

Flachheitsbasierte Randsteuerung parabolischer Systeme mit verteilten Parametern

Flatness-based Boundary Control of Parabolic Distributed Parameter Systems

Alan F. Lynch und Joachim Rudolph

Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. rer. nat. K. J. Reinschke zum 60. Geburtstag gewidmet

Für durch lineare oder nichtlineare parabolische partielle Differentialgleichungen beschriebene Ausgleichsprozesse werden Randsteuerungen für Übergänge zwischen stationären Profilen berechnet. Die Methode basiert auf einer Flachheitseigenschaft des Systems: Die Lösung, beispielsweise eine orts- und zeitabhängige Temperatur, kann durch einen sogenannten flachen Ausgang beschrieben werden, in diesem Fall durch einen Randwert. Die Berechnungen basieren auf Potenzreihendarstellungen, in denen Zeitableitungen beliebiger Ordnung des flachen Ausgangs auftreten. Die Konvergenz wird durch die Wahl einer nicht-analytischen sogenannten Gevrey-Funktion als Trajektorie für den flachen Ausgang sichergestellt.

The computation of boundary controls for finite time transitions between stationary profiles of several diffusion type processes described by linear or nonlinear parabolic partial differential equations is considered. The control method relies on a flatness property of the system which means the solution, a temperature field for example, can be parametrized in terms of a so-called flat output which is a boundary value in this case. Calculations are based on power series expansions involving time derivatives of arbitrary order of the flat output. Convergence is guaranteed by using a non-analytic so-called Gevrey function as the flat output trajectory.

1 Einleitung

Die Erwärmung eines Körpers durch einen Wärmeeintrag von außen führt auf eine in einer Vielzahl von Varianten immer wiederkehrende Steuerungsaufgabe. Dabei interessiert der Zeitverlauf des ortsabhängigen Temperaturfeldes. Die Steuerung erfolgt über einen Randeingriff. Als vielleicht einfachstes Beispiel für eine solche Aufgabe kann die Erwärmung eines homogenen Stabes endlicher Länge betrachtet werden, wie er in Bild 1 skizziert ist. Der Stab sei über die gesamte Länge und an einem der Enden (bei $z = 0$) wärmeisoliert. Am anderen Ende (bei $z = -L$) soll die Möglichkeit für einen Eingriff gegeben sein.

Es stellt sich folgende Steuerungsaufgabe: Durch einen Wärmeeintrag am Rand erhitze man den Stab derart, dass sich *in endlicher Zeit* ein neues stationäres Temperaturprofil einstellt. Wird keine endliche Übergangszeit angestrebt, so kann diese Aufgabe bekanntlich (aufgrund der Stabilität des Systems) dadurch gelöst werden, dass die dem erwünschten Temperaturprofil entsprechende konstante

Stellgröße eingestellt wird. So wird das stationäre Profil asymptotisch erreicht. Das Erreichen eines dem Sollprofil „hinreichend nahen“ Temperaturprofils kann jedoch, in Abhängigkeit von den Parametern des Systems, eine der Aufgabe unangemessen lange Zeit in Anspruch nehmen.

Reicht es aus, nur die Ortsabhängigkeit der Temperatur in der Längsrichtung des Stabes zu berücksichtigen, und kann der Prozess durch die eindimensionale lineare Wärmelei-

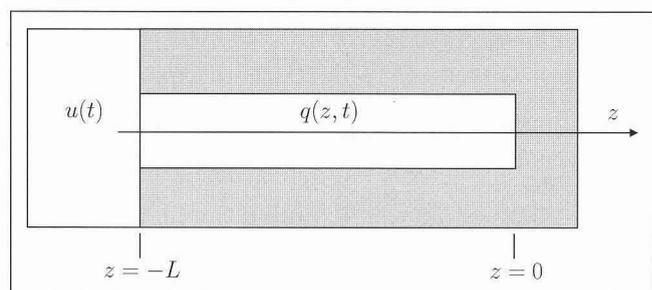


Bild 1: Skizze eines Wärmeleitungssystems mit der Temperatur $q(z, t)$ und der Umgebungstemperatur $u(t)$ als Stellgröße.

tungsgleichung beschrieben werden, dann kann das (in diesem Fall örtlich konstante) stationäre Sollprofil durch gezielte zeitlich veränderliche Steuerung in einer *endlichen* Zeit eingestellt werden. Die erforderliche Übergangszeit hängt zumindest theoretisch nur von eventuellen Beschränkungen für die Stellgröße ab – tatsächlich verliert das lineare Modell bei großen Temperaturänderungen seine Gültigkeit. Wie ein Übergang zwischen stationären Profilen *in endlicher Zeit* für die vorgestellte lineare Wärmeleitungsaufgabe erreicht werden kann, wird in Abschnitt 2 erörtert. Die dort vorgestellte Methode [8; 20] basiert auf der Verwendung eines sogenannten *flachen Ausgangs* für die Darstellung der Lösung mittels einer Potenzreihe in der Ortsvariablen. Wie für die differentiell flachen endlichdimensionalen nichtlinearen Systeme [4; 26] kann damit eine Solltrajektorie für eine als flacher Ausgang bezeichnete Systemgröße y frei gewählt werden, und es steht eine Berechnungsvorschrift zur Verfügung, mit der alle übrigen Systemgrößen aus den Zeitableitungen der Solltrajektorie für y berechnet werden können. Der unendlichdimensionale Charakter des Systems mit verteilten Parametern spiegelt sich dabei im Auftreten unendlich vieler Zeitableitungen von y in der Potenzreihe wider.

Die Wärmeleitungsgleichung stellt bekanntlich eine Normalform für die linearen parabolischen Systeme mit örtlich verteilten Parametern und einer Ortsabhängigen dar. Es überrascht deshalb nicht, dass weitere Ausgleichsvorgänge, die durch parabolische partielle Differentialgleichungen (pDgln.) beschrieben werden, in ähnlicher Weise wie das einführende Beispiel behandelt werden können. Eine solche flachheitsbasierte Steuerung für lineare parabolische Systeme mit verteilten Parametern wurde für den allgemeineren Fall eines chemischen Rohrreaktors in [8] vorgeschlagen – Varianten werden in [9; 20] behandelt. Die zugrundeliegenden Berechnungen mit einem Potenzreihenansatz und die erforderlichen Betrachtungen der Konvergenz der Reihe gehen auf Holmgren zurück – s. insbesondere [11]. In [17] wurde die Verallgemeinerung durch Einführen ortsabhängiger Koeffizienten und nicht-stationärer (in der Ortsvariablen analytischer) Anfangsprofile betrachtet, in [16; 25] die Verallgemeinerung auf den zylindrischen Fall. Als ein nichtlinearer Fall wurde jüngst in [19] das Modell eines isothermen Rohrreaktors mit einer Reaktion zweiter Ordnung untersucht.

Nach einer detaillierten Betrachtung der einleitenden Wärmeleitungsaufgabe im nächsten Abschnitt, wird in Abschnitt 3 ein allgemeineres System betrachtet, das unterschiedliche Wärmeleitungsprozesse oder einfache isotherme Rohrreaktoren beschreiben kann. Dafür wird die Parametrierung der Lösung durch den flachen Ausgang mittels einer formalen Potenzreihe angegeben. Deren Konvergenz für wichtige Sonderfälle ist Thema von Abschnitt 4, wobei die erhaltenen Lösungen durch Simulationsergebnisse veranschaulicht werden. Weitere Verallgemeinerungen des Entwurfsverfahrens werden in einem Ausblick aufgezeigt.

2 Randsteuerung für einen Wärmeleiter

Die Steuerungsmethode kann am besten anhand der linearen Wärmeleitungsaufgabe eingeführt werden. Es sei dazu für den in Bild 1 dargestellten Stab die eingangs gestellte Aufgabe der Randsteuerung zur Erwärmung in endlicher Zeit zu lösen [8; 20].

Wird nur die Ortsabhängigkeit der Temperatur in der Längsrichtung des Stabes berücksichtigt, so kann die zeitlich veränderliche, von der Ortskoordinate z abhängige Temperatur $q(z, t)$ bei hinreichend geringen Schwankungen bekanntlich durch die lineare Wärmeleitungsgleichung

$$\lambda_0 \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}(z, t) = \rho_0 \frac{\partial q}{\partial t}(z, t), \quad z \in (-L, 0), \quad t > 0 \quad (1)$$

beschrieben werden [10; 12]. Darin ist $\rho_0 > 0$ die konstante volumenspezifische Wärmekapazität des Stabes (das Produkt aus der Dichte und der spezifischen Wärmekapazität), $\lambda_0 > 0$ dessen Wärmeleitfähigkeit. Zu Beginn der betrachteten Übergangsvorgänge sei die Temperatur im Stab konstant, so dass wegen der Linearität der partiellen Differentialgleichung die Anfangsbedingung

$$q(z, 0) = 0, \quad z \in [-L, 0]$$

angenommen werden kann. Die Randbedingungen ergeben sich aus der Betrachtung der Wärmeströme an den Rändern zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial z}(0, t) &= 0 \\ \lambda_0 \frac{\partial q}{\partial z}(-L, t) &= \beta (q(-L, t) - u(t)), \end{aligned}$$

mit dem Wärmeaustauschkoeffizienten $\beta > 0$. Darin ist $u(t)$ die als Stellgröße dienende Umgebungstemperatur.

Die Steuerungsaufgabe lautet: Durch einen Wärmeeintrag am Rand erhitze man den Stab derart, dass sich *in endlicher Zeit* t_* ein neues stationäres Temperaturprofil $q_s(z)$ einstellt, also eine ortsabhängige Temperatur $q_s(z)$, die eine Lösung der Randwertaufgabe

$$\begin{aligned} \frac{d^2 q_s}{dz^2}(z) &= 0, \quad z \in [-L, 0] \\ \frac{dq_s}{dz}(0) &= 0, \quad \lambda_0 \frac{dq_s}{dz}(-L) = \beta (q_s(-L) - u_s) \end{aligned}$$

mit $u_s = \text{const.}$ darstellt. Man verifiziert leicht, dass die stationären Profile auch örtlich konstant sind: $q_s(z) = u_s = \text{const.}$

2.1 Lösung durch Potenzreihenansatz

Zur Lösung dieser Steuerungsaufgabe für das Temperaturfeld $q(z, t)$ wird eine Potenzreihe in der Ortsvariablen z angesetzt [8; 20]:

$$q(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(t) \frac{z^k}{k!}. \quad (2)$$

Diese kann – zunächst nur formal – nach z und t abgeleitet werden¹:

$$q_t(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \dot{a}_k(t) \frac{z^k}{k!} \quad \text{und} \quad q_{zz}(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(t) \frac{z^k}{k!}.$$

Durch Einsetzen der erhaltenen Ausdrücke in die Wärmeleitungsgleichung (1) und Vergleich der Koeffizienten der Potenzen in z ergibt sich die rekursive Beziehung

$$a_{k+2}(t) = \frac{\rho_0}{\lambda_0} \dot{a}_k(t), \quad k \geq 0.$$

Auswerten der Randbedingung bei $z = 0$ liefert $a_1 = 0$. Zusammen mit der vorausgegangenen Rekursionsbeziehung folgt daraus das Verschwinden sämtlicher Koeffizienten der ungeraden Potenzen:

$$a_{2k+1} = 0, \quad k \geq 0.$$

Die Berechnung der Lösung $q(z, t)$ ist nun möglich, indem der Koeffizient $a_0(t)$ vorgegeben wird:

$$a_0(t) = y(t).$$

Die so eingeführte Größe y , der *flache Ausgang*, ist gerade die Randtemperatur bei $z = 0$, also an dem dem Stelleinriff gegenüberliegenden Rand.

Damit ergibt sich aus der Rekursionsbeziehung für die Koeffizienten

$$a_{2k}(t) = \left(\frac{\rho_0}{\lambda_0}\right)^k y^{(k)}(t), \quad k \geq 0.$$

Die Funktion y muss offensichtlich unendlich oft differenzierbar sein, also eine C^∞ -Funktion. Die Reihendarstellung des Temperaturverlaufs im Stab lautet damit

$$q(z, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_0}{\lambda_0}\right)^k y^{(k)}(t) \frac{z^{2k}}{(2k)!}. \tag{3}$$

Zur Berechnung des Stellgrößenverlaufs muss nur noch die Randbedingung bei $z = -L$ ausgewertet werden:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\rho_0}{\lambda_0}\right)^k \frac{(-L)^{2k}}{(2k)!} \left[y^{(k)}(t) + \frac{\rho_0 L}{\beta(2k+1)} y^{(k+1)}(t) \right].$$

2.2 Wahl der Solltrajektorie für den flachen Ausgang

Die hergeleiteten, zunächst formalen, Reihendarstellungen führen auf eine Lösung der Steuerungsaufgabe, falls die Funktion $y : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ folgende Bedingungen erfüllt:

- Es ist $y^{(k)}(0) = 0$, für $k \geq 0$; diese Bedingung resultiert aus der Anfangsbedingung $q(z, 0) = 0$.
- Es ist $y^{(k)}(t_*) = 0$, für $k > 0$; dies entspricht der Forderung eines stationären Profils $q(z, t_*) = q_s(z)$.
- Die Funktion y ist eine sogenannte *Gevrey-Funktion der Klasse $\alpha < 2$* :

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |y^{(k)}(t)| \leq m \frac{(k!)^\alpha}{\gamma^k} \quad \alpha < 2, \quad k \geq 0, \tag{4}$$

¹ Es werden $q_t := \frac{\partial q}{\partial t}$, $q_z := \frac{\partial q}{\partial z}$, $q_{zz} := \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}$, $\dot{a}_k := \frac{da_k}{dt}$ und $y^{(k)} := \frac{d^k y}{dt^k}$, $k \geq 0$ verwendet.

mit reellen Konstanten m, γ [11]; die durch die Konstanten m, γ und α bestimmte Menge dieser Gevrey-Funktionen wird hier mit $C_{m,\gamma,\alpha}$ bezeichnet. Diese Forderung garantiert die Konvergenz der verwendeten Potenzreihen für alle z .

Es sei unterstrichen, dass die Funktion y , falls sie nicht identisch Null ist, in $t = 0$ und $t = t_*$ nicht analytisch sein kann, denn analytische Funktionen, deren sämtliche Ableitungen an einer Stelle gleich Null sind, sind konstant. Die Gevrey-Funktionen der Klasse $\alpha = 1$ sind analytisch. Daraus folgt die Bedingung $\alpha > 1$ für einen Übergang zu einem von der Anfangsbedingung verschiedenen stationären Profil $q_s(z)$.

Es kann beispielsweise die schon in [7] verwendete C^∞ -Funktion

$$y(t) = q_s(0) \Phi_\sigma(t)$$

mit $\Phi_\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß

$$\Phi_\sigma(t) = \begin{cases} \int_0^{t/t_*} \phi_\sigma(\tau) d\tau & \text{für } 0 \leq t \leq t_* \\ 1 & \text{für } t > t_* \end{cases} \tag{5}$$

benutzt werden, mit $\phi_\sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ gemäß $\phi_\sigma(t) = \exp(-1/(t(1-t))^\sigma)$ und $\sigma \geq 1$. Die beiden Funktionen ϕ_σ und Φ_σ sind Gevrey-Funktionen der Klasse $\alpha = 1 + 1/\sigma$. Die Funktion Φ_σ wächst für $0 \leq t \leq t_*$ monoton von 0 nach 1 (s. Bild 2, in dem der Graph der Funktion y bei der Stelle $z = 0$ ersichtlich ist). Bei $t = 0$ und $t = t_*$ sind sämtliche Ableitungen Null, und deshalb sind Φ_σ und y nicht analytisch an diesen Punkten. Vergrößern des Parameters σ bewirkt einen „steileren“ Übergangsvorgang.

Mit dieser Wahl für y werden einerseits die Rand- und Anfangsbedingungen erfüllt, andererseits ist die Konvergenz der Reihen sichergestellt – vgl. das Simulationsergebnis in Bild 2. Die Konvergenz der Reihe ergibt sich als Spezialfall eines entsprechenden Ergebnisses für die allgemeine lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten, das in Abschnitt 4.1 ausführlich diskutiert wird. Für die Realisierung

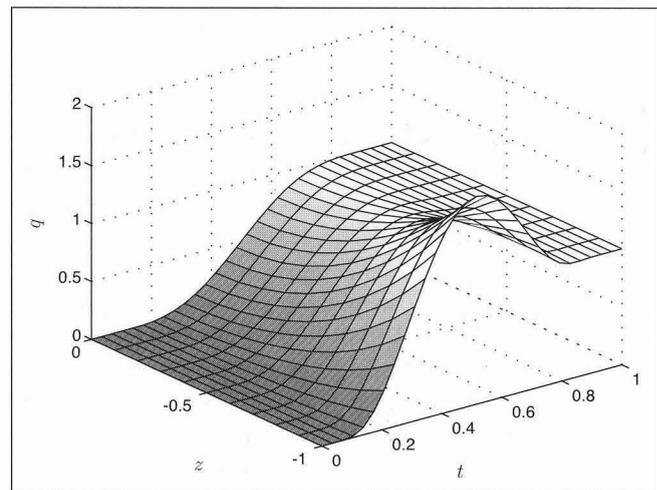


Bild 2: Verlauf der Temperatur $q(z, t)$. Der flache Ausgang ist $y(t) = q(0, t)$.

der Steuerung wird die Reihe abgebrochen² – in der Simulation zu Bild 2 nach $a_{20}z^{20}/20!$.

Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass der flache Ausgang für diese Steuerungsaufgabe bei der Inspektion des Potenzreihenansatzes ersichtlich ist und seine physikalische Bedeutung klar: Es handelt sich um die Randtemperatur $y(t) = q(0, t)$. Der flache Ausgang ist hier eine örtlich konzentrierte Größe, wie auch als Stellgröße eine örtlich konzentrierte Größe dient³. Die Solltrajektorie für den flachen Ausgang kann so gewählt werden, dass die gestellte Steuerungsaufgabe gelöst wird, und sowohl der ortsabhängige Temperaturverlauf $q(z, t)$ als auch die Stellgröße $u(t)$ werden in Abhängigkeit dieser Solltrajektorie für den flachen Ausgang durch Potenzreihen beschrieben. Wie in der Einleitung bereits erläutert wurde, spiegelt sich die Unendlichdimensionalität des Systems mit verteilten Parametern hier im Auftreten einer unendlichen Zahl von Zeitableitungen von y wider.

3 Randsteuerung für ein allgemeineres parabolisches System mit verteilten Parametern

Es wird nun ein allgemeineres System betrachtet, bei dem allerdings die Ortsabhängigkeit erneut nur in einer Dimension berücksichtigt wird. Dieses System kann der Beschreibung von Ausgleichsvorgängen dienen, wie sie beispielsweise bei Wärmeleitungsaufgaben oder in isothermen Rohrreaktoren auftreten, bei denen die Diffusionsvorgänge gegenüber der (eventuell zeitabhängig) erzwungenen Konvektion nicht vernachlässigt werden können. Dabei sollen die Materialparameter auch von der betrachteten Systemgröße $q(z, t)$ abhängen können, die die Temperatur oder eine Konzentration bezeichnen kann. Spezialfälle dieses mathematischen Modells werden in Abschnitt 4 näher untersucht.

3.1 Mathematisches Modell

Die parabolische pDgl. des Systems ist auf $\Omega = (-L, 0) \times \mathbb{R}^+$ (mit $L > 0$) definiert und lautet

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda(q(z, t)) \frac{\partial q}{\partial z}(z, t) \right) - \nu(t) \frac{\partial}{\partial z} (\rho(q(z, t)) q(z, t)) \\ & + \mu(q(z, t)) q(z, t) = \frac{\partial}{\partial t} (\rho(q(z, t)) q(z, t)), \quad (z, t) \in \Omega, \end{aligned} \quad (6)$$

² Durch den Abbruch der Reihe wird das erwünschte Profil tatsächlich erst in unendlicher Zeit exakt erreicht. Es reicht aber aus, zusätzliche Terme zu berücksichtigen, um dem Sollprofil in der vorgegebenen endlichen Zeit „beliebig nahe“ zu kommen [18].

³ Man vergleiche diesen Sachverhalt damit, dass bei den differentiell flachen nichtlinearen Systemen mit konzentrierten Parametern der flache Ausgang ebensovielen Komponenten enthält wie unabhängige Stellgrößen zur Verfügung stehen [4; 26].

wobei folgende spezielle, in q affine Form der Koeffizienten angenommen wird:

$$\lambda(q) = \lambda_0 + \lambda_1 q > 0 \quad (7a)$$

$$\rho(q) = \rho_0 + \rho_1 q > 0 \quad (7b)$$

$$\mu(q) = \mu_0 + \mu_1 q. \quad (7c)$$

Mit der Forderung $\lambda(q) > 0$, für beliebige q , ist sichergestellt, dass (6) eine parabolische Gleichung ist. Ferner sei $\nu: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ eine C^∞ -Funktion.

Diese Wahl der pDgl. gestattet insbesondere die Berücksichtigung von Wärmeleitungsaufgaben, bei denen die Dichte oder die spezifische Wärmekapazität oder auch die Parameter zur Beschreibung der Wärmeleitung und des Wärmeaustausches mit der Umgebung temperaturabhängig sind, wobei angenommen wird, diese Temperaturabhängigkeit sei durch die in Gl. (7) eingeführten, in q affinen Funktionen darstellbar. Desweiteren kann mit zeitabhängigem ν die erzwungene Strömung als eine zweite Stellgröße berücksichtigt werden (die in die Berechnung der Steuerung aber wie ein zeitabhängiger Parameter eingeht). Eine solche Situation kann im Falle der Wärmeleitung bei einem in der berücksichtigten Richtung transportierten Band oder Strang, bei den Rohrreaktoren durch die erzwungene Strömung des Reaktanden auftreten. Schließlich kann mit $\mu_1 \neq 0$ eine quadratisch von der Konzentration q abhängende Reaktionsrate berücksichtigt werden. Reaktionen höherer Ordnung können entsprechend behandelt werden.

Die Randbedingungen lauten

$$\frac{\partial q}{\partial z}(0, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (8a)$$

$$q(-L, t) = u(t), \quad t \geq 0. \quad (8b)$$

Dabei dient der Einfachheit halber $u(t)$ als Stellgröße: Aus dem in Abschnitt 2 diskutierten einleitenden Spezialfall der Wärmeleitungsgleichung wird deutlich, dass alternative Randbedingungen bei $-L$ völlig analog gehandhabt werden können.

Es seien wieder Übergangsvorgänge zwischen stationären Betriebszuständen zu realisieren. Dazu wird als Anfangsbedingung ein *stationäres Profil* für (6) angenommen:

$$q(z, 0) = q_s(z), \quad z \in [-L, 0], \quad (9)$$

wobei $q_s(z)$ eine Lösung der gewöhnlichen Dgl.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz} \left(\lambda(q_s(z)) \frac{dq_s}{dz}(z) \right) - \nu(0) \frac{d}{dz} (\rho(q_s(z)) q_s(z)) \\ & + \mu(q_s(z)) q_s(z) = 0 \end{aligned}$$

mit der der Gl. (8a) entsprechenden Randbedingung $\frac{dq_s}{dz}(0) = 0$ sein soll. Diese Lösung wird durch Festlegen einer zweiten Randbedingung eindeutig, die sich entweder durch die Wahl von $u_s = q_s(-L)$ ergibt, oder bei Verwendung der Potenzreihendarstellung durch die Wahl des stationären Wertes $y_s = q_s(0)$ für den flachen Ausgang.

3.2 Formale Lösung durch Potenzreihenansatz

Es wird erneut die Potenzreihe (2) für die Lösung angesetzt. Durch (formale) Ableitung nach z und t , Einsetzen in die pDgl. (6) und Koeffizientenvergleich ergibt sich die Rekursionsbeziehung

$$a_1 = 0 \quad (10)$$

$$a_{k+2} = \frac{1}{\lambda_0 + \lambda_1 a_0} \left(\rho_0 \dot{a}_k + 2\rho_1 \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \dot{a}_{k-j} a_j - \lambda_1 \left[\sum_{j=1}^{k-1} \binom{k}{j} a_{k+1-j} a_{j+1} + \sum_{j=2}^k \binom{k}{j} a_{k+2-j} a_j \right] + \nu \rho_0 a_{k+1} - \mu_0 a_k - \mu_1 \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a_{k-j} a_j + 2\nu \rho_1 \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} a_{k+1-j} a_j \right), \quad k \geq 0. \quad (11)$$

Wie für den Spezialfall der Wärmeleitungsaufgabe kann auch hier der flache Ausgang $q(0, t) = y(t)$ als freier Parameter eingeführt werden, wonach die Lösung mittels

$$a_0(t) = y(t), \quad t \geq 0 \quad (12)$$

und der Rekursion vollständig bestimmt ist. Dazu ist die Trajektorie für y so zu wählen, dass $\lambda_0 + \lambda_1 a_0 = \lambda_0 + \lambda_1 y$ für alle t positiv ist.

4 Konvergenzanalyse der Potenzreihen für die Steuerung

Unter Verwendung der formalen Lösung in Form einer Potenzreihe können nun die Temperatur $q(z, t)$ und die Stellgröße $u(t)$ berechnet werden. Dies geschieht analog zur in Abschnitt 2 behandelten linearen Wärmeleitungsaufgabe. Dazu muss eine Trajektorie für den flachen Ausgang y gewählt werden, die einerseits mit den stationären Anfangs- und Endprofilen kompatibel ist und die andererseits die Konvergenz der Potenzreihe sicherstellt. Es kann erneut die C^∞ -Funktion Φ_σ aus (5) verwendet werden. Mit

$$y(t) = C_1 + (C_2 - C_1)\Phi_\sigma(t), \quad C_1, C_2 \geq 0 \quad (13)$$

können stetige Übergangsvorgänge zwischen $y(0) = C_1$ und $y(t) = C_2$ für $t \geq t_*$ erzielt werden, falls die Potenzreihe (2) für die Lösung konvergiert. Der Zeitverlauf der Stellgröße $u(t)$ ergibt sich dann durch Auswerten der Potenzreihe (2) bei $z = -L$.

Die Steuerungsaufgabe kann folglich als gelöst betrachtet werden, wenn die Konvergenz der Potenzreihe nachgewiesen werden kann. Dafür werden zur Definition der Solltrajektorien für den flachen Ausgang y (wie für die lineare Wärmeleitungsgleichung) die in Abschnitt 2 eingeführten Gevrey-Funktionen verwendet. Deren Zeitableitungen, die in den Koeffizienten der Potenzreihen auftreten, genügen hinreichend strengen Beschränkungen. Der Konvergenzradius, d.h. der Ortsbereich, für den Konvergenz nachgewie-

sen werden kann, hängt außer von der Wahl der Trajektorie für den flachen Ausgang y auch von der betrachteten Gleichung ab. Es soll deshalb in den folgenden Abschnitten jeweils für einen wichtigen Sonderfall der pDgl. (6) die Konvergenz der bis hierher formalen Potenzreihen diskutiert werden. Die betrachteten Fälle sind

1. die lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten,
2. eine in q affine Abhängigkeit des die Reaktion beschreibenden Koeffizienten μ (entsprechend Gl. (7c)) zur Beschreibung eines Rohrreaktors mit einer Reaktion zweiter Ordnung,
3. eine in der Temperatur q affine Abhängigkeit der volumenspezifischen Wärmekapazität ρ für die Wärmeleitungsaufgabe (entsprechend Gl. (7b)),
4. die lineare Gleichung mit einer als Gevrey-Funktion einer Klasse $1 \leq \alpha < 2$ gewählten zeitabhängigen Transportgeschwindigkeit ν mit dem Ziel der Erhöhung des Durchsatzes bei gleichzeitiger Kontrolle über den Wert von q bei $z = 0$.

4.1 Lineare Gleichung mit konstanten Koeffizienten

Zunächst sei der Spezialfall der linearen parabolischen Gleichung mit konstanten Koeffizienten betrachtet, d.h. mit $\rho_1 = \lambda_1 = \mu_1 = 0$, $\nu = \nu_0 = \text{const.}$ in Gl. (7), wobei gilt $\rho_0, \lambda_0 > 0$ und $\nu_0 \geq 0$. Damit lautet die pDgl. (6)

$$\lambda_0 q_{zz}(z, t) - \nu_0 \rho_0 q_z(z, t) + \mu_0 q(z, t) = \rho_0 q_t(z, t), \quad (14)$$

für $(z, t) \in \Omega$, die Rekursionsbeziehung (11)

$$a_k = \frac{1}{\lambda_0} (\rho_0 \dot{a}_{k-2} + \nu_0 \rho_0 a_{k-1} - \mu_0 a_{k-2}), \quad k \geq 2. \quad (15)$$

Die Rekursion wird gemäß (12) und (15) initialisiert.

Gleichung (14) kann durch eine wohlbekannte Transformation der abhängigen Veränderlichen, q , in die Wärmeleitungsgleichung (1) überführt werden – s. z.B. [8]. In dieser Normalform kann der Beweis der Konvergenz unmittelbar durch Anwendung der Cauchy-Hadamardschen Formel für den Konvergenzradius (s. unten: Gl. (17)) erbracht werden [20]. Hier soll stattdessen ein direkter Weg gewählt werden, der für die anschließend behandelten nichtlinearen Aufgaben verallgemeinert werden kann.

Satz 1 Sei die Solltrajektorie für den flachen Ausgang y eine Gevrey-Funktion einer Klasse $\alpha < 2$. Dann konvergiert die durch die Rekursionsbeziehung (15) mit $a_0 = y$ und $a_1 = 0$ definierte Potenzreihe (2) für die Lösung $q(z, t)$ von (14) mit den Randbedingungen (8) für alle z , d.h. ihr Konvergenzradius ist unendlich.

Beweis: Zunächst soll mittels vollständiger Induktion gezeigt werden, dass für $l, k \geq 0$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |a_k^{(l)}(t)| \leq \frac{m M^k ((l+k)!)^\alpha}{\gamma^l (k!)^{\alpha/2}} \quad (16)$$

gilt, wobei M, γ und m Konstanten sind und $\alpha < 2$. Für $k = 0$ folgt die Wahrheit der Aussage aus der Wahl von $y = a_0 \in C_{m, \gamma, \alpha}$ mit $\alpha < 2$.

Sei (16) für $1, \dots, k-1$ wahr. Durch Differentiation von (15) ergibt sich für $k \geq 2$

$$|a_k^{(l)}| \leq \frac{1}{\lambda_0} (\rho_0 |a_{k-2}^{(l+1)}| + v_0 \rho_0 |a_{k-1}^{(l)}| + |\mu_0| |a_{k-2}^{(l)}|),$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |a_k^{(l)}| &\leq \frac{\rho_0 m M^{k-2} ((l+k-1)!)^\alpha}{\lambda_0 \gamma^{l+1} ((k-2)!)^{\alpha/2}} \\ &+ \frac{v_0 \rho_0 m M^{k-1} ((l+k-1)!)^\alpha}{\lambda_0 \gamma^l ((k-1)!)^{\alpha/2}} \\ &+ \frac{|\mu_0| m M^{k-2} ((l+k-2)!)^\alpha}{\lambda_0 \gamma^l ((k-2)!)^{\alpha/2}} \\ &\leq \frac{m M^k ((l+k)!)^\alpha}{\gamma^l (k!)^{\alpha/2}} \frac{1}{\lambda_0} \left(\frac{\rho_0 (k(k-1))^{\alpha/2}}{\gamma M^2 (l+k)^\alpha} \right. \\ &\quad \left. + \frac{v_0 \rho_0 k^{\alpha/2}}{M(l+k)^\alpha} + \frac{|\mu_0| (k(k-1))^{\alpha/2}}{((l+k)(l+k-1))^\alpha M^2} \right) \\ &\leq \frac{m M^k ((l+k)!)^\alpha}{\gamma^l (k!)^{\alpha/2}} \frac{1}{\lambda_0} \left[\frac{\rho_0}{\gamma M^2} + \frac{v_0 \rho_0}{2M} + \frac{|\mu_0|}{2M^2} \right]. \end{aligned}$$

Die runde Klammer der vorletzten Zeile enthält einen beschränkten und zwei mit l und k monoton abnehmende Summanden. Die eckige Klammer in der letzten Zeile ergibt sich daraus durch Einsetzen von $k=2$. Gleichsetzen dieser eckigen Klammer mit λ_0 führt auf eine quadratische Gl. in M , deren größere Wurzel die Konstante M bestimmt.

Damit ist die Gültigkeit der Abschätzung (16) nachgewiesen. Der Konvergenzradius der Reihe (2) kann mit der Cauchy-Hadamardschen Formel berechnet werden⁴: Der Konvergenzradius R einer Reihe $\sum_k c_k z^k$ ist

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} |c_k|^{1/k}}. \tag{17}$$

Aus (17) und (16) folgt für $l=0$ und $\alpha < 2$

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{t \in \mathbb{R}^+} \left(\frac{k!}{|a_k(t)|} \right)^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k!)^{(2-\alpha)/(2k)}}{M} = \infty.$$

4.2 Quadratische Reaktionsrate

Seien jetzt μ_1 beliebig, $\rho_1 = \mu_0 = 0$ und die übrigen Parameter, $\lambda_0, \rho_0, v = v_0$, positive Konstanten [19]:

$$\lambda_0 q_{zz}(z, t) - v_0 \rho_0 q_z(z, t) + \mu_1 (q(z, t))^2 = \rho_0 q_t(z, t), \tag{18}$$

für $(z, t) \in \Omega$.

Durch den quadratischen Ausdruck werden nun grobere Abschätzungen für die Koeffizienten erforderlich. Damit kann nur eine endliche untere Grenze für den Konvergenzradius der Potenzreihe für die Lösung angegeben werden.

Satz 2 *Ist die Trajektorie für den flachen Ausgang y eine Funktion aus $C_{m, \gamma, \alpha}$ mit $1 \leq \alpha \leq 2$, so ist der Konvergenz-*

⁴ Aus dem Beweis ist ersichtlich, dass man für $\alpha = 2$ einen endlichen Konvergenzradius $R \geq 1/M$ erhält.

radius der Potenzreihe (2) mit $a_0 = y$, die die Lösung $q(z, t)$ von (18) mit den Randbedingungen (8) beschreibt, größer als

$$\frac{4\lambda_0}{v_0 \rho_0 + \sqrt{v_0^2 \rho_0^2 + 8\lambda_0 |\mu_1| m + 16\lambda_0 \rho_0 \gamma^{-1}}}. \tag{19}$$

Beweisskizze: Der Beweis erfolgt analog zu dem Beweis von Satz 1. Daher sollen nur die wichtigsten Schritte angegeben werden. Für die Berechnung des Konvergenzradius R werden jetzt Abschätzungen der Form

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |a_k^{(l)}(t)| \leq \frac{m M^k ((l+k)!)^\alpha}{\gamma^l (k!)^{\alpha-1}}$$

verwendet. Diese können in die Rekursionsbeziehung

$$\begin{aligned} a_k^{(l)} &= \frac{1}{\lambda_0} \left(\rho_0 a_{k-2}^{(l+1)} - v_0 \rho_0 a_{k-1}^{(l)} \right. \\ &\quad \left. + \mu_1 \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{r=0}^l \binom{k-2}{j} \binom{l}{r} a_j^{(l-r)} a_{k-j-2}^{(r)} \right), \quad k \geq 2, \end{aligned}$$

eingesetzt werden, womit sich

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |a_k^{(l)}(t)| \leq \frac{m M^k ((l+k)!)^\alpha}{\gamma^l (k!)^{\alpha-1}} \frac{1}{\lambda_0} \left[\frac{\rho_0}{\gamma M^2} + \frac{v_0 \rho_0}{2M} + \frac{|\mu_1| m}{2M^2} \right]$$

ergibt. Dabei werden die Beziehungen

$$\sum_k L_k^\alpha \leq \left(\sum_k L_k \right)^\alpha, \quad \alpha \geq 1, \quad L_k \geq 0$$

und

$$\frac{i! j! (i+j+l+1)!}{(i+j+1)!} = \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} (j+r)! (i+l-r)!,$$

für $i, j, l \geq 0$ verwendet (Beweis s. [19]). Gleichsetzen der eckigen Klammer mit λ_0 ergibt eine quadratische Gl. in M , deren größere Wurzel die Konstante M bestimmt.

Die Auswertung der Cauchy-Hadamardschen Formel (17) führt hier infolge der groberen Abschätzung für die Koeffizienten nur auf einen endlichen Konvergenzradius R . Die untere Grenze für R in (19) ergibt sich aus dem Wert für $1/M$.

4.3 Temperaturabhängige volumenspezifische Wärmekapazität

Sei der konstante Parameter ρ_1 jetzt ungleich Null, so dass die volumenspezifische Wärmekapazität ρ affin von der Temperatur abhängt (Gl. (7b)). Seien außerdem $\lambda_1 = \mu_1 = 0$ und die übrigen Parameter konstant:

$$\begin{aligned} \lambda_0 q_{zz}(z, t) - v_0 \frac{\partial}{\partial z} ((\rho_0 + \rho_1 q(z, t)) q(z, t)) + \mu_0 q(z, t) \\ = \frac{\partial}{\partial t} ((\rho_0 + \rho_1 q(z, t)) q(z, t)), \quad (z, t) \in \Omega. \end{aligned} \tag{20}$$

In dieser Gleichung treten die Produkte $q_t q$ und $q_z q$ auf, wodurch eine Beschränkung der Zeitableitung der Solltra-

jektorie für y erforderlich wird. Durch die Wahl dieser Solltrajektorie entsprechend Gl. (13) mit $\sigma \geq 1$ ist diese Bedingung erfüllt.

Satz 3 Ist die Trajektorie für den flachen Ausgang y eine beschränkte Funktion ($y \leq m$), deren Ableitung \dot{y} der Menge $C_{m,\gamma,\alpha}$ mit $1 < \alpha \leq 2$ angehört, so ist der Konvergenzradius der Potenzreihe (2) mit $a_0 = y$, die die Lösung $q(z, t)$ von (20) mit den Randbedingungen (8) beschreibt, größer als⁵

$$\frac{2\lambda_0}{v_0\eta + \sqrt{v_0^2\eta^2 + 8\lambda_0|\mu_0| + 4\eta\lambda_0\gamma^{-1}}}$$

mit $\eta = 2\rho_0 + 3\rho_1m(2 + \zeta(\alpha))$ und⁶ $\zeta(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\alpha > 1$.

Beweisskizze: Die Rekursionsbeziehung für die Ableitungen der Koeffizienten a_k , $k \geq 2$ lautet in diesem Fall

$$\begin{aligned} a_k^{(l)} &= \frac{1}{\lambda_0} \left(\rho_0 a_{k-2}^{(l+1)} - \mu_0 a_{k-2}^{(l)} \right. \\ &+ 2\rho_1 \sum_{j=0}^{k-2} \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} \binom{k-2}{j} a_{k-2-j}^{(l+1-r)} a_j^{(r)} + v_0 \rho_0 a_{k-1}^{(l)} \\ &\left. + 2v_0 \rho_1 \sum_{j=0}^{k-3} \sum_{r=0}^l \binom{l}{r} \binom{k-2}{j} a_{k-1-j}^{(l-r)} a_j^{(r)} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Die Schranken für die Koeffizienten werden zu

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |a_0(t)| \leq m$$

und

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |a_k^{(l)}(t)| \leq \frac{mM^k ((l+k-1)!)^\alpha}{\gamma^l (k!)^{\alpha-1}}, \quad \begin{cases} l=0, & k \geq 1, \\ l \geq 1, & k \geq 0 \end{cases}$$

gewählt, d.h. es wird ein größerer Betrag als in (16) verwendet. Sei (22) für $1, \dots, k-1$ wahr. Einsetzen in (21) führt dann auf

$$\begin{aligned} \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |a_k^{(l)}| &\leq \frac{mM^k ((l+k-1)!)^\alpha}{\gamma^l (k!)^{\alpha-1}} \frac{1}{\lambda_0} \\ &\times \left[\frac{1}{M^2} \left(\frac{1}{\gamma} (2\rho_0 + 3\rho_1m(2 + \zeta(\alpha))) + 2|\mu_0| \right) \right. \\ &\left. + \frac{v_0}{M} (2\rho_0 + 3\rho_1m(2 + \zeta(\alpha))) \right]. \end{aligned}$$

Wieder kann die eckige Klammer gleich λ_0 gesetzt werden, um eine Schranke für M , und damit für den Konvergenzradius, zu bestimmen.

⁵ Für den (hier nicht interessierenden) Fall $\alpha = 1$ ergibt sich eine andere Schranke, bei der eine einfache Abschätzung ohne Verwendung der Riemannschen ζ -Funktion ausreicht [13].

⁶ Wie aus der Reihendarstellung offensichtlich, nimmt die ζ -Funktion im halboffenen Intervall $(1, 2]$ streng monoton ab. Der Minimalwert in diesem Intervall ist $\zeta(2) = \pi^2/6$ (s. [13]).

4.4 Veränderliche Strömungsgeschwindigkeit

Im Gegensatz zum vorigen Abschnitt sei jetzt die Geschwindigkeit v der Strömung als ein zeitabhängiger Parameter wählbar. Damit soll das Einstellen des Durchsatzes ermöglicht und zugleich weiterhin ein Sollverlauf für den Wert der Temperatur q an der Stelle $z = 0$ realisiert werden. Die pDgl. des Systems lautet

$$\lambda_0 q_{zz}(z, t) - v(t)\rho_0 q_z(z, t) + \mu_0 q(z, t) = \rho_0 q_t(z, t), \quad (23)$$

für $(z, t) \in \Omega$. Es sei v eine Funktion aus der in Abschnitt 2 eingeführten Menge von Gevrey-Funktionen $C_{v_0,\gamma,\alpha}$ und außerdem $v(t) \geq 0$, für alle $t \geq 0$.

Satz 4 Gehören die Funktionen $y, v : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ den Mengen von Gevrey-Funktionen $C_{m,\gamma,\alpha}$ bzw. $C_{v_0,\gamma,\alpha}$ mit $1 \leq \alpha < 2$ an, so ist der Konvergenzradius der Potenzreihe (2) mit $a_0 = y$, die die Lösung $q(z, t)$ von (23) mit den Randbedingungen (8) beschreibt, unendlich.

Beweisskizze: Durch Ableitung von (15) mit $v(t)$ anstelle von v_0 ergibt sich für $k \geq 2, l \geq 0$ die Beziehung

$$\begin{aligned} |a_k^{(l)}| &\leq \frac{1}{\lambda_0} \left(\rho_0 |a_{k-2}^{(l+1)}| + \rho_0 \sum_{j=0}^l \binom{l}{j} |v^{(j)}| |a_{k-1}^{(l-j)}| \right. \\ &\left. + |\mu_0| |a_{k-2}^{(l)}| \right). \end{aligned}$$

Einsetzen der Abschätzungen für die Gevrey-Funktion v gemäß (4) bzw. für die Koeffizienten gemäß (16) führt auf

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} |a_k^{(l)}| \leq \frac{mM^k ((l+k)!)^\alpha}{\gamma^l (k!)^{\alpha/2}} \frac{1}{\lambda_0} \left[\frac{\rho_0}{\gamma M^2} + \frac{v_0 \rho_0}{2M} + \frac{|\mu_0|}{2M^2} \right].$$

Der unendliche Konvergenzradius der Reihe folgt wie im Beweis von Satz 1.

Ein Simulationsergebnis für den zeitlichen Verlauf der ortsabhängigen Temperatur bei einem Zeitverlauf für die Geschwindigkeit v entsprechend Bild 3 ist in Bild 4 dargestellt. Die Trajektorie des flachen Ausgangs y entspricht (13), und der Verlauf von v ist mit einer entsprechenden Funktion berechnet. Die verwendeten Parameter sind $\lambda_0 = \rho_0 = 1, \mu_0 = -1$, und für die Auswertung der Potenzreihe wurden 20 Terme berücksichtigt.

Man erkennt in Bild 4 für $0 \leq t \leq 10$, dass trotz der Erhöhung der Strömungsgeschwindigkeit v , die angestrebte Erhöhung der Temperatur am Abfluss erfolgt. Für $t \geq 10$ ist

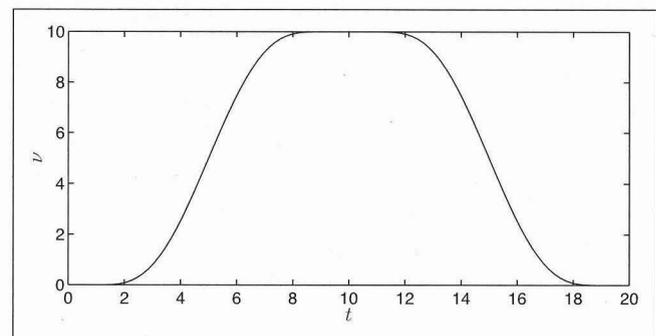


Bild 3: Zeitverlauf $v(t)$ der Strömungsgeschwindigkeit.

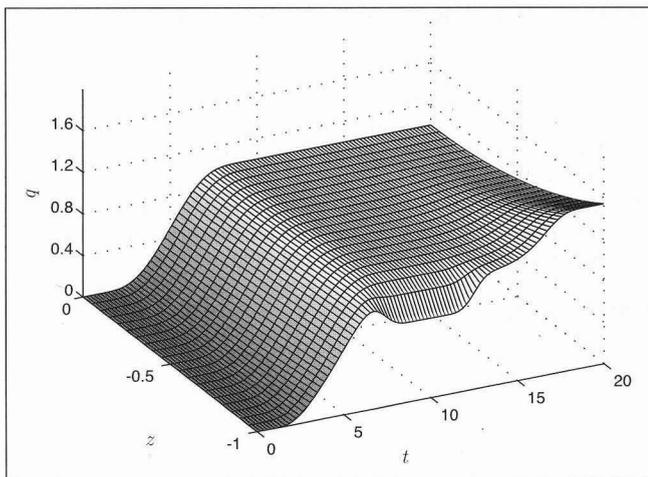


Bild 4: Verlauf der Temperatur $q(z, t)$ für die Strömungsgeschwindigkeit v entsprechend Bild 3.

ersichtlich, dass die Zuflusstemperatur erhöht werden muss, damit die Temperatur am Abfluss konstant bleibt, während v abnimmt.

5 Ausblick

Die vorgeschlagene Methode zur flachheitsbasierten Berechnung von Randsteuerungen für An- und Abfahrvorgänge von durch parabolische partielle Differentialgleichungen beschriebenen Prozessen lässt weitere Verallgemeinerungen zu. Diese betreffen beispielsweise die in der Temperatur q affine Abhängigkeit des Wärmeleitungsparameters λ und ebenso Abhängigkeiten höherer Ordnung. Außerdem können gekoppelte partielle Differentialgleichungen oder in Zylinderkoordinaten beschriebene Vorgänge berücksichtigt und mehrere Stellgrößen verwendet werden. Letzteres gestattet auch das Einstellen von Profilen durch mehrere konzentrierte Stelleingriffe, die an verschiedenen Stellen des Ortsbereichs wirksam werden. Beispiele dafür sind Balken mit Piezoaktuatoren und Wärmeleiter mit bereichsweiser Heizung.

Entsprechende auf Potenzreihenansätzen basierende flachheitsbasierte Steuerungen können für diverse Varianten der Euler-Bernoulli-Balkengleichung berechnet werden. So wurden in [1; 7; 15] flexible Roboterarme betrachtet, in [14] ein piezo-elektrisches Biege-Element. Im Gegensatz zu den hier betrachteten Fällen müssen dabei aber Methoden der Operatorenrechnung und der Modultheorie eingesetzt werden [6; 3]; insbesondere ergibt sich der flache Ausgang als eine Operatorfunktion, ist deshalb nicht direkt ersichtlich und erfuhr bisher auch noch keine physikalische Interpretation. Die Methode ist, wie die Versuchsergebnisse in [1; 14; 15] zeigen, für die Praxis der Steuerung trotzdem äußerst wertvoll.

Ebenfalls zu den flachheitsbasierten Methoden gehören Verfahren zur Berechnung von Randsteuerungen für hyperbolische örtlich verteilte Systeme, deren Verhalten durch Totzeiten konstanter Amplituden oder durch sogenannte verteilte Totzeiten bestimmt ist. Während erstere z.B. zur

Steuerung von Längs- oder Torsions-Schwingungen in Stäben eingesetzt wurden [23; 21; 22], treten letztere bei der allgemeinen linearen Telegraphengleichung [5], bei Wärmetauschern [28] und bei schweren Krankabeln [24] auf. Weitere flachheitsbasierte Steuerungen für spezielle nicht-lineare Systeme mit verteilten Parametern wurden in [2; 20; 27] beschrieben.

Danksagung

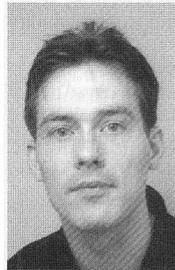
Die flachheitsbasierte Steuerung von Systemen mit örtlich verteilten Parametern wurde im Rahmen einer Kooperation des zweiten Autors (J. R.) mit den Kollegen P. Rouchon, H. Mounier und M. Fliess entwickelt. Ihnen gilt ein besonderer Dank. Die vorgestellten Ergebnisse entstanden im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projekts.

Literatur

- [1] Aoustin, Y., M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph: *Theory and practice in the motion planning and control of a flexible robot arm using Mikusiński operators*. In *Proc. 5th Symposium on Robot Control*, S. 287–293, Nantes, France, 1997.
- [2] Dubois, F., N. Petit und P. Rouchon: *Motion planning and non-linear simulations for a tank containing a fluid*. In *Proc. 5th European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [3] Fliess, M.: *Variations sur la notion de contrôlabilité*. In *Quelques Aspects de la Théorie du Contrôle. Journée Annuelle Soc. Math. France*, S. 47–86. Paris, France, 2000.
- [4] Fliess, M., J. Lévine, Ph. Martin und P. Rouchon: *Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples*. *Internat. J. Control*, 61:1327–1361, 1995.
- [5] Fliess, M., Ph. Martin, N. Petit und P. Rouchon: *Commande de l'équation des télégraphistes et restauration active d'un signal*. *Traitement du Signal*, 15, Spécial: 619–625, 1998.
- [6] Fliess, M. und H. Mounier: *Tracking control and π -freeness of infinite dimensional linear systems*. In Picci, G. und Gilliam D. S. (Hg.): *Dynamical Systems, Control, Coding, Computer Vision, and Discrete-event Systems*, S. 45–68. Birkhäuser, 1999.
- [7] Fliess, M., H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph: *Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d'une poutre flexible*. In *ESAIM Proc.*, Bd. 2, S. 183–193, 1997. (<http://www.emath.fr/proc>).
- [8] Fliess, M., H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph: *Controlling the transient of a chemical reactor: a distributed parameter approach*. In *Proc. Computational Engineering in Systems Application IMACS Multiconference, (CESA '98)*, Hammamet, Tunisia, 1998.
- [9] Fliess, M., H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph: *A distributed parameter approach to the control of a tubular reactor: a multi-variable case*. In *Proc. 37th IEEE Conference on Decision and Control*, S. 439–442, Tampa, FL, 1998.
- [10] Franke, D.: *Systeme mit örtlich verteilten Parametern*. Springer-Verlag, 1987.
- [11] Gevrey, M.: *La nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles*. *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 25:129–190, 1918.
- [12] Gilles, E. D.: *Systeme mit verteilten Parametern*. Oldenbourg Verlag, 1973.
- [13] Gradshteyn, I. S. und I. M. Ryzhik: *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, 1979.
- [14] Haas, W. und J. Rudolph: *Steering the deflection of a piezo-electric bender*. In *Proc. 5th European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [15] Hisseine, D., B. Lohmann und A. Kuczynski: *Two control approaches for a flexible-link manipulator*. In *Proc. IASTED Int. Conf. Robotics and Applications, RA '99*, Santa Barbara, CA, 1999.

- [16] Laroche, B. und Ph. Martin: *Motion planning for a 1-D diffusion equation using a Brunovsky-like decomposition*. In *Proc. 14th Int. Symp. Mathematical Theory of Networks and Systems – mtns 2000*, Perpignan, France, 2000.
- [17] Laroche, B., Ph. Martin und P. Rouchon: *Motion planning for a class of partial differential equations with boundary control*. In *Proc. 37th IEEE Conference on Decision and Control*, S. 736–741, Tampa, FL, 1998.
- [18] Laroche, B., Ph. Martin und P. Rouchon: *Motion planning for the heat equation*. *Int. J. Robust and Nonlinear Control*, 2000.
- [19] Lynch, A. F. und J. Rudolph: *Flatness-based boundary control of a nonlinear parabolic equation modelling a tubular reactor*. In Isidori, A., F. Lamnabhi-Lagarrique und W. Respondek (Hg.): *Nonlinear Control in the Year 2000 (Vol. 2)*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., S. 45–54. Springer-Verlag, 2000.
- [20] Martin, P., R. M. Murray und P. Rouchon: *Flat systems*. In Bastin, G. und M. Gevers (Hg.): *Plenary Lectures and Mini-Courses, 4th European Control Conference, Brussels, Belgium*, S. 211–264. 1997.
- [21] Mounier, H., P. Rouchon und J. Rudolph: *Some examples of linear systems with delays*. *RAIRO-APII-JESA*, 31:911–925, 1997.
- [22] Mounier, H., J. Rudolph, M. Fliess und P. Rouchon: *Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as delay system*. *COCV (Control, Optimization and Calculus of Variations)*, 3, 1998. (<http://www.emath.fr/cocv/>).
- [23] Mounier, H., J. Rudolph, M. Petitot und M. Fliess: *A flexible rod as a linear delay system*. In *Proc. 3rd European Control Conference*, S. 3676–3681, Rome, Italy, 1995.
- [24] Petit, N. und P. Rouchon: *Motion planning for heavy chain systems*. In Isidori, A., F. Lamnabhi-Lagarrique und W. Respondek (Hg.): *Nonlinear Control in the Year 2000 (Vol. 2)*, Lecture Notes in Control and Inform. Sci., S. 229–236. Springer-Verlag, 2000.
- [25] Rothfuß, R., U. Becker und J. Rudolph: *Controlling a solenoid valve – a distributed parameter approach*. In *Proc. 14th Int. Symp. Mathematical Theory of Networks and Systems – mtns 2000*, Perpignan, France, 2000.
- [26] Rothfuß, R., J. Rudolph und M. Zeitz: *Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme*. at – Automatisierungstechnik, 45:517–525, 1997.
- [27] Rouchon, P. und J. Rudolph: *Réacteurs chimiques différentiellement plats : planification et suivi de trajectoires*. In Corriou, J. P. (Hg.): *Automatique et procédés chimiques*, Kap. III.f. Hermès, 2000.
- [28] Rudolph, J.: *Randsteuerung von Wärmetauschern mit örtlich verteilten Parametern: Ein flachheitsbasierter Zugang*. at – Automatisierungstechnik, 48:399–406, 2000.

Manuskripteingang: 17. Mai 2000.



Dr. Alan F. Lynch promovierte an der University of Toronto in Kanada und ist nun wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie der TU Dresden. Hauptarbeitsfelder: Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme, Steuerung linearer und nichtlinearer Systeme mit örtlich verteilten Parametern.

Adresse: TU Dresden, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, Mommsenstr. 13, D-01062 Dresden, E-Mail: alanl@ieee.org



Dr. Joachim Rudolph promovierte an der Université Paris-sud in Frankreich und ist wissenschaftlicher Oberassistent am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie der TU Dresden. Hauptarbeitsfelder: Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Regelstrecken, algebraische Methoden, lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme.

Adresse: siehe oben.
E-Mail: rudolph@erss11.et.tu-dresden.de