den entsprechend (28) und (30) definierten Parametern α_1 und α_2 auftreten, wird es hier nur möglich sein, die Quotienten $m_0/(g\rho)$ und l/g zu bestimmen. Ähnlich wie im Fall ohne Last (vgl. Abschnitt 3) erscheint diese Einschränkung aus physikalischer Sicht naheliegend.

4.2 Numerische Bestimmung der Parameter durch Überparametrierung

Ausgehend von Gleichung (34) sollen nun die gesuchten Parameter $c_1 = m_0/(g\rho)$ und $c_3 = l/g$ bestimmt werden. Die verbleibenden Parameter c_2 , c_4 und c_5 können durch diese beiden Größen mit Hilfe der nichtlinearen Gleichungen

$$c_2 = c_1 c_3, \quad c_4 = c_3^2, \quad c_5 = c_3 c_4 \tag{36}$$

ausgedrückt werden. In [10] wurden in einem ähnlichen Fall die Parameter durch eine Überparametrierung bestimmt, indem sämtliche Koeffizienten (hier c_i , $i = 1, \dots, 5$) als unabhängig voneinander aufgefasst wurden. Dieser Ansatz wird in einer modifizierten Form auch hier verfolgt.

Um die Koeffizienten c_i eindeutig bestimmen zu können, müssen mindestens fünf Gleichungen vorhanden sein. Diese lassen sich z. B. durch Multiplikation von (34) mit s^{-i} , $i = 1, \dots, 4$ gewinnen, wodurch man

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dot{y}_3 & \dot{y}_4 & \dot{y}_5 \\ s^{-1}\dot{y}_1 & s^{-1}\dot{y}_2 & s^{-1}\dot{y}_3 & s^{-1}\dot{y}_4 & s^{-1}\dot{y}_5 \\ s^{-2}\dot{y}_1 & s^{-2}\dot{y}_2 & s^{-2}\dot{y}_3 & s^{-2}\dot{y}_4 & s^{-2}\dot{y}_5 \\ s^{-3}\dot{y}_1 & s^{-3}\dot{y}_2 & s^{-3}\dot{y}_3 & s^{-3}\dot{y}_4 & s^{-3}\dot{y}_5 \\ s^{-4}\dot{y}_1 & s^{-4}\dot{y}_2 & s^{-4}\dot{y}_3 & s^{-4}\dot{y}_4 & s^{-4}\dot{y}_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}_0 \\ s^{-1}\dot{y}_0 \\ s^{-2}\dot{y}_0 \\ s^{-3}\dot{y}_0 \\ s^{-4}\dot{y}_0 \end{pmatrix} \tag{37}$$

erhält. Ersetzt man die im Zeitbereich auftretenden Mehrfachintegrale durch

$$y_{i,k}(t) = \int_0^t \frac{(t-\sigma)^{k-1}}{(k-1)!} y_i(\sigma) d\sigma, \tag{38}$$

$k \geq 1$, $i = 0, \dots, 5$, so lässt sich (37) folgendermaßen darstellen:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ y_{1,1} & y_{2,1} & y_{3,1} & y_{4,1} & y_{5,1} \\ y_{1,2} & y_{2,2} & y_{3,2} & y_{4,2} & y_{5,2} \\ y_{1,3} & y_{2,3} & y_{3,3} & y_{4,3} & y_{5,3} \\ y_{1,4} & y_{2,4} & y_{3,4} & y_{4,4} & y_{5,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_{0,1} \\ y_{0,2} \\ y_{0,3} \\ y_{0,4} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$Yc = y_0. \tag{39}$$

Der Vorteil der Überparametrierung besteht darin, dass lediglich ein lineares Gleichungssystem zu lösen ist. Die Berechnung des Vektors c in (39) ist allerdings nur dann eindeutig möglich, wenn die Matrix Y regulär ist. Bei der numerischen Simulation wurde jedoch festgestellt, dass Y nahezu singulär bzw. schlecht konditioniert ist. Ob dies lediglich ein numerisches Problem ist oder der vollständige Parametervektors c tatsächlich nicht identifiziert werden kann, wird hier nicht untersucht. Stattdessen wird im Folgenden erläutert, wie das geschilderte Problem unter Verwendung der nichtlinearen Beziehungen (36) gelöst werden kann. Zunächst wird dabei anstelle einer Lösung von (39) lediglich nach einem Vektor c gesucht, der die Norm des Gleichungsfehlers $e = Yc - y_0$ minimiert:

$$c = \arg \min_c \|e\|^2. \tag{40}$$

Die Lösung dieses Minimierungsproblems lässt sich mit Hilfe der Pseudoinversen Y^\dagger der Matrix Y ermitteln (vgl. [4]):

$$c = Y^\dagger y_0. \tag{41}$$

Zur Berechnung von Y^\dagger bietet sich die Singulärwertzerlegung an. Mit deren Hilfe kann Y in die unitären Matrizen $U = (u_1, \dots, u_5)$, $W = (w_1, \dots, w_5)$ und die Diagonalmatrix Σ zerlegt werden:

$$Y = U \Sigma W^T. \tag{42}$$

Die Elemente auf der Hauptdiagonale von Σ entsprechen dabei den Singulärwerten $\sigma_i \geq 0$ von Y . Sie sind stets nicht-negativ und seien ihrem Betrag nach absteigend geordnet:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_5 \geq 0. \tag{43}$$

Wenn n_0 der größte Index ist, für den $\sigma_{n_0} > 0$ gilt, dann kann die Pseudoinverse in der Form

$$Y^\dagger = \sum_{i=1}^{n_0} w_i \frac{u_i^T}{\sigma_i} \tag{44}$$

dargestellt werden und aus (41) resultiert die Lösung

$$c = \sum_{i=1}^{n_0} w_i \frac{u_i^T y_0}{\sigma_i}. \tag{45}$$

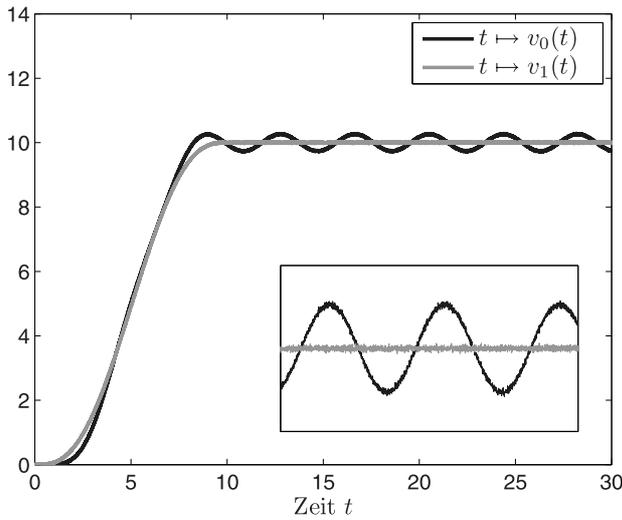


Bild 5 Trajektorien von unterem und oberem Seilende mit additivem mittelwertfreiem Rauschen.

Aus (45) wird deutlich, dass sehr kleine Singulärwerte σ_i zu numerischen Problemen führen können. Es erscheint daher sinnvoll, eine untere Schranke $0 < \epsilon_\sigma < 1$ für die Singulärwerte festzulegen. Derjenige Anteil der Lösung, für den $\sigma_i < \epsilon_\sigma \sigma_1$ gilt, wird dabei vernachlässigt. Gilt also $\sigma_{\bar{n}+1} < \epsilon_\sigma \sigma_1$, so erhält man die Näherungslösung

$$\bar{c} = \sum_{i=1}^{\bar{n}} w_i \frac{u_i^T y_0}{\sigma_i}. \quad (46)$$

Um den vernachlässigten Teil zu erfassen, partitioniert man die Matrix $W = (W_1, W_2)$ mit $W_1 \in \mathbb{R}^{5 \times \bar{n}}$ und $W_2 \in \mathbb{R}^{5 \times (5-\bar{n})}$. Somit kann die gesamte Lösung mit Hilfe des Vektors $\alpha \in \mathbb{R}^{5-\bar{n}}$ durch

$$c = \bar{c} + W_2 \alpha \quad (47)$$

dargestellt werden. Der Vektor

$$\alpha = \arg \min_{\alpha} f^2 \quad (48)$$

wird dabei durch Minimierung des aus den nichtlinearen Beziehungen (36) zwischen den einzelnen Komponenten des Vektors c resultierenden Fehlers

$$f = (c_2 - c_1 c_3)^2 + (c_4 - c_3^2)^2 + (c_5 - c_3 c_4)^2 \quad (49)$$

unter Berücksichtigung von (47) bestimmt.

Bemerkung 3. Alternativ zum Ansatz mittels Überparametrierung kann (34) als nichtlineare Gleichung lediglich in den zwei zu identifizierenden Parametern c_1 und c_3 aufgefasst werden:

$$c_1 \hat{y}_1 + c_1 c_3 \hat{y}_2 + c_3 \hat{y}_3 + c_3^2 \hat{y}_4 + c_3^3 \hat{y}_5 = \hat{y}_0. \quad (50)$$

Eine weitere Gleichung in c_1 und c_3 lässt sich analog zum oben erläuterten Ansatz durch Multiplikation von

(50) mit s^{-1} gewinnen. Das nichtlineare Gleichungssystem kann anschließend mit Hilfe geeigneter numerischer Verfahren, wie beispielsweise dem Gauss-Newton-Verfahren, gelöst werden.

4.3 Simulationsergebnisse

Zur numerischen Validierung des Ergebnisses wurden die ersten 25 Moden des schweren Seils mit Last für die Parameterwerte $\rho = 1, g = 9,81, m_0 = 10, l = 4$ bei Vorgabe einer Trajektorie für v_1 simuliert. Wieder wurde den daraus gewonnenen Signalen additiv weißes Rauschen überlagert (vgl. Bild 5). Unter der Annahme, dass g und ρ bekannt sind, liefert (47) die in Bild 6 dargestellten Schätzwerte. Für alle Zeitpunkte $t > 24$ können sowohl die Seillänge l als auch die Masse m_0 hinreichend genau identifiziert werden.

Erneut wird nicht zuletzt aus Bild 7 ersichtlich, dass das Ergebnis der Identifikation im rauschfreien Fall gegenüber dem Fall mit Rauschen erheblich verbessert ist.

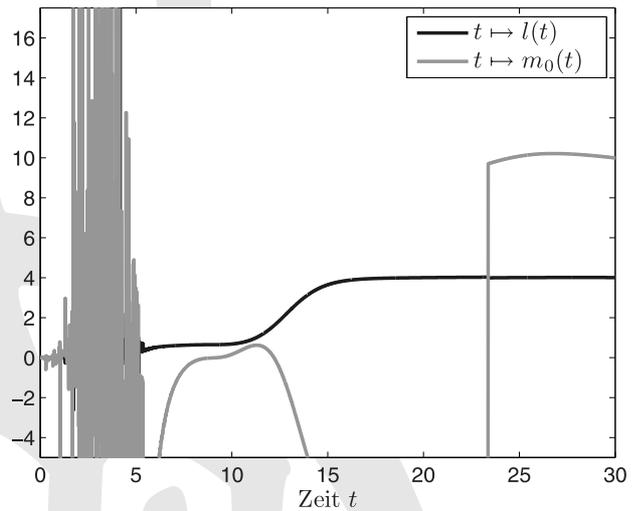


Bild 6 Identifizierte Seillänge und Last bei $z = 0$ im Fall mit Rauschen.

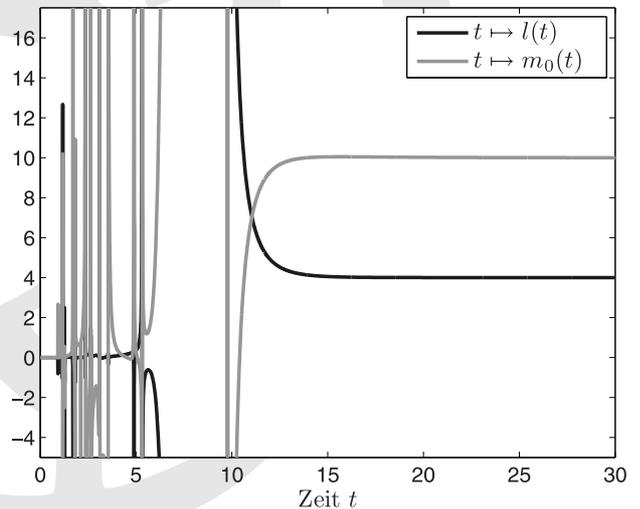


Bild 7 Identifizierte Seillänge und Last bei $z = 0$ im Fall ohne Rauschen.

Allerdings können aufgrund der mehrfach erwähnten numerischen Probleme befriedigende Werte für die Parameter erst für $t > 15$ ermittelt werden.

Bemerkung 4. Wie auch im Fall ohne Last kann eine schnellere (und bessere) Identifikation unter anderem durch eine reduzierte Abtastzeit (hier $\Delta t = 0,004$) oder die Verwendung einer numerischen Integrationsmethode mit höherer Fehlerordnung erreicht werden. In [5] wurde zudem angedeutet, dass es Möglichkeiten gibt, das additiv überlagerte Rauschen direkt bei der Generierung des Gleichungssystems für die Parameter zu berücksichtigen und auf diese Weise besser zu unterdrücken. Auch die Einbeziehung zusätzlicher Gleichungen in den Parameter c_i wäre denkbar.

5 Schlussfolgerung

Das Beispiel des schweren Seils zeigt, dass die algebraischen Methoden aus [10] zur Identifikation von Parametern in partiellen Dgln. mit konstanten Koeffizienten auf Systeme übertragen werden können, die durch partielle Dgln. mit ortsabhängigen Koeffizienten beschrieben werden. Dabei reicht die Kenntnis der Trajektorien des unteren und des oberen Seilendes aus, um das Identifikationsproblem auch in Gegenwart von Messrauschen lösen zu können – dies grundsätzlich unabhängig von den Randbedingungen.

Die Methode kann auf andere partielle Dgln. mit ortsabhängigen Koeffizienten, beispielsweise die Kirchhoffsche Platte, übertragen werden. In jedem Fall müssen bei dieser Vorgehensweise die Dgln. der speziellen Operatoren bzgl. s – hier die Bessel-Funktionen – bekannt sein, um diese eliminieren zu können.

6 Anhang: Eigenschaften der modifizierten Bessel-Funktionen

Die modifizierten Bessel-Funktionen erster Art genügen den Dgln. (vgl. [1])

$$I_0'(x) = I_1(x) \quad (51a)$$

$$I_1'(x) = I_0(x) - \frac{1}{x}I_1(x), \quad (51b)$$

jene zweiter Art den Dgln.

$$K_0'(x) = -K_1(x) \quad (52a)$$

$$K_1'(x) = -K_0(x) - \frac{1}{x}K_1(x). \quad (52b)$$

Als Wronski-Determinante für die modifizierten Bessel-Funktionen erhält man (vgl. [1])

$$K_1(x)I_0(x) + I_1(x)K_0(x) = \frac{1}{x} \neq 0. \quad (53)$$

Danksagung

Die Autoren danken der Deutschen Forschungsgemeinschaft (Ru 538/5, Wo 1601/2) für finanzielle Unterstützung.

Literatur

- [1] *M. Abramowitz, I. Stegun*: Handbook of Mathematical Functions, Dover Publications, 1964.
- [2] *L. Belkoura, J.-P. Richard, M. Fliess*: On-line identification of systems with delayed inputs, Proc. 17th Symp. Math. Theory Networks Syst. (MTNS), Kyoto, Japan, 2006.
- [3] *L. Belkoura, J.-P. Richard, M. Fliess*: Parameters estimation of systems with delayed and structured entries, Automatica, 45:1117–1125, 2009.
- [4] *A. Björck*: Numerical Methods for Least Squares Problems, SIAM, 1996.
- [5] *M. Fliess, H. Sira-Ramírez*: An algebraic framework for linear identification, ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations, 9:151–168, 2003.
- [6] *R. M. Murray*: Trajectory generation for a towed cable system using differential flatness, in Proc. IFAC World Congress, San Francisco, Kalifornien, 395–400, 1996.
- [7] *J. Mikusiński*: Operational Calculus, Pergamon, Oxford & PWN, 1983.
- [8] *N. Petit, P. Rouchon*: Flatness of heavy chain systems, SIAM J. Control Optim., 40:475–495, 2001.
- [9] *M. P. Polis, R. E. Goodson*: Parameter identification in distributed systems: a synthesizing overview, Proc. IEEE, 64:45–61, 1976.
- [10] *J. Rudolph, F. Woittennek*: Ein algebraischer Zugang zur Parameteridentifikation in linearen unendlichdimensionalen Systemen, at – Automatisierungstechnik, 55:457–467, 2007.
- [11] *J. Rudolph, F. Woittennek*: Identification de paramètres d'un modèle d'échangeurs de chaleur, Actes Conf. Int. Francophone d'Automatique, Nancy, Frankreich, 2010.

Manuskripteingang: 12. Juni 2012

Dipl.-Ing. Nicole Gehring ist wissenschaftliche Mitarbeiterin am Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik der Universität des Saarlandes. Hauptarbeitsgebiet: lineare unendlichdimensionale Systeme.

Adresse: Universität des Saarlandes, Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik, 66123 Saarbrücken, E-Mail: n.gehring@lrs.uni-saarland.de

Dipl.-Ing. Torsten Knüppel ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie (Prof. K. Röbenack) der TU Dresden. Hauptarbeitsgebiet: lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme.

Adresse: Technische Universität Dresden, Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, 01062 Dresden, E-Mail: torsten.knuettel@tu-dresden.de

Prof. Dr.-Ing. habil. Joachim Rudolph ist Leiter des Lehrstuhls für Systemtheorie und Regelungstechnik an der Universität des Saarlandes. Hauptarbeitsgebiete: Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Regelstrecken, algebraische Methoden, lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme; Anwendungen in der Mechatronik und der Verfahrenstechnik.

Adresse: siehe oben, E-Mail: j.rudolph@lrs.uni-saarland.de

Dr.-Ing. Frank Woittennek ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie (Prof. K. Röbenack) der TU Dresden. Hauptarbeitsgebiete: lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme, Steuerung und Regelung nichtlinearer mechanischer Systeme.

Adresse: siehe oben, E-Mail: frank.woittennek@tu-dresden.de