

# Flachheitsbasierte Trajektorienplanung für semilineare hyperbolische Systeme mit Randeingriff

Flatness based Trajectory Planning for Boundary Controlled Semi-linear Hyperbolic Systems

Torsten Knüppel, Frank Woittennek, Technische Universität Dresden,  
Joachim Rudolph, Universität des Saarlandes, Saarbrücken

**Zusammenfassung** Für örtlich eindimensionale semilineare hyperbolische Systeme werden die Trajektorienplanung und der Steuerungsentwurf betrachtet. Eine „flachheitsbasierte“ Methode wird exemplarisch anhand eines durch Transportgleichungen beschriebenen Rohrreaktors untersucht, der gegebenenfalls über ein als Wärmetauscher fungierendes zweites Rohr gekühlt wird. Die auf den Charakteristiken basierende Methode ist allgemein auf solche Randwertprobleme anwendbar, die auf Anfangswertprobleme bezüglich der

Ortskoordinate zurückgeführt werden können. ▶▶▶ **Summary** Motion planning and open loop control design for semi-linear hyperbolic systems in one space dimension is considered. A “flatness based” method is investigated for transport equations which describe convection dominated tubular reactors with or without heat exchanger. More generally, the characteristics based method applies to such boundary value problems that can be translated into Cauchy problems w. r. t. the spatial coordinate.

**Schlagwörter** Charakteristiken, Wärmetauscher, hyperbolische partielle Differentialgleichungen, semilinear, Transportgleichung, Rohrreaktor ▶▶▶ **Keywords** Characteristics, heat exchanger, hyperbolic partial differential equations, semi-linear, transport equation, tubular reactor

## 1 Einleitung

Die aus der Theorie der nichtlinearen endlichdimensionalen Systeme stammenden flachheitsbasierten Methoden können auch für den Steuerungsentwurf für Systeme mit verteilten Parametern als etabliertes Werkzeug angesehen werden. Für den linearen Fall existieren weitreichende Methoden zur Behandlung parabolischer und hyperbolischer partieller Differentialgleichungen (pDgl.) (siehe z. B. [8; 10–13; 16]).

Im Gegensatz dazu beschränken sich die flachheitsbasierten Methoden für den nichtlinearen Fall

fast ausschließlich auf parabolische Gleichungen. Dabei werden alle Randbedingungen, in denen Stellgrößen auftreten, zunächst ignoriert. Stattdessen werden neue fiktive Randbedingungen derart eingeführt, dass sich eine Randwertaufgabe ergibt, bei der alle Randbedingungen auf der gleichen Seite gestellt werden, also eine bezüglich des Orts gestellte „Anfangswertaufgabe“. Die Randwerte, deren Trajektorien in den neu eingeführten Randbedingungen vorgeschrieben werden, übernehmen die Rolle eines flachen Ausgangs. Wählt man die Trajektorie des flachen Ausgangs aus einem geeigneten Raum glatter Funktionen,

so kann die gestellte Anfangswertaufgabe letztendlich mit Potenzreihenentwicklungen und verwandten Techniken (wie z. B. in [6; 7; 9; 11]) gelöst werden. Die Trajektorien der Stellgrößen können anschließend aus den Randbedingungen abgelesen werden.

Der vorliegende Beitrag verfolgt einen ähnlichen Ansatz für Systeme, die durch hyperbolische semilineare Gleichungen beschrieben werden. Wie im parabolischen Fall werden nur solche Systeme betrachtet, die auf ein bezüglich des Orts gestelltes Anfangswertproblem zurückgeführt werden können. Es ist jedoch im Allgemeinen nicht möglich die Lösung durch Reihenentwicklungen wie im parabolischen Fall zu berechnen. Stattdessen bietet es sich an, die Methode der Charakteristiken zu verwenden<sup>1</sup>. Die Existenz und Eindeutigkeit der so berechneten Lösung kann unter Verwendung von Fixpunktverfahren nachgewiesen werden. Die erhaltenen Parametrierungen umfassen verzögerte und prädierte Werte der Trajektorie des flachen Ausgangs.

Die beschriebene Methode wird exemplarisch anhand des Modells eines Rohrreaktors eingeführt, der nach dem Prinzip eines Wärmetauschers gekühlt bzw. beheizt wird. Die dabei vorrangig betrachtete Steuerungsaufgabe besteht in der Überführung zwischen stationären Regimes.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt. Im folgenden Abschnitt werden zunächst die der vorgestellten Methode zugrundeliegenden Ideen und einige der dabei auftretenden Probleme anhand eines einfachen isothermen Rohrreaktormodells erläutert. In Abschnitt 3 werden die mathematischen Modelle der betrachteten, nach dem Wärmetauscherprinzip arbeitenden Rohrreaktoren eingeführt. Im vierten Abschnitt wird der Steuerungsentwurf für diese Modelle diskutiert. Dabei wird zunächst der Parallelstromfall untersucht. Es wird gezeigt, dass sich die Ergebnisse problemlos auf den Gegenstromfall übertragen lassen. Schließlich werden in Abschnitt 4.4 Existenzbedingungen formuliert, aus denen sich Einschränkungen für mögliche Trajektorien des flachen Ausgangs ergeben. Die numerische Berechnung der Steuerung und der parametrisierten Trajektorien wird in Abschnitt 5 dargestellt. Die Arbeit schließt mit einer Präsentation von Simulationsergebnissen in Abschnitt 6.

## 2 Einführungsbeispiel: Reaktor mit einem Rohr

Als einführendes Beispiel soll zunächst ein einfacher isothermer Rohrreaktor der Länge  $L$  betrachtet werden. Dieser besteht lediglich aus einem durchströmten Rohr, in dem eine Reaktion abläuft. Es sollen Reaktionen  $k$ -ter Ordnung mit nur einem Reaktanten betrachtet werden.

<sup>1</sup> Dass Potenzreihenansätze zumindest zur Berechnung stückweise analytischer Lösungen verwendet werden können, wird beispielsweise in [14] gezeigt. Auch hier ist der Verlauf der Charakteristiken wichtig: Die Lösung wird zunächst auf einem von den Charakteristiken begrenzten Gebiet durch einen Potenzreihenansatz berechnet. Die Lösung in den verbleibenden Gebieten erhält man anschließend durch einen Abgleich der mehrdeutigen Lösungen charakteristischer Cauchy-Probleme.

Der zeitliche Verlauf der ortsabhängigen Stoffmengenkonzentration  $c$  dieses Reaktanten kann dann mit Hilfe der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + v \frac{\partial c}{\partial x}(x, t) = -\alpha c^k(x, t) \quad (1)$$

beschrieben werden, wobei  $v$  die Strömungsgeschwindigkeit des Reaktionsmediums bezeichnet und der positive Parameter  $\alpha$  von der Art der Reaktion und der eingestellten (konstanten) Temperatur abhängt. Es wird angenommen, dass die Zuflusskonzentration  $c_0(t) = c(0, t)$  als Stellgröße zur Verfügung steht. Die betrachtete Steuerungsaufgabe besteht im Einstellen eines zeitlich konstanten Konzentrationsprofils im Reaktor, wobei insbesondere die Abflusskonzentration von Interesse ist.

Um die betrachtete Steuerungsaufgabe zu lösen, bietet es sich beispielsweise an, zunächst die stationären Start- und Zielprofile aus den gewünschten stationären Abflusskonzentrationen zu berechnen. Dazu sind lediglich gewöhnliche Randwertaufgaben zu lösen. Die Parametrierung des zugehörigen Übergangs zwischen diesen Profilen ist nun sehr einfach. Dies zeigen die nachfolgenden Betrachtungen. Der Materialtransport im Reaktor erfolgt lediglich durch die gerichtete Bewegung des Reaktionsmediums, nicht aber durch Diffusionsvorgänge. Ein durch Änderung der Zuflusskonzentration hervorgerufener instationärer Konzentrationsverlauf wird deshalb nach endlicher Zeit den Reaktor am rechten Rand verlassen. Anschließend stellt sich im Reaktor ein zeitlich konstantes Profil ein.

Die folgende Diskussion soll einerseits die vorangegangenen eher intuitiven Betrachtungen auf einen soliden mathematischen Boden stellen und andererseits Möglichkeiten zur Behandlung allgemeiner Probleme aufzeigen. Dazu wird Gleichung (1) mit der Methode der Charakteristiken untersucht.

Betrachtet man die Konzentration entlang der charakteristischen Kurve  $t = \tau + \sigma x$  (mit  $\sigma = 1/v$ ,  $\bar{\alpha} = \alpha/v$ ), also  $\bar{c}(x, \tau) = c(x, \tau + \sigma x)$ , so erhält man durch Ableitung nach  $x$  aus (1) die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d\bar{c}}{dx}(x, \tau) = -\bar{\alpha} \bar{c}^k(x, \tau).$$

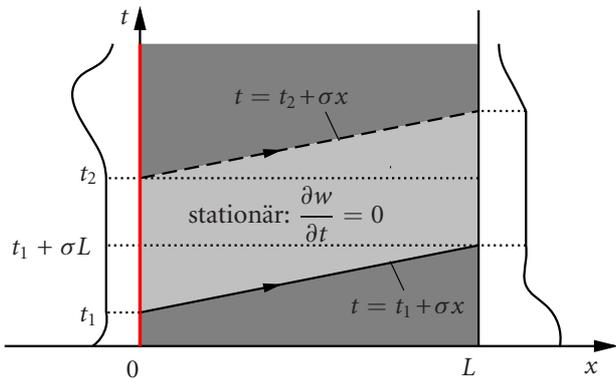
Deren Lösung lautet bei gegebenem Verlauf der Zuflusskonzentration  $c_0(t) = c(0, t)$  für  $k \neq 1$

$$\bar{c}(x, \tau) = \frac{c_0(\tau)}{\sqrt[k-1]{1 + (k-1)\bar{\alpha} x c_0^{k-1}(\tau)}}.$$

In Originalkoordinaten ergibt sich somit

$$c(x, t) = \frac{c_0(t - \sigma x)}{\sqrt[k-1]{1 + (k-1)\bar{\alpha} x c_0^{k-1}(t - \sigma x)}}. \quad (2)$$

<sup>2</sup> Der lineare Fall  $k = 1$  bringt keine zusätzlichen Einsichten in die Problematik und wird deshalb aus Gründen der Übersichtlichkeit an dieser Stelle nicht betrachtet.



**Bild 1** Bereich der konstanten Lösung in Abhängigkeit konstanter Zuflussgrößen.

Man erkennt, dass die Lösung in einem Punkt  $(x, t)$  lediglich von der Zuflusskonzentration zum Zeitpunkt  $t - \sigma x$  abhängt. Daraus wird sofort ersichtlich, dass ein konstanter Verlauf der Zuflussgrößen auf einem Intervall  $[t_1, t_2]$  einen konstanten Verlauf der Abflussgrößen auf dem Intervall  $[t_1 + \sigma L, t_2 + \sigma L]$  zur Folge hat. Gilt außerdem  $t_2 - t_1 > \sigma L$ , dann wird die Lösung  $(x, t) \mapsto c(x, t)$  auf dem Rechteck  $[0, L] \times [t_1 + \sigma L, t_2]$  konstant sein (siehe Bild 1).

Das Verfahren kann alternativ zur Realisierung einer gewünschten Abflussgrößentrajektorie  $t \mapsto c_L(t) = c(L, t)$  genutzt werden. Dazu ist lediglich die Gleichung (2) derart anzupassen, dass der Randwert bei  $x = L$  als freier Parameter genutzt wird. Es ergibt sich mit  $\tau = t + \sigma(L - x)$  und  $\tilde{c}(x, \tau) = c(x, \tau - \sigma(L - x))$

$$\tilde{c}(x, \tau) = \frac{c_L(\tau)}{\sqrt[k-1]{1 + (k-1)\tilde{\alpha}(x-L)c_L^{k-1}(\tau)}}. \quad (3)$$

Die ursprünglichen physikalisch sinnvollen Randbedingungen werden dabei zunächst ignoriert. Ihre Einhaltung wird stattdessen dadurch gewährleistet, dass die passende Zuflusstrajektorie aus der Lösung abgelesen wird. Der Stellgrößenverlauf ergibt sich damit aus

$$c_0(t) = \frac{c_L(t)}{\sqrt[k-1]{1 - (k-1)\tilde{\alpha}Lc_L^{k-1}(t)}}.$$

Auch hier kann ohne Probleme ein Übergang zwischen stationären Lösungen erreicht werden.

Die Abflusstrajektorie kann allerdings nicht beliebig gewählt werden. Das wird direkt aus der Lösung (3) deutlich: Bei

$$x_s(t) = L - \frac{1}{\tilde{\alpha}(k-1)c_L^{k-1}(t)}$$

wird die Lösung für  $k > 1$  singular. Um zu sichern, dass diese Singularität außerhalb des Definitionsbereichs (bei  $x_s < 0$ ) liegt, muss für die Abflusskonzentration

$$c_L(t) < \frac{1}{\sqrt[k-1]{(k-1)\tilde{\alpha}L}}$$

gelten. Diese obere Schranke ist die maximale durch eine endliche Zuflusskonzentration realisierbare Abflusskonzentration.

Es sei angemerkt, dass alternativ zur Zufluss- oder Abflussgrößentrajektorie die Systemgrößentrajektorie an einer beliebigen Stelle (innerhalb des betrachteten Intervalls) ebenfalls zur Parametrierung der Lösung geeignet ist. Jede dieser zur Parametrierung von Übergängen geeigneten Größen wird in Anlehnung an die Theorie nichtlinearer endlichdimensionaler Systeme als flacher Ausgang bezeichnet<sup>3</sup>.

In den nachfolgenden Abschnitten werden die hier dargestellten Vorüberlegungen für den Steuerungsentwurf von verkoppelten Transportgleichungen verwendet. Mit diesen hyperbolischen Modellen werden hier insbesondere Rohrreaktoren beschrieben, die nach dem Wärmetauscherprinzip gekühlt (oder eventuell auch geheizt) werden.

### 3 Mathematisches Modell

Im Folgenden wird ein Rohrreaktor der Länge  $L$  betrachtet, der aus zwei ineinander montierten Röhren besteht und nach dem Wärmetauscherprinzip arbeitet. Das Reaktionsmedium durchströmt das innere Rohr mit der Geschwindigkeit  $v$ , während ein Kühlmittel mit der Geschwindigkeit  $v_e$  durch das äußere Rohr fließt. Zur Vereinfachung werden nur Reaktionen mit einem Reaktanten betrachtet. In diesem Fall hängt die Reaktionsrate  $r$  lediglich von der Reaktantenkonzentration  $c$  und der Temperatur  $T$  ab. Zur Modellierung der Reaktionsrate wird im Folgenden, unter Verwendung der Arrhenius-Beziehung, der Ausdruck

$$r(T, c) = H e^{-\frac{E}{RT}} c^k$$

benutzt, in dem  $k$  die Reaktionsordnung darstellt.

Man unterscheidet je nach Strömungsrichtung den Parallelstromfall ( $v_e > 0$ ) und den Gegenstromfall ( $v_e < 0$ ). Nimmt man an, dass Diffusion und Wärmeleitung gegenüber der Konvektion vernachlässigbar sind, so erhält man ein System aus drei verkoppelten Transportgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial x} &= \beta(T_e - T) + \alpha r(T, c) \\ \frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} &= -r(T, c) \\ \frac{\partial T_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial T_e}{\partial x} &= \beta_e(T - T_e). \end{aligned} \quad (4)$$

Hierin bezeichnen  $c$  die Konzentration des Reaktanten und  $T$  bzw.  $T_e$  die Temperatur des inneren bzw. äußeren Rohrs. Darüber hinaus entspricht  $\rho\beta(T_e - T) = \rho_e\beta_e(T_e - T)$  dem Wärmestrom durch die Rohrwand des inneren Rohrs, wobei  $\rho$  und  $\rho_e$

<sup>3</sup> Es sei darauf hingewiesen, dass es sich bei dieser Analogie keineswegs um eine mathematisch exakte Definition handelt.

(differentielle) Wärmekapazitäten und  $\rho_c \beta_c = \rho \beta$  Übertragungskoeffizienten sind. Als Stellgrößen stehen die Zuflusstemperaturen und die Zuflusskonzentration zur Verfügung. Alle Parameter sind reelle Konstanten.

Die Randbedingungen beschreiben die Zuflusstemperaturen und die Zuflusskonzentration. Deshalb sind sie im Parallelstromfall alle an der Stelle  $x = 0$  gegeben:

$$T(0, t) = T^{\text{in}}(t), \quad c(0, t) = c^{\text{in}}(t), \quad T_c(0, t) = T_c^{\text{in}}(t). \quad (5)$$

Im Gegensatz dazu wird die Randbedingung für das äußere Rohr im Gegenstromfall bei  $x = L$  gestellt:

$$T(0, t) = T^{\text{in}}(t), \quad c(0, t) = c^{\text{in}}(t), \quad T_c(L, t) = T_c^{\text{in}}(t).$$

Im einfachsten Fall können alle Zuflussgrößen als Stellgrößen betrachtet werden, dagegen können in aufwendigeren Fällen einige dieser Größen a priori durch andere Anforderungen gegeben sein.

Zur Vereinfachung der Darstellung werden die verteilten Variablen nachfolgend gemäß  $w_1 = T$ ,  $w_2 = c$  und  $w_3 = T_c$  umbenannt und in einem Vektor  $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)^T$  zusammengefasst. Für die Reziproken der zugehörigen Strömungsgeschwindigkeiten werden die Bezeichnungen  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1/v$ ,  $\sigma_3 = 1/v_c$  eingeführt. Die Gleichungen (4) werden durch die Strömungsgeschwindigkeiten geteilt und die rechten Seiten des resultierenden Systems zu  $\mathbf{f}(\mathbf{w}) = (f_1(\mathbf{w}), f_2(\mathbf{w}), f_3(\mathbf{w}))^T$  zusammengefasst. Die Modellgleichungen (4) können so in der kompakten Form

$$\frac{\partial w_i}{\partial x}(x, t) + \sigma_i \frac{\partial w_i}{\partial t}(x, t) = f_i(\mathbf{w}(x, t)), \quad i = 1, 2, 3 \quad (6)$$

angeschrieben werden.

## 4 Parametrierung der Trajektorien

### 4.1 Parallelstromfall – Parametrierung durch die Zuflussgrößen

Für den nach dem Parallelstromprinzip betriebenen Reaktor ist die Parametrierung von Übergängen ähnlich einfach wie für das in Abschnitt 2 diskutierte Modell. Die gleichen Argumente führen auch hier zu der Einsicht, dass Übergänge zwischen stationären Regimes mit Hilfe beliebiger für die Zuflussgrößen vorgegebener Übergangstrajektorien realisiert werden können. Die stationären Endwerte dieser Trajektorien können wiederum aus der zugehörigen stationären Randwertaufgabe berechnet werden. Dennoch wird auch hier eine genaue mathematische Diskussion durchgeführt. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse sollen genutzt werden, um einerseits die alternative Parametrierung mit Hilfe der aus technologischer Sicht interessanteren Abflussgrößen und andererseits den Steuerungsentwurf auch für den Gegenstromfall zu ermöglichen.

Aus mathematischer Sicht stellt sich im hier betrachteten Parallelstromfall eine spezielle Randwertaufgabe, bei

der sämtliche Randwerte an der Stelle  $x = 0$  gegeben sind. Dies kann auch als Anfangswertproblem bezüglich des Orts mit vorgegebenen Werten bei  $x = 0$  interpretiert werden.

Um die gewünschte Parametrierung zu erhalten, wird jede der Modellgleichungen, ähnlich wie in Abschnitt 2, entlang ihrer charakteristischen Kurve angeschrieben. Aus (6) erhält man entlang der Kurven  $t = \tau_i + \sigma_i x$

$$\frac{dw_i}{dx}(x, \tau_i + \sigma_i x) = f_i(\mathbf{w}(x, \tau_i + \sigma_i x)), \quad i = 1, 2, 3. \quad (7)$$

Dadurch kann das System von pDgl. entlang der Charakteristiken in ein System von Differentialgleichungen mit Ableitungen nach nur einer Variable transformiert werden. Da jedoch die Strömungsgeschwindigkeiten in den beiden Rohren im Allgemeinen unterschiedlich sind, stimmen die charakteristischen Kurven der verschiedenen Gleichungen nicht überein. Deshalb haben die Gleichungen unterschiedliche Zeitskalen, woraus Totzeiten und Prädiktionen resultieren, die bei der Integration von (7) mit den Randbedingungen (5) beachtet werden müssen.

Die Bestimmung einer geschlossenen Lösung der Funktional-Differentialgleichungen (7) ist im Allgemeinen nicht möglich, stattdessen kommen numerische Methoden zum Einsatz. Dazu integriert man zunächst (7) und ersetzt anschließend  $\tau_i$  wieder durch  $t - \sigma_i x$ :

$$w_i(x, t) = w_i(0, t - \sigma_i x) + \int_0^x f_i(\mathbf{w}(\xi, t - \sigma_i(x - \xi))) d\xi. \quad (8)$$

Diese Gleichungen werden nun mit einem für Anfangswertaufgaben geeigneten numerischen Verfahren gelöst. Dazu bietet sich als einfachste Möglichkeit das explizite Euler-Verfahren mit der Schrittweite  $h$  an:

$$w_i(x + h, t) = w_i(x, t - \sigma_i h) + hf_i(\mathbf{w}(x, t - \sigma_i h)).$$

Natürlich sollten solche Methoden nur dann angewandt werden, wenn die Existenz im gesamten Intervall  $[0, L]$  gesichert ist<sup>4</sup>. Diesem Problem ist Abschnitt 4.4 gewidmet.

### 4.2 Übergänge zwischen stationären Profilen

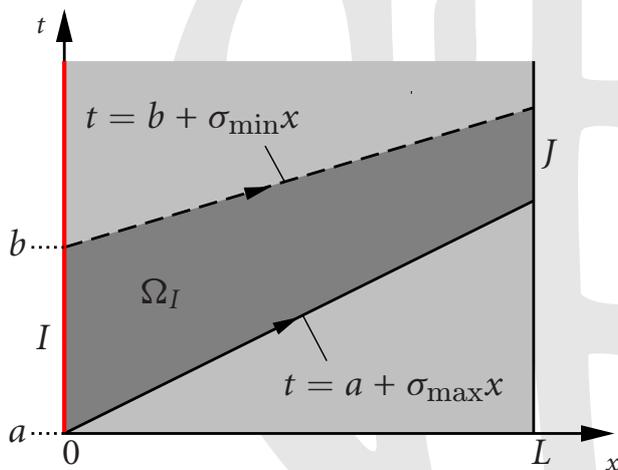
Um die Parametrierung von Übergängen zwischen stationären Profilen vorzubereiten, wird nachfolgend zunächst diskutiert, auf welchen Teilmengen  $J \subset \mathbb{R}$  die Trajek-

<sup>4</sup> Insbesondere werden in dieser Arbeit stetige Lösungen  $\mathbf{w}$  der Integralgleichung (8) betrachtet. Diese Lösungen erfüllen die Randwertaufgabe (7) nur im schwachen Sinne. Andernfalls müsste zusätzlich Differenzierbarkeit gefordert werden. Natürlich können statt der stetigen Funktionen auch andere Funktionenräume als Lösungsräume angesetzt werden, wie beispielsweise die bekannten  $L^p$ -Räume integrierbarer Funktionen. Für eine zu Abschnitt 4.4 analoge Diskussion der Existenz und Eindeutigkeit ist lediglich notwendig, dass die entsprechenden Räume die Struktur von Banachräumen besitzen. In dieser Arbeit wird der Raum der stetigen Funktionen einerseits aufgrund seiner relativ einfachen Struktur gewählt: Zu seinem Verständnis sind keinerlei Kenntnisse der Lebesgueschen Integrationstheorie nötig. Andererseits sind vor allem stetige Lösungen in Anwendungen relevant.

torien  $t \mapsto w(L, t)$  der Abflussgrößen berechnet werden können, wenn die Trajektorien  $t \mapsto w(0, t)$  der Zuflussgrößen auf einem Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  vorgegeben werden. Zu diesem Zweck wird diejenige Menge  $\Omega_I \subset [0, L] \times \mathbb{R}$  bestimmt, die einerseits  $\{0\} \times I$  enthält und auf der andererseits die Gleichungen (8) mathematisch sinnvoll, die Integrale in (8) also für alle  $(x, t) \in \Omega_I$  wohldefiniert sind. Dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn die Abschnitte  $\{(\xi, t - \sigma_i(x - \xi)) : \xi \in [0, x]\}$ ,  $i = 1, 2, 3$  sämtlicher Charakteristiken durch  $(x, t)$  für beliebige  $(x, t) \in \Omega_I$  wiederum komplett in  $\Omega_I$  enthalten sind. Dies wird für das Intervall  $I = [a, b]$  durch die Wahl

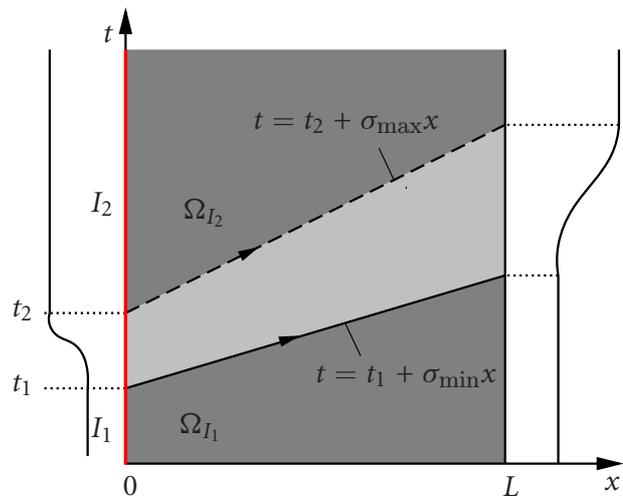
$$\Omega_I = \{(x, t) : x \in [0, L], a + \sigma_{\max}x \leq t \leq b + \sigma_{\min}x\}$$

mit  $\sigma_{\max} = \max_i(\sigma_i)$  und  $\sigma_{\min} = \min_i(\sigma_i)$  erreicht (siehe Bild 2). Gilt  $b - a > L(\sigma_{\max} - \sigma_{\min})$  so entspricht  $\Omega_I$  einem Trapez<sup>5</sup>, das durch die charakteristischen Kurven sowie die Ränder begrenzt wird, und es gilt  $J = [a + \sigma_{\max}L, b + \sigma_{\min}L]$ . Unter Berücksichtigung der Ausführungen in Abschnitt 4.4 zur Existenz und Eindeutigkeit kann nun gefolgert werden, dass die Lösung auf  $\Omega_I$  und damit auf  $J$  ausschließlich von der auf  $I$  vorgegebenen Zuflussstrajektorie abhängt und durch diese eindeutig bestimmt ist. Zur Betrachtung eines Übergangs zwischen Ruhelagen werden die Zeitverläufe der Zuflussgrößen für  $t < t_1$  und  $t > t_2$  stationär, also zeitlich konstant, vorgegeben (siehe Bild 3). Der Übergang zwischen den stationären Werten findet am linken Rand folglich auf dem Intervall  $[t_1, t_2]$  statt. Entsprechend der vorstehenden Diskussion bestimmen die zeitlich konstanten Randtrajektorien auf  $I_1 = (-\infty, t_1)$  bzw.  $I_2 = (t_2, \infty)$  die Lösung auf den Gebieten  $\Omega_{I_1} = \{(x, t) : t < t_1 + \sigma_{\min}x\}$  und  $\Omega_{I_2} = \{(x, t) : t > t_2 + \sigma_{\max}x\}$  vollständig. Die Lösung ist deshalb auf  $\Omega_{I_1}$  und  $\Omega_{I_2}$  ebenfalls sta-



**Bild 2** Parallelstrombetrieb: Bestimmungsbereich der Lösung bei Vorgabe der Zuflussgrößen auf dem Intervall  $[a, b]$ .

<sup>5</sup> Andernfalls ist  $\Omega_I$  ein Dreieck, das ebenfalls vom linken Rand und den Charakteristiken begrenzt wird. In diesem Fall besteht  $J$  entweder aus einem einzigen Punkt oder ist sogar leer.



**Bild 3** Parallelstrombetrieb: Übergang zwischen stationären Regimes bei Parametrierung durch die Zuflussgrößen.

tionär in dem Sinne, dass  $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$  gilt. Der Übergang zwischen den stationären Regimes findet folglich auf dem Gebiet  $[0, L] \times \mathbb{R} \setminus (\Omega_{I_1} \cup \Omega_{I_2})$  statt, d. h. auf

$$\{(x, t) : t_1 + \sigma_{\min}x \leq t \leq t_2 + \sigma_{\max}x\}.$$

Die diskutierte Parametrierung kann im Sinne des flachheitsbasierten Steuerungsentwurfs betrachtet werden. Sie erlaubt es, Lösungen aus den Trajektorien geeigneter Größen zu konstruieren. Diese Größen können als ein flacher Ausgang betrachtet werden.

### 4.3 Flachheitsbasierte Parametrierung und der Gegenstromfall

Die im vorhergehenden Abschnitt beschriebene Methode liefert eine Möglichkeit zur Parametrierung von Trajektorien für einen Rohrreaktor im Parallelstrombetrieb. Mit ihr können sehr einfach Übergänge zwischen stationären Profilen realisiert werden. Dazu müssen lediglich Übergänge zwischen konstanten Zuflussgrößen parametrieren werden. Für praktische Anwendungen werden jedoch die Trajektorien der Abflussgrößen von größerem Interesse sein als jene der Zuflussgrößen.

Offensichtlich kann das beschriebene Vorgehen dahingehend abgeändert werden, dass man die Randtrajektorien bei  $x = L$  statt bei  $x = 0$  vorgibt und die sich ergebende Randwertaufgabe in negativer Richtung löst. Das sich dadurch ergebende Problem besteht darin, dass diese Randwerte nicht den physikalischen Randbedingungen entsprechen und deshalb nicht direkt eingestellt werden können. Dies ist jedoch gar nicht nötig: Sind sämtliche Zuflussgrößen Stellgrößen, so kann die durch die Abflusstrajektorien parametrierte Lösung dadurch realisiert werden, dass die nötigen Zuflussstrajektorien aus den tatsächlichen physikalischen Randbedingungen abgelesen werden.

Dass auch aus mathematischer Sicht kein Unterschied zwischen den beiden Parametrierungen besteht, wird

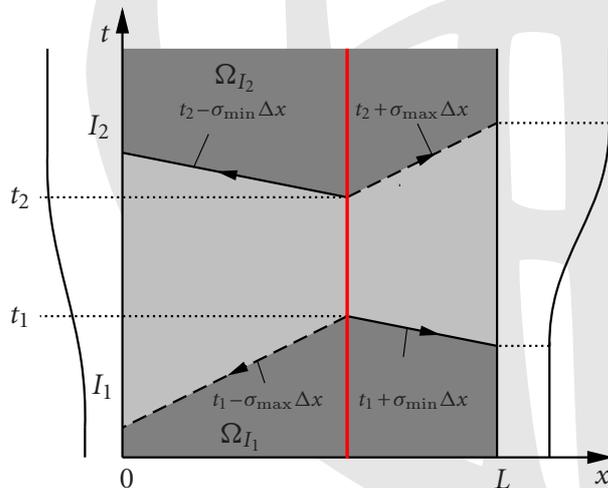
deutlich wenn man zunächst Gleichung (7) auf dem Intervall  $[L, x]$  integriert:

$$w_i(x, t) = w_i(L, t + \sigma_i(L - x)) + \int_L^x f_i(\mathbf{w}(\xi, t - \sigma_i(x - \xi))) d\xi.$$

Durch Einführen der neuen Koordinate  $\tilde{x} = L - x$  und der Funktionen  $\tilde{w}_i(\tilde{x}, t) = w_i(x, t)$  kann diese Gleichung in eine Form überführt werden, die sich von (8) nur durch die Vorzeichen unterscheidet:

$$\tilde{w}_i(\tilde{x}, t) = \tilde{w}_i(0, t + \sigma_i\tilde{x}) - \int_0^{\tilde{x}} f_i(\tilde{\mathbf{w}}(\xi, t + \sigma_i(\tilde{x} - \xi))) d\xi.$$

Die Möglichkeit, Lösungen durch Randwerte zu parametrieren, die keine Stellgrößen sind, kann nun auch zur Trajektorienplanung für einen nach dem Gegenstromprinzip betriebenen Reaktor genutzt werden. Dessen Modell unterscheidet sich von dem im Parallelstromprinzip betriebenen Reaktor lediglich durch die Vorzeichen der Parameter  $\sigma_i$ , was auf die mathematischen Untersuchungen keinen Einfluss hat. Auch hier können die Randtrajektorien bei  $x = 0$  oder  $x = L$  zur Parametrierung verwendet werden. Unabhängig davon, für welchen Rand man sich entscheidet, werden dabei sowohl Zufluss- als auch Abflustrajektorien vorgegeben. Noch allgemeiner kann die Lösung auch durch die Trajektorien an einem beliebigen Punkt im Inneren des Reaktors parametriert werden. Diese Entscheidung ist ausschließlich von technologischen Erwägungen abhängig: Ist man beispielsweise speziell an der Abflusskonzentration interessiert, so ist es sinnvoll, die Randwerte an der Stelle  $x = L$  als flachen Ausgang zu verwenden. Zur Veranschaulichung der vorstehenden Diskussion ist in Bild 4 der Einflussbereich eines Übergangs zwischen stationären Regimes dargestellt, der nicht am Rand parametriert wurde, sondern an einer beliebigen Stelle  $x_0 \in [0, L]$ .



**Bild 4** Zum Übergang zwischen stationären Regimes bei Vorgabe der Lösung an der Stelle  $x_0$  mit  $\Delta x = x - x_0$ .

#### 4.4 Abschätzungen des Existenzintervalls – Einschränkungen für die Trajektorie des flachen Ausgangs

Wie bereits das in Abschnitt 2 betrachtete Beispiel verdeutlicht, müssen die Lösungen der Gleichungen (8) keineswegs auf beliebig großen Intervallen existieren. Dieses Problem bedarf insbesondere im hier betrachteten allgemeineren Fall einer sorgfältigen Analyse. Andernfalls kann nicht gesichert werden, dass die zur Lösung verwendeten numerischen Verfahren überhaupt sinnvolle Ergebnisse liefern.

Wenn man die Zuflusskonzentration als einen Teil des flachen Ausgangs benutzt, kann argumentiert werden, dass das Existenzintervall beliebig groß ist: Während der Reaktion wird sich die Konzentration verringern, bei physikalisch sinnvoller Modellierung jedoch nie negativ werden. Da die thermische Energie, die dem System zugeführt wird, nur aus der Reaktion stammt, werden die Temperaturen ebenfalls begrenzt sein. Obwohl diese Argumentation den Verzicht auf eine Diskussion hinsichtlich endlicher Fluchtzeiten rechtfertigt, so ist sie keinesfalls mathematisch exakt. Ist hingegen die Ausgangskonzentration Teil des flachen Ausgangs, so ist die Argumentation nicht mehr haltbar, wodurch die Diskussion der Existenz an Bedeutung gewinnt.

Es ist bekannt, dass die eindeutige Lösung der Funktional-Differentialgleichungen (7) lokal unter Verwendung einer Picard-Iteration gewonnen werden kann. Dazu muss vorausgesetzt werden, dass die Funktionen  $f_i$  Lipschitz-Bedingungen erfüllen [3]. Um ein solches Iterationsschema zu erhalten, geht man von der Integralform (8) der Modellgleichungen aus, deren rechte Seite als Abbildung  $A : X \rightarrow X$  mit  $X = C_0([0, L] \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$  aufgefasst wird. Gleichung (8) kann dann in der Form  $\mathbf{w} = A\mathbf{w}$  mit

$$(A\mathbf{w})_i(x, t) = w_i(0, t - \sigma_i x) + (B\mathbf{w})_i(x, t) \tag{9}$$

$$(B\mathbf{w})_i(x, t) = \int_0^x f_i(\mathbf{w}(\xi, t - \sigma_i(x - \xi))) d\xi$$

angeschrieben werden. Die Lösung erhält man (zumindest lokal) aus  $\mathbf{w}(x, t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{w}_k(x, t)$ , wobei die Folge  $\{\mathbf{w}_k\}$  rekursiv durch

$$\mathbf{w}_{k+1} = A\mathbf{w}_k \tag{10}$$

definiert ist und  $\mathbf{w}_0$  beliebig gewählt werden kann. Man kann sich leicht verdeutlichen, dass der Grenzwert dieser Folge in Form der Reihe

$$\mathbf{w}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} (B^k \boldsymbol{\omega})(x, t)$$

dargestellt werden kann, wobei  $B^k$  der  $k$ -fachen Anwendung von  $B$  entspricht,  $B^0$  die Identität ist und  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$  mit  $\omega_i(x, t) = w_i(0, t - \sigma_i x)$  gilt.

Um die Konvergenz der Iterationsvorschrift (10) zu untersuchen, benutzt man den dreidimensionalen

euklidischen Raum  $\mathbb{R}^3$ , sowie den Funktionenraum  $C_0^3(\Theta) := (C_0(\Theta))^3$  der auf  $\Theta$  definierten stetigen Funktionen, wobei  $\Theta$  dem Kontext entsprechend unterschiedlich gewählt werden kann. Insbesondere werden die in Abschnitt 4.2 definierte Menge  $\Omega_I$  und deren Durchschnitt  $\Omega_{I,x}$  mit einer Parallelen der Zeitachse durch den Punkt  $(x, 0)$  benötigt. Ausgestattet mit der Supremumsnorm wird  $C_0^3(\Theta)$  zu einem Banachraum. Zur Vereinfachung der Notation wird für diese Norm nachfolgend die Schreibweise  $\|\cdot\|_\Theta$  statt  $\|\cdot\|_{C_0^3(\Theta)}$  verwendet<sup>6</sup>.

Die in Gleichung (9) definierte Abbildung  $A$  wird nun durch

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{w}\|_{\Omega_{I,x}} &\leq \widehat{w}_0 + \left\| \int_0^x \mathbf{f}(\mathbf{w}(\xi, \cdot)) d\xi \right\|_{\Omega_{I,x}} \\ &\leq \widehat{w}_0 + \int_0^x \|\mathbf{f}(\mathbf{w}(\xi))\|_{\Omega_{I,\xi}} d\xi \end{aligned} \quad (11)$$

mit  $\widehat{w}_0 = \|\mathbf{w}(0)\|_{\Omega_{I,0}}$  nach oben abgeschätzt.

Als nächstes wählt man eine monoton steigende Funktion  $\widehat{f}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  derart, dass  $\|\mathbf{f}(\mathbf{w}(x))\|_{\Omega_{I,x}} \leq \widehat{f}(\widehat{w}(x))$  mit  $\widehat{w}(x) = \|\mathbf{w}(x)\|_{\Omega_{I,x}}$  gilt. Mit dieser Funktion folgt für die rechte Seite von (11)

$$\widehat{w}_0 + \int_0^x \|\mathbf{f}(\mathbf{w}(\xi))\|_{\Omega_{I,\xi}} d\xi \leq \widehat{w}_0 + \int_0^x \widehat{f}(\widehat{w}(\xi)) d\xi.$$

Existiert die Lösung der Gleichung

$$\omega(x) = \widehat{w}_0 + \int_0^x \widehat{f}(\omega(\xi)) d\xi \quad (12)$$

auf dem Intervall  $[0, L]$  und nimmt man an, dass  $\widehat{w} \leq \omega$ , so erhält man aufgrund der Monotonie von  $\widehat{f}$

$$\|A\mathbf{w}\|_{\Omega_{I,x}} \leq \widehat{w}_0 + \int_0^x \widehat{f}(\omega(\xi)) d\xi = \omega(x).$$

Die Abbildung  $A$  kann somit alternativ als Abbildung  $X_\omega \rightarrow X_\omega$  auf der Menge  $X_\omega = \{\mathbf{v} \in C_0^3(\Omega_I) : \|\mathbf{v}(x)\|_{\Omega_{I,x}} \leq \omega(x)\}$  interpretiert werden.

Als nächstes wird gezeigt, dass falls  $\mathbf{f}$  auf  $[0, L]$  der Lipschitz-Bedingung

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{w}) - \mathbf{f}(\mathbf{v})\|_{\Omega_I} \leq \Lambda \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\Omega_I}$$

genügt, dort die Beziehung

$$\|A^{k+1}\mathbf{w} - A^{k+1}\mathbf{v}\|_{\Omega_I} \leq L^{k+1} \frac{\Lambda^{k+1}}{(k+1)!} \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\Omega_I} \quad (13)$$

gilt.

<sup>6</sup>Die Norm von Funktionen in zwei Argumenten wird auch  $\|g(x, \cdot)\|_{\Omega_{I,x}} = \|g(x)\|_{\Omega_{I,x}}$  geschrieben.

Dazu wird zunächst angenommen, dass für beliebige  $x \in [0, L]$  und für ein beliebiges  $k$  die Ungleichung

$$\|(A^k \mathbf{w})(x) - (A^k \mathbf{v})(x)\|_{\Omega_{I,x}} \leq x^k \frac{\Lambda^k}{k!} \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\Omega_I}$$

gelte, dies trifft trivialerweise für  $k = 0$  zu. Dadurch erhält man

$$\begin{aligned} &\|(A^{k+1} \mathbf{w})(x) - (A^{k+1} \mathbf{v})(x)\|_{\Omega_{I,x}} \\ &= \left\| \int_0^x \mathbf{f}((A^k \mathbf{w})(\xi, \cdot)) - \mathbf{f}((A^k \mathbf{v})(\xi, \cdot)) d\xi \right\|_{\Omega_{I,x}} \\ &\leq \int_0^x \xi^k \frac{\Lambda^{k+1}}{k!} \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\Omega_I} d\xi \\ &= x^{k+1} \frac{\Lambda^{k+1}}{(k+1)!} \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|_{\Omega_I} \end{aligned}$$

und somit (13).

Nach diesen Vorarbeiten kann der Fixpunktsatz von Weissinger [15] verwendet werden, um auf die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung zu schließen (vgl. auch [2]):

**Fixpunktsatz von Weissinger ([2]).** Sei  $(\alpha_k)$  eine Folge positiver reeller Zahlen, sodass

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$$

konvergiert. Seien darüber hinaus  $X$  eine nichtleere Teilmenge eines Banachraums  $E$  mit der Norm  $\|\cdot\|$  und  $A$  eine Selbstabbildung in  $X$  derart, dass für alle  $k \in \mathbb{N}$  und  $f, g \in X$  die Abschätzung

$$\|A^k f - A^k g\| \leq a_k \|f - g\|$$

gilt. Dann konvergiert die Folge  $(A^n w_0)$  mit  $w_0 \in X$  gegen die eindeutige Lösung  $w \in X$  des Fixpunktproblems  $w = Aw$ .

Hat man eine passende Abschätzung  $\widehat{f}$  für die rechte Seite  $\mathbf{f}$  der Differentialgleichung (6) gefunden, so verbleibt schließlich die Aufgabe, die Funktion  $\omega$  zu bestimmen, die der Integralgleichung (12) genügt, bzw. der ihr entsprechenden Differentialgleichung

$$\frac{d\omega}{dx}(x) = \widehat{f}(\omega(x)). \quad (14)$$

Insbesondere ist zu prüfen, auf welchem Intervall die Lösung von (14) existiert, um daraus auf das Existenzintervall des ursprünglichen Problems (8) zu schließen.

Da es sich bei (14) um eine gewöhnliche skalare Differentialgleichung handelt, ist das Existenzproblem wesentlich einfacher zu behandeln als das ursprünglich gestellte. Mitunter gelingt es sogar eine geschlossene Lösung zu berechnen, wie dies im einführenden Beispiel in

Abschnitt 2 der Fall war. Ansonsten betrachte man statt (14) die Differentialgleichung für die Umkehrfunktion von  $\omega$ :

$$\frac{dx}{d\omega}(\omega) = \frac{1}{\widehat{f}(\omega)}. \quad (15)$$

Die rechte Seite von (15) hängt nicht von der Lösung dieser Differentialgleichung ab und führt auf das Integral

$$x(\omega) = \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{1}{\widehat{f}(\theta)} d\theta$$

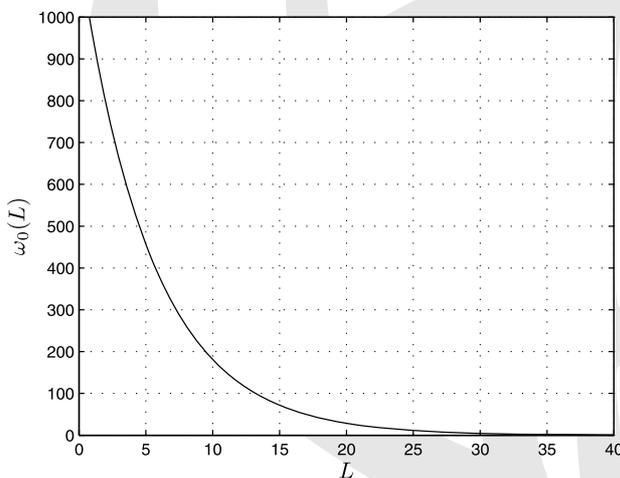
mit  $\omega_0 > 0$ . Aus der Monotonie, der Stetigkeit von  $\widehat{f}$  sowie aus  $\widehat{f}(\omega) > 0$  für  $\omega > 0$  folgt, dass dieses Integral für beliebige  $\omega > 0$  wohldefiniert ist. Von Interesse ist nun insbesondere das Verhalten des Integrals für  $\omega \rightarrow \infty$ . Bleibt  $x$  dabei beschränkt, so erhält man durch  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} x(\omega)$  das Existenzintervall der Lösung von (14) mit der Anfangsbedingung  $\omega(0) = \omega_0$ . Integriert man die Gleichung (15) lediglich bis zu  $\bar{\omega}$ , so kann sichergestellt werden, dass die Lösung von (14) zumindest auf dem Intervall  $[0, x(\bar{\omega})]$  existiert. Diese Integration kann numerisch durchgeführt werden. Mögliche Anfangswerte  $\omega_0$  erhält man beispielsweise durch Rückwärtsintegration. Diese können alternativ auch aus einem Diagramm abgelesen werden, in dem der Graph der Funktion  $\omega \mapsto x(\omega)$  dargestellt wird (siehe Bild 5).

Im konkreten Fall des Rohrreaktors mit Wärmetauscher kann die rechte Seite von (4) mit der Funktion

$$\widehat{f}(\omega(x)) = \gamma_1 \omega(x) + \gamma_2 \omega^k(x) \text{He}^{-\frac{E}{R\omega(x)}}$$

nach oben abgeschätzt werden. Der Parameter  $k$  entspricht dabei der Reaktionsordnung,  $\gamma_1 = \max(\beta_c/v_c, \beta/v)$  und  $\gamma_2 = |\alpha/v|$ .

In Bild 5 wird der – geschätzte – maximale Anfangswert  $\omega_0 = \omega(0)$  in Abhängigkeit von der Länge  $L$  des



**Bild 5** Maximal möglicher Anfangswert  $\omega_0(L)$  für eine Reaktion zweiter Ordnung.

Integrationsintervalls für eine Reaktion zweiter Ordnung ( $k = 2$ ) dargestellt.

### 5 Numerische Auswertung der Integrale

Zur numerischen Integration können bekannte Lösungsverfahren für gewöhnliche Differentialgleichungen benutzt werden. So wurde neben dem expliziten Euler-Verfahren die Methode von Heun als Vertreter der Runge-Kutta-Verfahren untersucht. Da bei dem betrachteten Beispiel nur zwei verschiedene, im Voraus bekannte charakteristische Kurven auftreten, kann ein festes Gitter gewählt werden, auf dem die Lösung ohne Interpolation berechnet werden kann (siehe Bild 6). Dies ist jedoch in der Regel bei Problemen mit einer größeren Anzahl verschiedener charakteristischer Kurven sowie quasilinearen Systemen nicht mehr möglich, was sich besonders auf den numerischen Lösungsaufwand auswirkt.

Dieses feste Gitter erhält man, indem man entlang der charakteristischen Kurven  $t = \tau + x/v$  diskretisiert und anschließend eine geeignete Zeitschrittweite wählt. Zur vereinfachten Darstellung werden Funktionswerte auf dem Gitter in der Form

$$w_i \left( n\Delta X, m\Delta T + \frac{n\Delta X}{v} \right) = w_i^{n,m}$$

angeschrieben. Wählt man die Zeitschrittweite

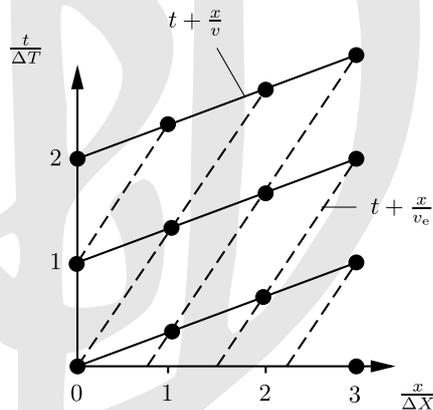
$$\Delta T = \Delta X \left| \frac{1}{v} - \frac{1}{v_c} \right|,$$

so erhält man mit  $s = \text{sgn} \left( \frac{1}{v} - \frac{1}{v_c} \right)$  für z. B. das Euler-Verfahren eine Iterationsvorschrift der Form

$$w_1^{n,m} = w_1^{n-1,m} + \Delta X f_1(w^{n-1,m})$$

$$w_2^{n,m} = w_2^{n-1,m} + \Delta X f_2(w^{n-1,m})$$

$$w_3^{n,m} = w_3^{n-1,m+s} + \Delta X f_3(w^{n-1,m+s}).$$

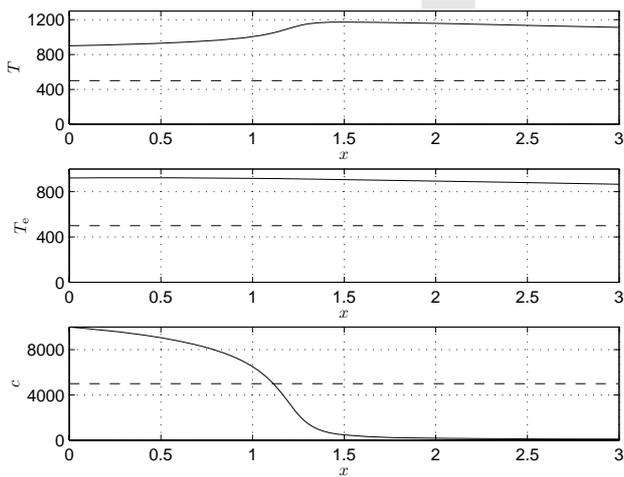


**Bild 6** Darstellung der Gitterpunkte zur numerischen Integration entlang der Charakteristiken.

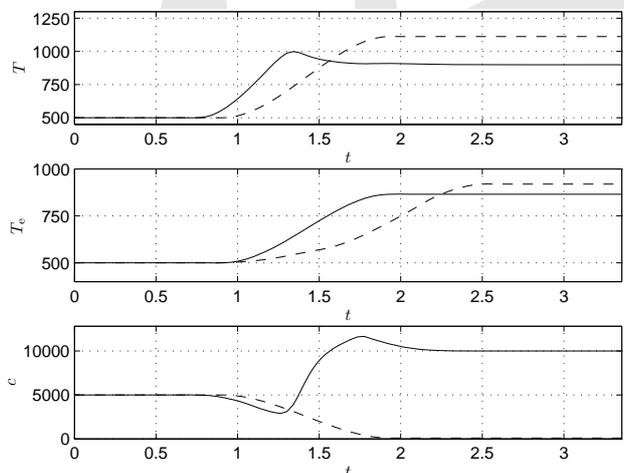
Das Heun-Verfahren kann in einer ähnlichen Art und Weise dargestellt werden, erfordert jedoch eine zusätzliche Auswertung der Funktionen  $f_i$ .

### 6 Simulationsergebnisse

Zur Illustration der hergeleiteten Steuerstrategie wurde das folgende Szenario im Gegenstromfall betrachtet. Das stationäre Anfangsregime ist durch die Werte  $T(0, t) = 500$  K,  $T_c(0, t) = 500$  K und  $c(0, t) = 5000$  mol/m<sup>3</sup> für  $t \leq 0$  gegeben. Bei diesen Werten läuft kaum eine Reaktion ab (siehe Bild 7). Das Endregime wird durch die Werte  $T(0, t) = 900$  K,  $c(0, t) = 10.000$  mol/m<sup>3</sup> und  $c(L, t) = 100$  mol/m<sup>3</sup> für  $t \geq t_{\text{end}}$  charakterisiert. Das bedeutet, dass während des Übergangs die Zuflusskonzentration erhöht und die Reaktion durch einen Anstieg der Zuflusstemperatur des Reaktanten beschleunigt wird. Für beide Regimes folgt das zugehörige Profil aus den gegebenen Werten.

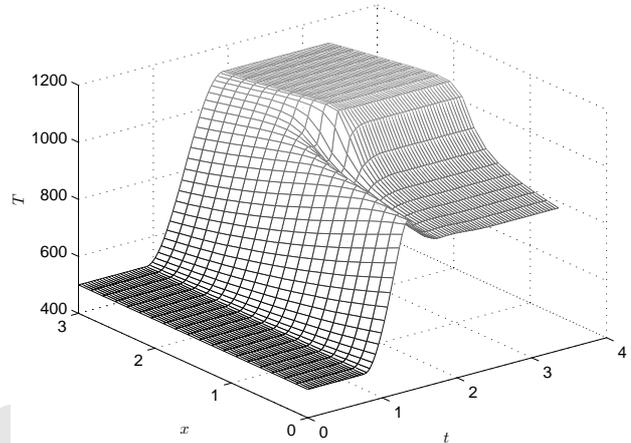


**Bild 7** Stationäre Profile der Systemgrößen (Anfangsregime: gestrichelte Linie, Endregime: durchgezogene Linie).

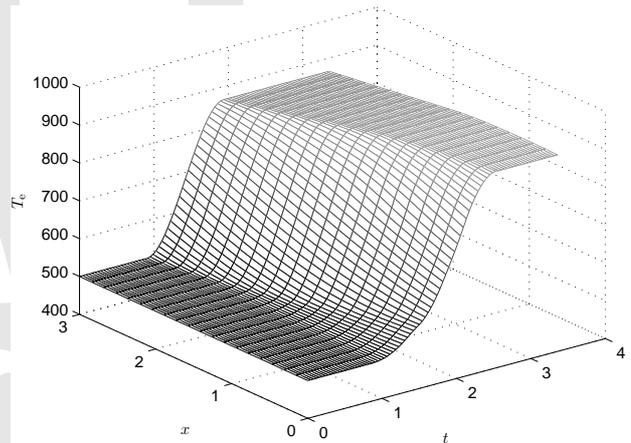


**Bild 8** Zeitverläufe der Zufluss- (durchgezogene Linien) und Abflussgrößen (gestrichelte Linien).

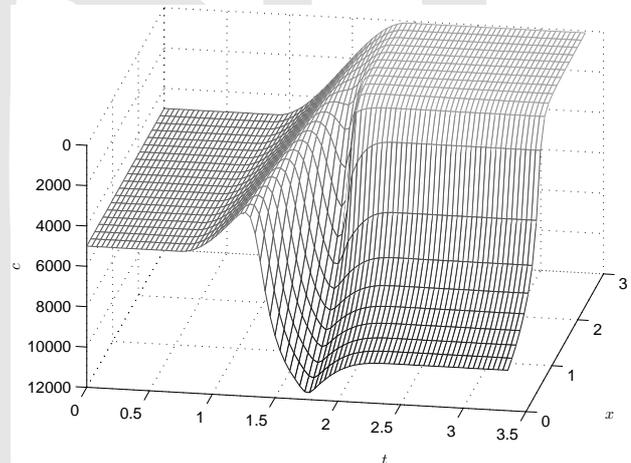
Die Lösung wurde durch die Wahl eines Übergangspolynoms dritten Grades für den flachen Ausgang parametrisiert, der aus den Randwerten an der Stelle  $x = L$  besteht (siehe Bild 8). Die benötigten Anfangs- und End-



**Bild 9** Zeitverlauf der Reaktantentemperatur  $T$ .



**Bild 10** Zeitverlauf der Kühlmitteltemperatur  $T_c$ .



**Bild 11** Zeitverlauf der Konzentration  $c$  ( $c$ -Achse invertiert).

werte dieser Trajektorien folgen aus den stationären Profilen. In den Bildern 9 bis 11 wurden die Profile der Systemgrößen während des Übergangs dargestellt.

Die folgenden numerischen Werte wurden für die konstanten Parameter benutzt:  $L = 3 \text{ m}$ ,  $\alpha = 0,031 \text{ K mol}^{-1}$ ,  $\beta = 3,70 \text{ s}^{-1}$ ,  $\beta_c = 0,55 \text{ s}^{-1}$ ,  $\nu = 20 \text{ m s}^{-1}$ ,  $\nu_c = -5 \text{ m s}^{-1}$ ,  $H = 2,45 \times 10^8 \text{ m}^3 (\text{mol s})^{-1}$ ,  $E = 206 \text{ kJ mol}^{-1}$ .

## 7 Schlussfolgerung

Die vorliegende Arbeit behandelt den Steuerungsentwurf für Systeme hyperbolischer semilinear partieller Differentialgleichungen, mit denen ein Rohrreaktor modelliert wird. Dabei wird ausgenutzt, dass das betrachtete Problem auf eine Randwertaufgabe zurückgeführt werden kann, in der alle Randbedingungen am selben Rand gestellt werden, also ein Cauchy-Problem bezüglich der Ortsvariablen. Dieses wird entlang der Charakteristiken integriert. Dazu werden aus der Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen wohlbekanntes Integrationsverfahren verwendet, die der Problemstellung angepasst werden. Zum Nachweis der Existenz der Lösung wird ein Iterationsverfahren in Kombination mit einem Fixpunktsatz verwendet. Hervorzuheben ist dabei die Tatsache, dass die Lösung der Differentialgleichung durch jene einer gewöhnlichen skalaren Differentialgleichung majorisiert wird, für die das Existenzintervall numerisch abgeschätzt werden kann. Dadurch wird es möglich, Einschränkungen für mögliche Trajektorien für den flachen Ausgang anzugeben.

Bereits anhand der im Beitrag verwendeten Notation wird deutlich, dass die vorgeschlagene Methode keineswegs auf Probleme mit nur zwei Charakteristiken beschränkt ist, eine Erweiterung auf umfangreichere Systeme verkoppelter Transportgleichungen kann unmittelbar erfolgen. Zusätzliche Herausforderungen ergeben sich dabei vor allem für die verwendeten numerischen Verfahren.

Im Gegensatz dazu sind allgemeinere quasilineare Systeme, also solche Systeme, in denen die Charakteristiken nicht mehr im Voraus berechnet werden können, sondern von der Lösung abhängen, wesentlich schwieriger zu behandeln. Obwohl der Steuerungsentwurf für solche Gleichungen prinzipiell mit den gleichen Methoden erfolgen kann [4], ergeben sich sowohl aus numerischer als auch theoretischer Sicht neue interessante Problemstellungen.

Schließlich stellt sich die Frage, wie sich die entwickelten Methoden mit Reglerentwurfsverfahren zu Trajektorienfolgeregelungen kombinieren lassen, beispielsweise jenen aus [5] oder [1].

## Danksagung

Die vorgestellten Ergebnisse entstanden im Rahmen des von der DFG geförderten Projekts Wo-1601/1-1.

## Literatur

- [1] HALLEUX, J. DE: *Boundary Control of Quasi-Linear Hyperbolic Initial Boundary-Value Problems*. Ph.D. Thesis, Université Catholique de Louvain, Belgium, 2004.
- [2] HEUSER, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. B. G. Teubner, Stuttgart, 3. Auflage, 1995.
- [3] JOHN, F.: *Partial Differential Equations*. Springer-Verlag, New York, 4. Auflage, 1991.
- [4] KNÜPPEL, T.: *Beiträge zum flachheitsbasierten Steuerungsentwurf für quasilineare hyperbolische Systeme*. Inst. f. Regelungs- und Steuerungstheorie, TU Dresden, 2009. Diplomarbeit.
- [5] KRSTIC, M. und A. SMYSHLYAEV: *Boundary Control of Pdes: A Course on Backstepping Designs*. Society for Industrial and Applied Mathematics Philadelphia, PA, USA, 2008.
- [6] LYNCH, A. F. und J. RUDOLPH: *Flachheitsbasierte Randsteuerung parabolischer Systeme mit verteilten Parametern*. at – Automatisierungstechnik, 48:478–486, 2000.
- [7] LYNCH, A. F. und J. RUDOLPH: *Flatness-based boundary control of a class of quasilinear parabolic distributed parameter systems*. Internat. J. Control, 75(15):1219–1230, 2002.
- [8] MEURER, T. und A. KUGI: *Trajectory Planning for Boundary Controlled Parabolic PDEs With Varying Parameters on Higher-Dimensional Spatial Domains*. IEEE Transactions on Automatic Control, 54(8):1854–1868, 2009.
- [9] MEURER, T. und M. ZEITZ: *Flachheitsbasierte Steuerung und Regelung eines Wärmeleitsystems*. at – Automatisierungstechnik, 52(9):411–420, 2004.
- [10] RUDOLPH, J.: *Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension*. Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik. Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [11] RUDOLPH, J., J. WINKLER und F. WOITTENNEK: *Flatness based control of distributed parameter systems: Examples and computer exercises from various technological domains*. Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik. Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [12] RUDOLPH, J. und F. WOITTENNEK: *Trajektorienplanung für gewisse lineare Systeme mit verteilten Parametern*. at – Automatisierungstechnik, 54(5), 2006.
- [13] RUDOLPH, J. und F. WOITTENNEK: *Motion planning and open loop control design for linear distributed parameter systems with lumped controls*. Internat. J. Control, 81(3):457–474, 2008.
- [14] WAGNER, M. O., T. MEURER und A. KUGI: *Feedforward control design for the wave equation with nonlinear boundary conditions modelling a torsional rod*. In: *47th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 1459–1464, 2008.
- [15] WEISSINGER, J.: *Zur Theorie und Anwendung des Iterationsverfahrens*. Math. Nachr., 8, 1952.
- [16] WOITTENNEK, F.: *Beiträge zum Steuerungsentwurf für lineare, örtlich verteilte Systeme mit konzentrierten Stelleingriffen*. Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik. Shaker Verlag, Aachen, 2007.

Manuskripteingang: 30. März 2009



**Dipl.-Ing. Torsten Knüppel** ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie (Prof. K. Röbenack) der TU Dresden. Hauptarbeitsgebiete: Lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme.

Adresse: Technische Universität Dresden, Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, 01062 Dresden,  
E-Mail: Torsten.Knueppel@tu-dresden.de



**Dr.-Ing. Frank Woittennek** ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie (Prof. K. Röbenack) der TU Dresden. Hauptarbeitsgebiete: lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme, nichtlineare Steuerung und Regelung mechanischer Systeme.

Adresse: siehe oben,  
E-Mail: Frank.Woittennek@tu-dresden.de



**Univ.-Prof. Dr.-Ing. Joachim Rudolph** ist Leiter des Lehrstuhls für Systemtheorie und Regelungstechnik an der Universität des Saarlandes. Hauptarbeitsgebiete: Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Regelstrecken, algebraische Methoden, lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme; Anwendungen in der Mechatronik und der Verfahrenstechnik.

Adresse: Universität des Saarlandes, Lehrstuhl für Systemtheorie und Regelungstechnik, 66041 Saarbrücken, E-Mail: J.Rudolph@lrs.uni-saarland.de



## Regelungstechnik und MATLAB ideal kombiniert



Helmut Bode  
**Systeme der Regelungstechnik mit MATLAB und Simulink**  
Analyse und Simulation

2010 | 448 S. | Broschur | € 34,80  
ISBN 978-3-486-59083-8

Das Buch stellt die Einsatzmöglichkeiten von MATLAB und Simulink in der Regelungstechnik zur Analyse und computergestützten Simulation dynamischer Systeme vor. Neben Definitionen und Bemerkungen zur Historie der Automatisierung werden außerdem exemplarisch regelungstechnische Probleme modelliert und simuliert.

Die elementare und umfassende Darstellung ist ausgezeichnet für den Einsatz in der Lehre geeignet. Alle eingesetzten MATLAB-Codes werden auch auf der Website des Verlags zum Download angeboten.

**Das Buch richtet sich an Studierende der Elektrotechnik, des Maschinenbaus, der Automatisierungstechnik, der Verfahrenstechnik sowie der Systemtechnik und Mechatronik.**

Bestellen Sie in Ihrer Fachbuchhandlung oder direkt bei uns:  
Tel: 089/45051-248, Fax: 089/45051-333, [verkauf@oldenbourg.de](mailto:verkauf@oldenbourg.de)  
[www.oldenbourg-wissenschaftsverlag.de](http://www.oldenbourg-wissenschaftsverlag.de)