

Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme

Ralf Rothfuß, Stuttgart, Joachim Rudolph, Dresden und Michael Zeitz, Stuttgart



Dr.-Ing. Ralf Rothfuß war zur Zeit der Entstehung des vorliegenden Aufsatzes wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik der Universität Stuttgart bei Prof. Dr.-Ing. M. Zeitz. Hauptarbeitsfelder: Regler und Beobachter für nicht-lineare Systeme, rechnerunterstützter Entwurf mit Hilfe von Computer-Algebra-Systemen.

Adresse: Bergstraße 23, D-73119 Zell.



Dr. Joachim Rudolph ist Stipendiat der Deutschen Forschungsgemeinschaft am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie der Technischen Universität Dresden bei Prof. Dr.-Ing. K. Reinschke. Hauptarbeitsfelder: Regelung und Beobachter nichtlinearer Systeme, algebraische Methoden, lineare und nichtlineare unendlich-dimensionale Systeme.

Adresse: Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, Technische Universität Dresden, Mommsenstr. 13, D-01062 Dresden.

E-mail: rudolph@erss11.et-tu-dresden.de



Prof. Dr.-Ing. Michael Zeitz ist Professor am Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik der Universität Stuttgart. Hauptarbeitsfelder: nichtlineare Regelung und Beobachtung, Systeme mit verteilten Parametern, Methoden und Werkzeuge zur rechnerunterstützten Modellierung und Simulation.

Adresse: ISR-1304, Universität Stuttgart, D-70550 Stuttgart.

E-mail: zeitz@isr.uni-stuttgart.de

Das 1992 von Fliess, Lévine, Martin und Rouchon eingeführte Konzept der Flachheit eröffnet einen neuen Zugang zur Analyse und zum Entwurf nichtlinearer Systeme. Flache nichtlineare Systeme sind eine Verallgemeinerung der linearen steuerbaren Systeme und ermöglichen einen systematischen Entwurf von Steuerungen und Regelungen zur Trajektorienfolge. Zur Realisierung der flachheitsbasierten Folgeregelung können nichtlineare Beobachter mit zeitvarianter Verstärkung verwendet werden. Die Flachheitsanalyse und der flachheitsbasierte Entwurf einer Steuerung, einer asymptotischen Folgeregelung und eines nicht-linearen Folgebeobachters werden erläutert. Dazu wird das Beispiel eines kinematischen Fahrzeugmodells betrachtet.

Flatness: A new approach to control of nonlinear systems

The flatness concept as introduced by Fliess, Lévine, Martin and Rouchon in 1992 offers a new approach for the analysis and the design of nonlinear systems. Flat nonlinear systems are a generalization of the linear controllable ones. They allow a systematic design of a nonlinear tracking control in open or closed loop. For a realization of the flatness-based tracking feedback, nonlinear observers with time-varying gain may be used. The flatness analysis and the flatness-based design of an open loop control, of a feedback tracking control, and of a nonlinear tracking observer are explained. For this, the example of a kinematical car model is considered.

1 Einführende Übersicht

„Flachheit“ ist eine Eigenschaft, die in allen Bereichen vorkommt, und der Begriff „flach“ wird in unterschiedlichster Weise verwendet. Stets jedoch – wenn auch mitunter im übertragenen Sinne – bezeichnet „flach“ eine geometrische Eigenschaft und impliziert gleichzeitig eine gewisse „Einfachheit“ der betrachteten Struktur. So ist im Management heutzutage der Begriff einer „flachen“ Hierarchie geläufig, und es gibt hier in der Tat eine gewisse Analogie zu den *flachen Systemen*: eine „flache“ Struktur vereinfacht das Verständnis der funktionalen Zusammenhänge und erleichtert die Steuerung eines Systems.

Für nichtlineare Systeme als Modelle gesteuerter Prozesse steht der Flachheitsbegriff in direktem Zusammenhang mit der geometrischen Interpretation der Lösungen der zugrundeliegenden Differentialgleichungen. Die flachen Systeme können nämlich in geeigneten Koordinaten wie lineare Systeme in linearen Räumen dargestellt werden. Diese Koordinaten beschreiben die Zustände und die Eingänge des Systems und zusätzlich alle zeitlichen Ableitungen. Die neuen Koordinaten stehen mit den Originalkoordinaten in einem (formal eindeutig umkehrbaren) nichtlinearen Zusammenhang. Die so eingeführten nichtlinearen Koordinatentransformationen können als *dynamische Rückführungen* interpretiert werden.

Diese geometrische Vorstellung ist der Grund für die Wahl des Begriffs „flach“ zur Charakterisierung der *flachen Systeme* (engl. *flat systems*, franz. *systèmes plats*). Diese Klasse nichtlinearer Systeme mit mindestens einer Steuergröße wurde 1992 von *Fliess, Lévine, Martin* und *Rouchon* definiert [1; 2]. Flache Systeme besitzen sehr ähnliche Steuerbarkeitseigenschaften wie lineare Systeme. Daher können die Trajektorien von flachen Systemen einfach geplant und durch Steuerungen oder Regelungen realisiert werden.

Flache Systeme wurden zunächst im Rahmen der Differentialalgebra eingeführt [2]. Darüber hinaus besteht ein Zusammenhang mit den exakt zustandslinearisierbaren Systemen und den differentialgeometrischen Analyse- und Syntheseverfahren für nichtlineare Systeme, wie diese in den Büchern [3 bis 6] beschrieben werden. In der Tat sind die durch statische Zustandsrückführungen exakt linearisierbaren Systeme flach. Diese differentialgeometrischen Methoden spielen jedoch für die Anwendungen des Flachheitskonzepts keine wesentliche Rolle. Nur die Beantwortung der Frage, ob ein System flach ist, und die Entwicklung von Algorithmen zur Flachheitsanalyse erfordern die Verwendung von differentialgeometrischen Methoden.

Wesentliches Merkmal flacher Systeme ist die Existenz eines fiktiven Ausgangs y , der *flacher Ausgang* genannt wird. Ein solcher flacher Ausgang enthält ebensoviele (differentiell) unabhängige Komponenten y_i , $i = 1, \dots, m$ wie der Eingang u und beschreibt das dynamische Verhalten des Systems im folgenden Sinne vollständig: Alle Zustände und Eingänge des Systems können als Funktion der y_i und einer endlichen Anzahl von Zeitableitungen $y_i^{(k)}$, $k \geq 1$ dargestellt werden.

Aus der Kenntnis eines flachen Ausgangs kann direkt eine Steuerung für das nichtlineare System bestimmt werden. Dies soll am Beispiel der in der Robotik bekannten „Methode der berechneten Momente“ (engl. *computed torque*) für ein Mehrkörpersystem

$$M(q)\ddot{q} + g(q, \dot{q}) = u, \quad q \in \mathbb{R}^m, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (1)$$

erläutert werden. Hier ist $M(q)$ die Trägheitsmatrix, und in $g(q, \dot{q})$ sind die Zentripetal-, Coriolis- und Gravitationsmomente zusammengefaßt. Die verallgemeinerten Koordinaten q beschreiben das dynamische Verhalten vollständig und bilden deshalb einen flachen Ausgang y des Mehrkörpersystems. Mit dem flachen Ausgang y und den Zeitableitungen bis zur 2. Ordnung können alle Größen des Systems ausgedrückt werden:

$$q = y, \quad \dot{q} = \dot{y}, \quad (2a)$$

$$u = M(y)\ddot{y} + g(y, \dot{y}). \quad (2b)$$

Durch die Vorgabe von Solltrajektorien¹ $y_d(t)$ für den flachen Ausgang sind die Trajektorien $q_d(t)$ und $\dot{q}_d(t)$ eindeutig bestimmt. Durch Ersetzen von y durch y_d ergeben sich aus (2b) unmittelbar die zur Realisie-

rung der Trajektorien $y_d(t)$ erforderlichen Stellmomente $u_d(t)$ im offenen Kreis – daher der Name der Methode.

Die Trajektorienverfolgung kann für flache Systeme auch durch eine Regelung realisiert und damit gegen Störungen und Anfangsfehler stabilisiert werden. Da flache Systeme exakt zustandslinearisierbar sind, ist diese Stabilisierung auf der Basis der linearen Dynamik des Folgefehlers $e = y - y_d$ einfach zu entwerfen. Für das Beispiel des Mehrkörpersystems (1) kann durch das nichtlineare Regelgesetz

$$\begin{aligned} u &= M(y)v + g(y, \dot{y}), \\ v &= \ddot{y}_d + P_1(\dot{y}_d - \dot{y}) + P_0(y_d - y) \end{aligned} \quad (3)$$

und durch geeignete Wahl der $(m \times m)$ -Matrizen P_0 und P_1 dem Folgefehler e eine stabile lineare Dynamik aufgeprägt werden:

$$\ddot{e} + P_1\dot{e} + P_0e = 0.$$

Werden die Geschwindigkeiten \dot{y} nicht gemessen, kann zur Realisierung der flachheitsbasierten Folgeregelung (3) ein nichtlinearer Folgebeobachter mit zeitvarianter Verstärkung entworfen werden.

Erste überzeugende Ergebnisse der flachheitsbasierten Steuerung und Regelung von nichtlinearen Systemen gibt es u.a. für das Einparken von Fahrzeugen mit mehreren Anhängern [7], die Folgeregelung von Asynchronmotoren [8; 9], Magnetlagern [10] und Flugzeugen [11] sowie das Anfahren von chemischen Reaktoren [12].

In den folgenden Abschnitten wird eine anschauliche Einführung in die Definition, die Eigenschaften und Anwendungen flacher Systeme gegeben und mit Hilfe eines einfachen kinematischen Fahrzeugmodells erläutert. Eine ausführlichere Darstellung einschließlich einer umfangreichen Literaturliste zu flachen Systemen findet man in [13]. Für eine mathematische Behandlung flacher Systeme wird auf die Originalarbeiten von *Fliess et al.* im Rahmen der Differentialalgebra [1; 2] bzw. der Differentialgeometrie der unendlichen Strahlen und Prolongationen [14; 15] verwiesen.

2 Flache Systeme

Ausgangspunkt für die nachfolgende Betrachtung von flachen Systemen ist die Zustandsdarstellung nichtlinearer Systeme mit mehreren Eingängen

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \quad (4)$$

Dabei wird vorausgesetzt, daß die Komponenten der Funktionen f und u hinreichend oft differenzierbar sind. Für Systeme der Form (4) kann die Flachheit folgendermaßen definiert werden [2]:

Definition flacher Systeme

Ein nichtlineares System (4) heißt (*differentiell*)² *flach*, wenn es einen fiktiven Ausgang

² Der Begriff *differentiell* wird verwendet, da aus den Komponenten von y durch Differentiation, d.h. ohne Integration von Differentialgleichungen, alle Zustände und Eingänge sowie deren Zeitableitungen bestimmt werden können.

¹ Die Solltrajektorien werden mit dem Index d gekennzeichnet (engl. *desired*).

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \phi \left(\mathbf{x}, u_1, \dots, \overset{(\alpha_1)}{u_1}, \dots, u_m, \dots, \overset{(\alpha_m)}{u_m} \right) = \\ &= \phi \left(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots, \overset{(\alpha)}{\mathbf{u}} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

mit $\dim \mathbf{y} = \dim \mathbf{u}$ gibt, der die folgenden Bedingungen erfüllt. Die Zustände x_i , $i = 1, \dots, n$ und die Eingänge u_i , $i = 1, \dots, m$ können als Funktionen der Komponenten y_i , $i = 1, \dots, m$ und einer endlichen Anzahl ihrer Zeitableitungen $\overset{(k)}{y}_i$ eindeutig ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \psi_1 \left(y_1, \dots, \overset{(\beta_1)}{y_1}, \dots, y_m, \dots, \overset{(\beta_m)}{y_m} \right) = \\ &= \psi_1 \left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \overset{(\beta)}{\mathbf{y}} \right), \end{aligned} \quad (6a)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \psi_2 \left(y_1, \dots, \overset{(\beta_1+1)}{y_1}, \dots, y_m, \dots, \overset{(\beta_m+1)}{y_m} \right) = \\ &= \psi_2 \left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \overset{(\beta+1)}{\mathbf{y}} \right). \end{aligned} \quad (6b)$$

Sind diese Bedingungen zumindest lokal erfüllt, so heißt der fiktive Ausgang (5) *flacher Ausgang*.

Wegen $\dim \mathbf{y} = \dim \mathbf{u}$ und (6b) sind die Komponenten von \mathbf{y} *differentiell unabhängig*, d.h. sie erfüllen keine Differentialgleichungen³ der Form

$$\varphi \left(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \overset{(\gamma)}{\mathbf{y}} \right) = 0. \quad (7)$$

Diese Bedingung wird häufig anstelle der Forderung $\dim \mathbf{y} = \dim \mathbf{u}$ in der Definition flacher Systeme benutzt, ihr Nachweis ist jedoch schwieriger. Aufgrund der differentiellen Unabhängigkeit sind die Trajektorien für die Komponenten von \mathbf{y} voneinander unabhängig.

Da in der oben genannten Definition nur die Existenz eines flachen Ausgangs gefordert wird, existieren für ein flaches System beliebig viele flache Ausgänge [2]. Diese Freiheit hat zur Folge, daß es häufig einen flachen Ausgang \mathbf{y} gibt, der nur eine Funktion $\phi(\mathbf{x})$ des Zustands \mathbf{x} ist oder für den die Bestimmung der Gln. (6) einfach ist. Insbesondere ergibt sich so auch häufig die Möglichkeit, einen flachen Ausgang mit einer anschaulichen Bedeutung und einer direkten Relevanz für das zu lösende Regelproblem zu wählen (vgl. hierzu die Beispielliste in [16]).

Da mit Hilfe von (6) die Größen \mathbf{x} und \mathbf{u} durch einen flachen Ausgang \mathbf{y} ausgedrückt werden können, ergibt sich mit der Dgl. (4), daß auch $\dot{\mathbf{x}}$ als Funktion von \mathbf{y} darstellbar ist, ohne daß Dgln. integriert werden müssen. Dies bedeutet, daß alle dynamischen Eigenschaften eines flachen Systems durch den flachen Ausgang und eine endliche Zahl von dessen Zeitableitungen festgelegt werden. Deshalb spricht man auch von einer (endlichen) *Parametrierung* des Systems durch einen flachen Ausgang.

Diese Parametrierung erlaubt eine einfache Bestimmung und Analyse der Ruhelagen $(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)$ mit

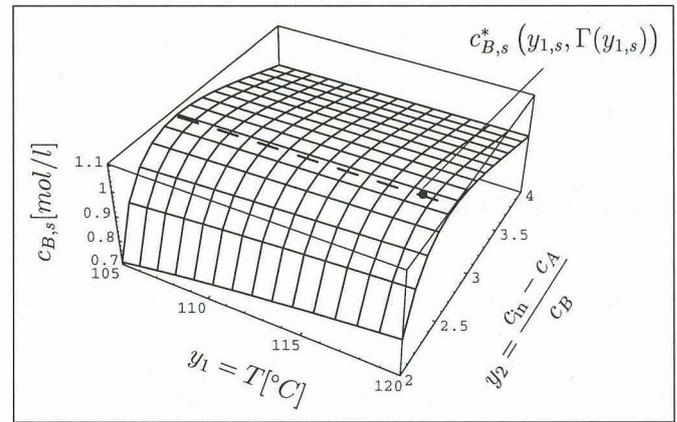


Bild 1: Stationäre Konzentration $c_{B,s}(\mathbf{y}_s)$ des gewünschten Produkts B als Funktion der Komponenten des flachen Ausgangs $\mathbf{y} = [y_1, y_2]^T$ eines chemischen Rührkesselreaktors [12].

$\mathbf{f}(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s) = \mathbf{0}$ eines flachen Systems (4). Hierzu betrachtet man die Gln. (6) für $\mathbf{y} = \mathbf{y}_s$ mit $\overset{(k)}{\mathbf{y}}_s = \mathbf{0}$, $k \geq 1$

$$\mathbf{x}_s = \psi_1(\mathbf{y}_s, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \bar{\psi}_1(\mathbf{y}_s), \quad (8a)$$

$$\mathbf{u}_s = \psi_2(\mathbf{y}_s, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}) = \bar{\psi}_2(\mathbf{y}_s). \quad (8b)$$

Mit diesen Beziehungen werden die Ruhelagen $(\mathbf{x}_s, \mathbf{u}_s)$ durch den flachen Ausgang \mathbf{y}_s vollständig parametrisiert. Im Unterschied hierzu ist eine explizite Darstellung des Zusammenhangs $\mathbf{x}_s(\mathbf{u}_s)$ häufig nicht möglich. Mit Hilfe der parametrisierten Darstellung (8) von Zustand \mathbf{x}_s und Eingang \mathbf{u}_s lassen sich die Ruhelagen des flachen Systems in Abhängigkeit von \mathbf{y}_s einfach berechnen, grafisch veranschaulichen und eventuell auch optimieren.

Diese Vorgehensweise wurde erstmals am Beispiel eines chemischen Rührkesselreaktors mit einer Folge-reaktion $A \rightarrow B \rightarrow C$ und einer Parallelreaktion $2A \rightarrow D$ zu dem erwünschten Produkt B angewendet [12]. Der Zustand $\mathbf{x} = [c_A, c_B, T, T_K]^T$ wird durch die Konzentrationen c_A und c_B sowie die Temperaturen T und T_K im Reaktorinnern bzw. im Kühlmantel beschrieben. Die Stellgrößen sind der normierte Volumenstrom und die Kühlleistung ($\dim \mathbf{u} = 2$). In [12] wird gezeigt, daß

$$\mathbf{y} = \left[T, \frac{c_{in} - c_A}{c_B} \right]^T$$

ein flacher Ausgang für den Reaktor ist. Dabei ist c_{in} die Konzentration des Reaktanden A im Zulauf. Die beiden Komponenten des flachen Ausgangs \mathbf{y} haben folgende anschauliche Bedeutung: neben der Reaktor-temperatur $y_1 = T$ ist dies die inverse Selektivität $y_2 = (c_{in} - c_A)/c_B$, die die „Produktivität“ des Reaktors charakterisiert.

Die stationäre Konzentration $c_{B,s}(\mathbf{y}_s)$ des gewünschten Produkts läßt sich – wie in Bild 1 gezeigt – als gekrümmte Fläche über der \mathbf{y} -Ebene darstellen und analysieren. Bei dem betrachteten Reaktormodell ist eine explizite Darstellung $c_{B,s}(\mathbf{u}_s)$ nicht möglich. Für jede Temperatur $y_{1,s} = T_s$ gibt es eine maximale Produktkonzentration $c_{B,s}^*$, wie dies in Bild 1 gestrichelt

³ Differentialgleichung wird im Folgenden mit Dgl. abgekürzt.

ingezeichnet ist. Die Gleichung dieser maximalen Konzentrationen erhält man durch Auflösen der Gleichung $\partial c_{B,s} / \partial y_{2,s} = 0$ nach $y_{2,s} = \Gamma(y_{1,s})$ und Einsetzen in $c_{B,s}(y_{1,s}, \Gamma(y_{1,s}))$.

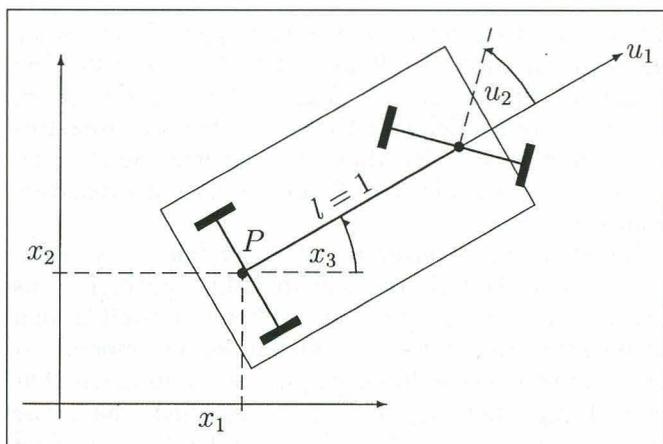
3 Flachheitsanalyse

Der wichtigste Schritt bei der Anwendung der flachheitsbasierten Analyse- und Entwurfsmethoden ist die Bestimmung eines flachen Ausgangs (5). Da es bisher keine Bedingungen für die Flachheit gibt, die gleichzeitig notwendig und hinreichend sind, kann auch keine allgemein anwendbare Methode zur Bestimmung eines flachen Ausgangs angegeben werden. Eine mögliche Methode basiert auf der Betrachtung von strukturell flachen Systemdarstellungen [13]. Deren Bestimmungsgleichungen sind Systeme linearer partieller Dgl. erster Ordnung. Sind diese lösbar, ist das betrachtete System flach, und jede Lösung stellt einen flachen Ausgang dar. Wegen der umfangreichen Literatur zu den Existenzbedingungen für flache Ausgänge wird auf [13] verwiesen.

Alternativ zur systematischen Flachheitsanalyse kann auch durch heuristische Überlegungen ein flacher Ausgang bestimmt werden, was für praktische Aufgabenstellungen häufig zum Ziel führt (vgl. hierzu die „natürlichen“ flachen Ausgänge der Beispiele in [16]). Hierfür wird aufgrund des Prozeßwissens ein Kandidat für einen flachen Ausgang (5) gesucht, der zusammen mit seinen Zeitableitungen „möglichst viel Information“ über das dynamische Verhalten des Systems beinhaltet. Die Überprüfung, ob es sich tatsächlich um einen flachen Ausgang handelt, wird mit Hilfe der Gln. (6) vorgenommen. Dazu werden durch sukzessive Zeitableitungen des flachen Ausgangs nichtlineare algebraische Gleichungen zur Bestimmung der Größen x und u hergeleitet. Dies bedeutet, daß die Gl. (5) so oft abgeleitet werden muß, bis aus dem resultierenden

Gleichungssystem für $y_i, \dots, y_i^{(\beta_i+1)}, i = 1, \dots, m$ alle Unbekannten $x_j, j = 1, \dots, n$ und $u_i, \dot{u}_i, \dots,$

Bild 2: Ersatzbild und kinematisches Modell (9) eines zweiachsigen Fahrzeugs.
 $\dot{x}_1 = u_1 \cos x_3 \quad \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3 \quad \dot{x}_3 = u_1 \tan u_2$ (9)



$i = 1, \dots, m$ (zumindest lokal) bestimmt werden können. Die dabei auftretenden Eingangsableitungen werden als neue algebraische Unbekannte betrachtet, wodurch sich die Zahl der Unbekannten erhöht. Ein Kandidat für einen flachen Ausgang ist umso erfolgversprechender, je höher die Ordnung der Zeitableitungen der Komponenten y_i ist, die erstmals von den Eingangsgrößen abhängen. In diesem Sinne ist ein flacher Ausgang eines Systems „möglichst weit entfernt“ von den Eingangsgrößen.

Die Flachheitsanalyse soll nachfolgend am Beispiel des kinematischen Modells (9) eines Fahrzeugs (Bild 2) erläutert werden, für das die flachheitsbasierte Realisierung des Einparkvorgangs auch in [7] diskutiert wird. Eingangsgrößen sind die Fahrgeschwindigkeit u_1 und der Lenkwinkel u_2 . Zustandsgrößen sind die Koordinaten x_1 und x_2 des Hinterachsmittelpunktes P sowie der Winkel x_3 der Fahrzeugachse.

Ein Kandidat für einen flachen Ausgang des Fahrzeugs sind die Koordinaten des Mittelpunkts P der Hinterachse. Dies deckt sich mit der Erfahrung beim Rückwärtseinparken, daß der Einparkvorgang durch die Trajektorie der Hinterachse bestimmt wird. Im folgenden wird gezeigt, daß die Koordinaten

$$y = [x_1, x_2]^T \tag{10}$$

tatsächlich einen flachen Ausgang für das Modell (9) bilden. Hierfür werden die Zeitableitungen $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \ddot{y}_1$ und \ddot{y}_2 gebildet und die resultierenden Gleichungen nach x, u und \dot{u}_1 aufgelöst:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= x_1 \\ y_2 &= x_2 \\ \dot{y}_1 &= u_1 \cos x_3 \\ \dot{y}_2 &= u_1 \sin x_3 \\ \ddot{y}_1 &= \dot{u}_1 \cos x_3 - u_1^2 \tan u_2 \sin x_3 \\ \ddot{y}_2 &= \dot{u}_1 \sin x_3 + u_1^2 \tan u_2 \cos x_3 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{aligned} x_1 &= y_1 \\ x_2 &= y_2 \\ x_3 &= \arctan(\dot{y}_2/\dot{y}_1) \\ u_1 &= \frac{\dot{y}_1}{\cos(\arctan \dot{y}_2/\dot{y}_1)} \\ u_2 &= \psi_1(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2/\dot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2) \\ \dot{u}_1 &= \psi_2(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2/\dot{y}_1, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2) \end{aligned} \right. \tag{11}$$

Auf der linken Seite des Gleichungssystems (11) stehen sechs Gleichungen für die sechs Unbekannten $x_1, x_2, x_3, u_1, \dot{u}_1$ und u_2 . Die rechte Seite entspricht den Gln. (6). Damit ist das Fahrzeugmodell (9) flach. Der Nachweis, daß (10) ein flacher Ausgang ist, wird in [2] mittels kinematischer Überlegungen ohne Zuhilfenahme der Gln. (11) geführt.

Die Beziehungen für x, u und \dot{u}_1 in (11) sind nur lokal gültig. Außerdem hängen die Gleichungen für x_3, u_1, \dot{u}_1 und u_2 von dem Quotienten \dot{y}_2/\dot{y}_1 ab. Wenn die Geschwindigkeit des Fahrzeugs Null wird, d.h. $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$ ist, treten in diesen Ausdrücken Singularitäten auf. Aus der Anschauung weiß man jedoch, daß das Fahrzeug in jedem Punkt angehalten werden kann, d.h. die genannten Singularitäten stellen in der Praxis keine Einschränkung dar. Bei einer Implementierung der Gln. (11) ist es erforderlich, diese Singularitäten zu eliminieren. Hierfür wird in [15] eine Zeittransformation, die einer Parametrierung der Trajektorien durch deren Bogenlänge $s = \sigma(t)$ entspricht, verwendet.

Die rechentechnische Flachheitsanalyse ist in Bild 3 als Schema dargestellt: aus dem flachen Ausgang (10) können durch Zeitableitungen (dicke Pfeile) und algebraische Umformungen (gestrichelte Pfeile) alle

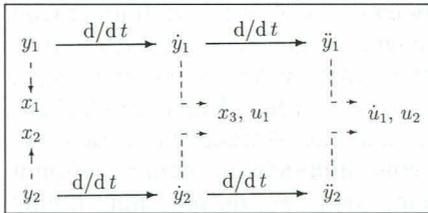


Bild 3: Schema der Flachheitsanalyse für das kinematische Fahrzeugmodell (9). Dabei stehen die gestrichelten Pfeile \rightarrow für die Bestimmung der Systemgrößen x_1, x_2, x_3, u_1, u_2 aus $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2$ und \ddot{y}_1, \ddot{y}_2 .

anderen Systemgrößen (x_3, u_1, \dot{u}_1, u_2) bestimmt werden. Dieses Schema repräsentiert auch die Struktur des inversen Fahrzeugmodells zwischen den Ausgängen $y_{1,2}$ und den Eingängen $u_{1,2}$.

Die für die Analyse der Flachheit erforderlichen symbolischen Rechnungen sind teilweise recht umfangreich. Sie können jedoch mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems, wie z.B. MATHEMATICA oder MAPLE, rechnerunterstützt durchgeführt werden. Hierfür wird in [13] eine in MATHEMATICA implementierte Funktionsbibliothek für die Anwendung der flachheitsbasierten Methode vorgestellt.

4 Flachheitsbasierte Steuerung

Für flache Systeme ist es leicht möglich, das nichtlineare Trajektorienfolgeproblem entweder durch eine Steuerung (im offenen Kreis) oder durch eine Regelung zu lösen. Bei der Vorgabe bzw. Planung der Solltrajektorien können die folgenden drei Fälle unterschieden werden:

- (i) Die Solltrajektorien werden für den flachen Ausgang y als hinreichend oft differenzierbarer Zeitverlauf $y_d(t), t \in [0, T]$ vorgegeben.
- (ii) Die Solltrajektorien werden für die Regelgrößen $w = q(x), \dim w = m$ als hinreichend oft differenzierbarer Zeitverlauf $w_d(t), t \in [0, T]$ vorgegeben, wobei mindestens eine Regelgröße $w_i, i \in \{1, \dots, m\}$ keine Komponente des flachen Ausgangs y ist.
- (iii) Die Solltrajektorien sind nur durch den Anfangszustand $x_d(0)$ und den Endzustand $x_d(T)$ festgelegt. Das hieraus resultierende Folgeproblem hängt eng mit der Frage nach der Steuerbarkeit zusammen.

Die Bestimmung der Steuerfunktion $u_d(t)$ zur Lösung des Folgeproblems ist dann leicht möglich, wenn die Solltrajektorien wie im Fall (i) in den Koordinaten des flachen Ausgangs y vorgegeben sind. Deshalb müssen die Problemstellungen (ii) und (iii) zuerst auf diesen Fall zurückgeführt werden.

Zur Umrechnung der Trajektorien $w_d(t)$ kann man in $w_d = q(x_d)$ den Zustand x_d mit Hilfe von (6a) durch y_d und seine Zeitableitungen ersetzen

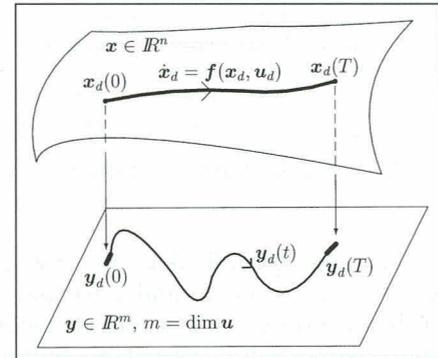


Bild 5: Solltrajektorien $x_d(t)$ und $y_d(t)$ in den ursprünglichen bzw. den flachen Koordinaten. Die dicken Linien bei $y_d(0)$ und $y_d(T)$ deuten an, daß durch die Vorgabe von $x_d(0)$ und $x_d(T)$ auch die Werte einer endlichen Zahl von Zeitableitungen $y_d^{(k)}(t), k \geq 1$ für $t = 0$ bzw. $t = T$ festgelegt sind.

$$w_d = q_d \left(\psi_1 \left(y_d, \dot{y}_d, \dots, y_d^{(\beta)} \right) \right). \tag{12}$$

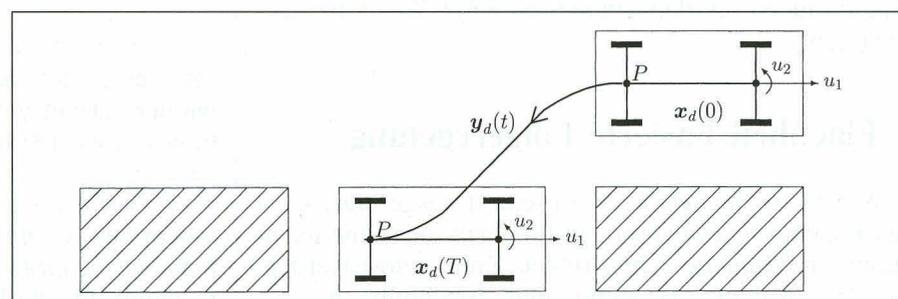
Diese Beziehung stellt eine (implizite) Dgl. für die Solltrajektorie $y_d(t)$ dar, die symbolisch oder numerisch (stabil) integriert werden muß. Gibt man für das Fahrzeugmodell (9) beispielsweise die Solltrajektorien $w_{1,d}(t)$ und $w_{2,d}(t)$ für die Koordinaten $(x_1 + \cos x_3, x_2 + \sin x_3)$ des Vorderachsmittelpunkts vor, so erhält man mit (12) die beiden folgenden impliziten Dgln. zur Bestimmung der Solltrajektorien $y_{1,d}(t)$ und $w_{2,d}(t)$

$$\begin{aligned} \cos(\arctan(\dot{y}_{2,d}/\dot{y}_{1,d})) + y_{1,d} &= w_{1,d}, \\ \sin(\arctan(\dot{y}_{2,d}/\dot{y}_{1,d})) + y_{2,d} &= w_{2,d}. \end{aligned}$$

Daraus entnimmt man, daß die Koordinaten des Vorderachsmittelpunkts für die Trajektorienplanung weniger geeignet sind.

Für das Fahrzeugmodell (9) gehört das Einparken in eine Parklücke zu dem Fall (iii), wobei nach Bild 4 der Anfangszustand $x_d(0)$ und der Endzustand $x_d(T)$ vorgegeben sind. Aus diesen können mit Hilfe von (11) die Anfangs- und Endwerte $y_d(0)$ und $y_d(T)$ der Solltrajektorien und deren Zeitableitungen bis zur zweiten Ordnung für den flachen Ausgang (10) bestimmt werden. Diese beiden Positionen werden dann unter Berücksichtigung eventueller Hindernisse durch hinreichend oft differenzierbare Kurven (Splines, Polynome, etc.) miteinander verbunden, wie dies in Bild 4 dargestellt ist.

Bild 4: Einparktrajektorie $y_d(t), t \in [0, T]$ für das Fahrzeug (9).



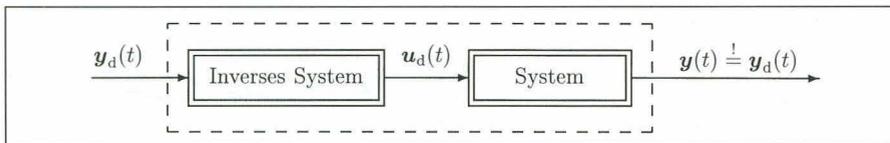


Bild 6: Lösung des Trajektorienfolgeproblems im offenen Kreis.

Die Planung der Trajektorien $x_d(t)$, $t \in [0, T]$, die den Anfangs- und Endzustand $x_d(0)$ bzw. $x_d(T)$ verbinden, ist im x -Koordinatensystem schwierig, da – wie in Bild 5 dargestellt – zu jedem Zeitpunkt $0 < t < T$ die Systemdgl. (4) erfüllt sein muß. Daher ist es a priori nicht klar, für welche Zustandsgrößen unabhängig voneinander Solltrajektorien vorgegeben werden können.

Wenn die Solltrajektorien $y_d(t)$ in den Koordinaten des flachen Ausgangs vorliegen, erhält man durch Einsetzen von $y_d(t)$ in (6) die zugehörigen Zustände und Eingänge

$$y_{x_d}(t) = \psi_1 \left(y_d(t), \dot{y}_d(t), \dots, y_d^{(\beta)}(t) \right), \quad (13a)$$

$$y_{u_d}(t) = \psi_2 \left(y_d(t), \dot{y}_d(t), \dots, y_d^{(\beta+1)}(t) \right). \quad (13b)$$

Danach wird die Steuerung $u_d(t)$ durch das inverse System (13b) erzeugt und auf das System (4) aufgeschaltet, wie dies in Bild 6 dargestellt ist. Die Beziehungen (13) können dazu benutzt werden, vorab Beschränkungen der Zustands- und Eingangsgrößen zu überprüfen. Da es sich dabei um explizite algebraische Gleichungen handelt, kann ohne die Integration von Dgln. festgestellt werden, ob die Zeitfunktionen (13) vorgegebene Beschränkungen einhalten. Ist dies nicht der Fall, sind andere Solltrajektorien zu wählen.

Außerdem erhält man im Fall (iii) die Steuerung $u_d(t)$, die das System in endlicher Zeit T von dem Anfangszustand $x(0)$ in den Zustand $x(T)$ überführt. In diesem Sinne kann die Flachheit als eine mögliche Verallgemeinerung der Steuerbarkeit betrachtet werden [2].

Die Steuerfunktion $u_d(t)$ existiert bei flachen Systemen überall außer in den Singularitäten der Funktionen ψ_2 . Treten solche Singularitäten auf, so sind die Solltrajektorien $y_d(t)$ bzw. $w_d(t)$ gegebenenfalls so zu wählen, daß die Singularitäten vermieden werden. Für das Fahrzeugmodell (9) erhält man die flachheitsbasierte Steuerung $u_d(t)$ aus den Gleichungen für u_1 und u_2 in (11) durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke von $y_d(t)$. Dabei sind – wie bei den Gln. (11) – die Singularitäten in dem Punkt $\dot{y}_1 = \dot{y}_2 = 0$ zu berücksichtigen.

5 Flachheitsbasierte Folgeregelung

Wie im vorhergehenden Abschnitt ausgeführt, kann das Trajektorienfolgeproblem für flache Systeme leicht durch eine Steuerung im offenen Kreis gelöst werden. Ist das System (4) stabil und beschreibt es das

dynamische Verhalten hinreichend genau, so kann die Trajektorienfolge durch eine Steuerung $u_d(t)$ erreicht werden. Dazu müssen außerdem die Anfangswerte des Systems hinreichend genau bekannt sein, und es dürfen nur kleine Störungen auf das System ein-

wirken. Sind diese Voraussetzungen nicht erfüllt, so muß eine Folgeregelung auf der Basis einer Zustandsrückführung entworfen werden, die die Folgebewegung stabilisiert und die Vorgabe eines bestimmten Einschwingverhaltens ermöglicht.

Dies soll am Beispiel des Fahrzeugmodells (9) erläutert werden. Tritt bei der gesteuerten Bewegung z.B. Schlupf auf, so wird das tatsächliche Verhalten des (grenzstabilen) Systems von dem Sollverhalten abweichen. In diesem Fall muß die Folgebewegung durch eine Zustandsrückführung stabilisiert werden. Hierfür führt man die neuen Eingänge

$$v_1 = \dot{y}_1, \quad v_2 = \dot{y}_2 \quad (14)$$

ein. Setzt man diese Beziehungen in die Gleichungen für u_1 und u_2 in (11) ein, so ergibt sich eine sogenannte *quasi-statische* Zustandsrückführung [17; 18]

$$u_1 = \frac{v_1}{\cos(\arctan \dot{y}_2/v_1)}, \quad (15a)$$

$$u_2 = \psi_1(y_1, y_2, v_1, \dot{y}_2/v_1, \dot{v}_1, v_2), \quad (15b)$$

die auch von der Zeitableitung \dot{v}_1 des neuen Eingangs v_1 abhängt. Dadurch wird das System (9) bzw. (11) in zwei Integratorketten der Länge $n_1 = 1$ und $n_2 = 2$ zerlegt. Setzt man (14) in die Beziehungen für x_1 , x_2 und x_3 in (11) ein, so erhält man

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad x_3 = \arctan \dot{y}_2/v_1. \quad (16a)$$

Dies kann als verallgemeinerte Zustandstransformation interpretiert werden, die den ursprünglichen Zustand x mit dem neuen Zustand

$$z := [y_1, y_2, \dot{y}_2]^T \quad (16b)$$

verknüpft. Wendet man die Zustandstransformation (16) und die Zustandstransformation (15) auf das nichtlineare System (9) an, so erhält man in den Koordinaten (16b) die Brunovský-Normalform

$$\dot{z}_1 = v_1; \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dot{z}_3 = v_2. \quad (17)$$

In diesen Koordinaten kann leicht eine Eigenwertvorgabe für die Dynamik des Folgefehlers $e = y - y_d$ vorgenommen werden, indem die neuen Eingänge

$$v_1 = \dot{y}_{1,d} + p_1(y_{1,d} - y_1), \quad (18a)$$

$$v_2 = \ddot{y}_{2,d} + p_2(\dot{y}_{2,d} - \dot{y}_2) + p_3(y_{2,d} - y_2) \quad (18b)$$

mit geeigneten Koeffizienten p_1 , p_2 und p_3 gewählt werden. Dabei wird die in (15b) auftretende Zeitableitung \dot{v}_1 aus (18) bestimmt

$$\dot{v}_1 = \ddot{y}_{1,d} + p_1(\dot{y}_{1,d} - \dot{v}_1), \quad (18c)$$

indem man \dot{y}_1 entsprechend (14) durch v_1 ersetzt. Setzt man (18) in (14) ein, so ergibt sich eine exakt lineare Dynamik für die Folgefehler e_1 und e_2

$$\dot{e}_1 + p_1 e_1 = 0; \quad \ddot{e}_2 + p_2 \dot{e}_2 + p_3 e_2 = 0.$$

Die Zustandsrückführung (15) hängt von der Eingangsableitung \dot{y}_1 ab. In der asymptotischen Folgeregelung (15), (18) wird diese Ableitung jedoch mit Hilfe von (18c) durch Zeitableitung der Solltrajektorie $y_{1,d}$ ausgedrückt. Es handelt sich also um ein statisches Regelgesetz. Da der Zustand des geschlossenen Kreises durch die Rückführung nicht erweitert wird, spricht man bei (15) von einer *quasi-statischen Zustandsrückführung*.

Das Blockschaltbild des flachheitsbasierten Folgeregelkreises für das Fahrzeugmodell (9) ist in Bild 7 dargestellt. Dabei wird davon ausgegangen, daß alle Zustände x gemessen werden. Das Blockschaltbild umfaßt die folgenden vier Blöcke, die den einzelnen Schritten des Entwurfs einer flachheitsbasierten asymptotischen Folgeregelung entsprechen: In Block 1 werden die Solltrajektorien $y_d(t)$ für die Komponenten des flachen Ausgangs – wie in Abschnitt 4 beschrieben – aus den Solltrajektorien $w_d(t)$ für die Regelgrößen berechnet und für die Führungsgrößenaufschaltung in dem Folgeregler (Block 3) verwendet. In Block 2 wird die Dynamik des Folgefehlers durch die Zustandsrückführung (15) exakt linearisiert. In Block 3 wird durch den Folgeregler (18) das Einschwingverhalten des Folgefehlers vorgegeben. In Block 4 wird der flache Ausgang y aus x und u bestimmt.

Anstelle der *quasi-statischen Zustandsrückführung* (15), (18) kann auch eine *dynamische Zustandsrückführung* im Sinne von [19] (vgl. auch [3; 4]) für das Fahrzeugmodell (9) angegeben werden. Hierzu führt man mit

$$x_4 = u_1, \quad \dot{x}_4 = \bar{u}_1, \quad \bar{u}_2 = u_2$$

den neuen Zustand x_4 und die neuen Eingänge \bar{u}_1, \bar{u}_2 ein. Wählt man analog zu (14) die Eingänge

$$\bar{v}_1 = \ddot{y}_1, \quad \bar{v}_2 = \ddot{y}_2,$$

so erhält man durch Auflösen der Gleichungen für \ddot{y}_1 und \ddot{y}_2 in (11) nach \bar{u}_1 und \bar{u}_2 die *dynamische Zustandsrückführung* der Form

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \bar{u}_1, \\ \bar{u}_1 &= \bar{v}_1 \cos x_3 + \bar{v}_2 \sin x_3, \\ \bar{u}_2 &= \arctan \left(-\frac{\sin x_3}{x_4^2} \bar{v}_1 + \frac{\cos x_3}{x_4^2} \bar{v}_2 \right). \end{aligned}$$

Im Unterschied zur quasi-statischen Zustandsrückführung (15), (18), bei der der Zustand des geschlossenen Kreises die Dimension drei hat, ist diese bei der dynamischen Zustandsrückführung gleich vier.

Die am Beispiel des Fahrzeugmodells erklärte Vorgehensweise beim Entwurf einer asymptotischen Folgeregelung gilt auch allgemein für flache nichtlineare Systeme. Dabei sind die vier anhand von Bild 7 diskutierten Entwurfsschritte auszuführen [13].

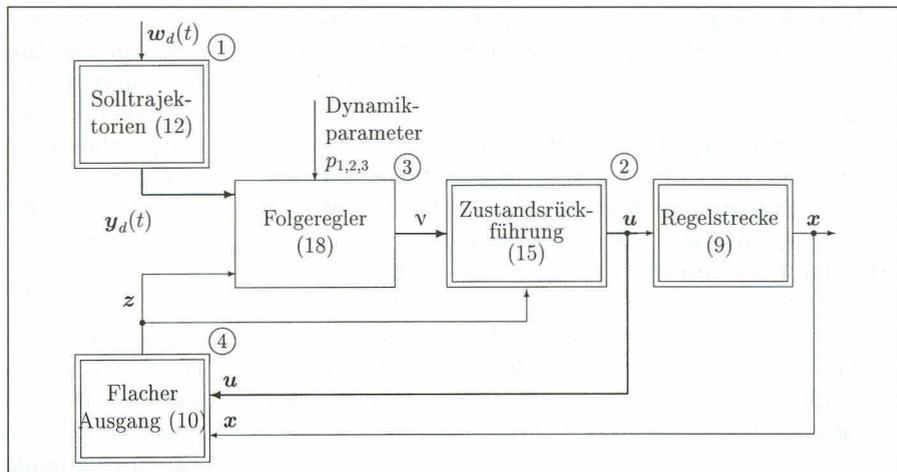


Bild 7: Blockschaltbild des flachheitsbasierten Folgeregelkreises für das Fahrzeugmodell (9). Dicke Pfeile bedeuten, daß neben der angezeigten Größe (z.B. u) auch alle für die Berechnungen erforderlichen Zeitableitungen dieser Größe eingeschlossen sind.

6 Nichtlinearer Folgebeobachter mit zeitvarianter Verstärkung

Für die Realisierung der flachheitsbasierten Folgeregelung ist die Kenntnis aller Zustände erforderlich. Aus diesem Grund müssen die nicht gemessenen Zustandsvariablen aus den Meßgrößen

$$\eta = h(x), \quad \eta \in \mathbb{R}^p \tag{19}$$

mit Hilfe eines Beobachters geschätzt werden. Für beobachtbare flache Systeme kann eine nichtlineare Zustandsschätzung auf der Basis der um die Solltrajektorien linearisierten Gleichungen entworfen werden [12; 13; 20]. Dies soll ebenfalls am Beispiel des Fahrzeugmodells (9) gezeigt werden, wobei die Koordinaten des Hinterachsmittelpunktes

$$\eta = [x_1, x_2]^T \tag{20}$$

gemessen werden. In diesem Fall stimmen die Meßgrößen η_1, η_2 mit den Komponenten y_1, y_2 des flachen Ausgangs (10) überein. Diese spezielle Annahme ist nicht erforderlich bzw. im allgemeinen auch nicht erfüllt. Allerdings ist im Fall der Messung des flachen Ausgangs wegen der Beziehung (6a) das flache System beobachtbar.

Für den Entwurf des Beobachters wird angenommen, daß das Fahrzeug durch die quasi-statische Zustandsrückführung (15), (18) geregelt wird

$$\begin{aligned} \hat{u}_1 &= \frac{\hat{v}_1}{\cos(\arctan \hat{y}_2 / \hat{v}_1)}, \\ \hat{u}_2 &= \psi_1(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{v}_1, \hat{y}_2, \hat{v}_1, \hat{v}_2), \\ \hat{v}_1 &= \dot{y}_{1,d} + p_1(y_{1,d} - \hat{y}_1), \\ \hat{v}_2 &= \ddot{y}_{2,d} + p_2(\dot{y}_{2,d} - \hat{y}_2) + p_3(y_{2,d} - \hat{y}_2), \\ \dot{\hat{v}}_1 &= \ddot{y}_{1,d} + p_1(\dot{y}_{1,d} - \dot{\hat{v}}_1). \end{aligned} \tag{21}$$

Dabei deuten die Größen $\hat{y}, \hat{u}, \hat{v}$ und $\dot{\hat{v}}_1$ an, daß die Zustände x bei der Bildung der genannten Größen durch die Schätzwerte \hat{x} ersetzt werden.

Beim Entwurf des nichtlinearen Folgebeobachters zur Realisierung einer flachheitsbasierten Folgeregelung werden die beiden folgenden Eigenschaften ausgenutzt:

- (a) Aufgrund der Flachheitseigenschaft (13) können aus der Kenntnis des Solltrajektorienverlaufs $y_d(t)$ die Sollverläufe $x_d(t)$ für die Zustände sowie die Stellgrößen $u_d(t)$ berechnet werden.
- (b) Durch die im letzten Abschnitt erläuterte Folgeregelung nimmt der Trajektorienfolgefehler $e = y - y_d$ asymptotisch ab, d.h. die Abweichungen zwischen den Sollwerten $y_d(t)$ und den tatsächlichen Werten $y(t)$ sind (hinreichend) klein. Dadurch sind auch die Abweichungen

$$\delta x = x - x_d, \quad \delta u = u - u_d \quad (22)$$

zwischen dem Sollverlauf $x_d(t)$, $u_d(t)$ und dem tatsächlichen Verlauf $x(t)$, $u(t)$ (hinreichend) klein.

Unter den genannten Voraussetzungen kann ein nichtlinearer Folgebeobachter mit der zeitvarianten Verstärkungsmatrix $L(t)$ angesetzt werden:

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, \hat{u}) + L(t)(\eta - h(\hat{x})), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0, \quad \hat{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (23)$$

Dabei wird angenommen, daß das System (4) durch eine flachheitsbasierte Zustandsrückführung \hat{u} analog zu (21) geregelt wird, d.h. der Beobachter (23) wird für den geschlossenen Folgeregelkreis entworfen.

Die Anfangswerte \hat{x}_0 des Beobachters (23) können über die Annahme

$$\hat{x}_0 = x_d(0) \quad (24)$$

hinreichend genau bestimmt werden. Durch eine geeignete Dimensionierung der Matrix $L(t)$ muß dann sichergestellt werden, daß die Schätzwerte \hat{x} gegen x konvergieren.

Aus (23), (19) und der Gleichung $\dot{x} = f(x, \hat{u})$ des geschlossenen Kreises erhält man die nichtlineare Dynamik des Schätzfehlers $\tilde{x} = \hat{x} - x$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= f(\hat{x}, \hat{u}) - f(x, \hat{u}) + L(t)(h(x) - h(\hat{x})), \\ \tilde{x}(0) &= \hat{x}_0 - x_0. \end{aligned} \quad (25)$$

Aufgrund der Eigenschaft (b) und der hinreichend genauen Anfangswerte (24) können die nichtlinearen Terme in (25) um die Solltrajektorien $x_d(t)$ und $u_d(t)$ linearisiert werden, und man erhält die linearisierte Schätzfehlerdynamik

$$\dot{\delta \tilde{x}} = \underbrace{[A(t)\delta \tilde{x} + B(t)\delta \hat{u} - L(t)(C(t)\delta x - C(t)\delta \hat{x})]}_{\text{Beobachter}} - \underbrace{[A(t)\delta x + B(t)\delta \hat{u}]}_{\text{System}} \quad (26a)$$

mit den zeitvarianten Matrizen

$$\begin{aligned} A(t) &= \left. \frac{\partial f(x, \hat{u})}{\partial x} \right|_{x_d(t), u_d(t)}, & B(t) &= \left. \frac{\partial f(x, \hat{u})}{\partial \hat{u}} \right|_{x_d(t), u_d(t)}, \\ C(t) &= \left. \frac{\partial h(x)}{\partial x} \right|_{x_d(t)}. \end{aligned} \quad (26b)$$

Wegen der Eigenschaft (a) sind die Verläufe von $x_d(t)$ und $u_d(t)$ bekannt, und die Matrizen $A(t)$, $B(t)$ und

$C(t)$ können explizit angegeben werden. Darüber hinaus wird angenommen, die Elemente der Matrizen $A(t)$, $B(t)$ und $C(t)$ seien absolut beschränkt [21] bzw. exponentiell beschränkt [22]. Dies kann durch eine entsprechende Wahl der Solltrajektorien stets erreicht werden.

Aus (26a) erhält man die lineare zeitvariante Dgl. für den Schätzfehler

$$\delta \dot{\tilde{x}} = (A(t) - L(t)C(t))\delta \tilde{x}, \quad \delta \tilde{x}(0) = \hat{x}_0 - x_0. \quad (27)$$

Diese Linearisierung ist nur gültig, wenn durch die Wahl (24) der Anfangsfehler $\delta \tilde{x}_0$ hinreichend klein ist und aufgrund der flachheitsbasierten Folgeregelung die Zustandsgrößen x in der Nähe der Sollwerte $x_d(t)$ bzw. die Abweichungen δx klein bleiben. Dann gilt für die lineare zeitvariante Betrachtung des flachheitsbasierten Folgeregelkreises mit Zustandsschätzung das *Separationstheorem*, d.h. die Dynamik des Schätzfehlers (27) kann unabhängig von der Dynamik des Trajektorienfolgefehlers entworfen werden.

Die Dimensionierung der zeitvarianten ($n \times p$)-Verstärkungsmatrix $L(t)$ kann mit Hilfe der zeitvarianten Beobachter-Normalform durchgeführt werden [21; 23]. Hierzu wird das linearisierte Fehlersystem (27) durch eine zeitabhängige Transformation $\delta \tilde{\zeta} = T(t)\delta \tilde{x}$ in diese Normalform transformiert und die Verstärkungsmatrix $L^*(t) = T(t)L(t)$ durch Eigenwertvorgabe bestimmt. Diese Schritte zur Berechnung von $L(t)$ sind in der *Ackermann-Formel* zum Entwurf linearer zeitvarianter Beobachter zusammengefaßt [23]. In [13] wird diese Formel für Systeme mit mehreren Meßgrößen ($p > 1$) hergeleitet.

Für das Fahrzeugmodell (9), (20) lauten die Matrizen (26b)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -u_{1,d} \sin x_{3,d} \\ 0 & 0 & u_{1,d} \cos x_{3,d} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & B &= \begin{pmatrix} \cos x_{3,d} & 0 \\ \sin x_{3,d} & 0 \\ \tan u_{2,d} & \frac{u_{1,d}}{\cos^2 u_{2,d}} \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

in Abhängigkeit von den Sollgrößen $x_{3,d}(t)$, $u_{1,d}(t)$ und $u_{2,d}(t)$. Für die Dimensionierung der zeitvarianten (3×2)-Verstärkungsmatrix $L(t)$ wird das linearisierte Fehlersystem

$$\delta \dot{\tilde{x}} = \begin{pmatrix} -l_{11} & -l_{12} & -u_{1,d} \sin x_{3,d} \\ -l_{21} & -l_{22} & u_{1,d} \cos x_{3,d} \\ -l_{31} & -l_{32} & 0 \end{pmatrix} \delta \tilde{x}$$

durch eine zeitabhängige Transformation $\delta \tilde{\zeta} = T(t)\delta \tilde{x}$ in die zeitvariante Beobachter-Normalform transformiert

$$\delta \dot{\tilde{\zeta}} = 0 \begin{pmatrix} 0 & -(a_{11}^* + l_{11}^*) & -(a_{12}^* + l_{12}^*) \\ 1 & -(a_{21}^* + l_{21}^*) & -(a_{22}^* + l_{22}^*) \\ & -(a_{31}^* + l_{31}^*) & -(a_{32}^* + l_{32}^*) \end{pmatrix} \delta \tilde{\zeta}. \quad (28)$$

Durch eine geeignete Wahl der Verstärkungsfaktoren $l_{ij}^*(t)$ kann die Zeitvarianz der Fehlerdynamik (28) kompensiert und ein gewünschtes Einschwingverhalten

mittels Eigenwertvorgabe festgelegt werden. Die Verstärkungsmatrix $L(t)$ in den Originalkoordinaten ergibt sich aus der Rücktransformation $L(t) = T^{-1}(t)L^*(t)$.

Für den in Abschnitt 2 erwähnten chemischen Rührkesselreaktor werden die flachheitsbasierte Folge- regelung mit Folgebeobachter in [12; 13] anhand von Simulationen ausführlich untersucht.

7 Zusammenfassung

Die Erfahrungen mit den flachheitsbasierten Methoden zeigen, daß eine Vielzahl von nichtlinearen Entwurfsmodellen flach ist. Letztlich hängt die Flachheit eines Systems von der Anzahl und Art der Stellglieder des betrachteten Prozesses ab. Daher kann die Flachheitsanalyse auch dazu verwendet werden, die Möglichkeiten zur Steuerung eines Prozesses durch geeignete Wahl der Stelleingriffe zu verbessern.

Der flachheitsbasierte Entwurf einer nichtlinearen Folge- regelung geschieht in zwei Stufen: Zunächst erfolgt eine Planung der Trajektorie zur Beschreibung des Sollverhaltens. Dann wird die Folgebewegung entlang der Solltrajektorie durch eine Regelung stabilisiert. Für die linearen Systeme ist die Flachheit mit der Steuerbarkeit identisch. Deshalb kann der Entwurf einer linearen Folge- regelung mit einer Führungsgrößenaufschaltung und einer asymptotischen Stabilisierung auch als flachheitsbasiert interpretiert werden.

Neuere Untersuchungen belegen, daß das Konzept der Flachheit auf weitere Systemklassen, wie z.B. (lineare und nichtlineare) totzeitbehaftete Systeme [24] oder spezielle über Randeingriffe gesteuerte Systeme mit örtlich verteilten Parametern [25; 26] übertragen werden kann. Diese Anwendungen betreffen u.a. die flachheitsbasierte Folge- regelung von chemischen Rohrreaktoren und elastischen Roboterarmen.

Die dargestellten Untersuchungen wurden von der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG) gefördert.

Literatur

- [1] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P. und Rouchon, P.: On differentially flat nonlinear systems. In M. Fliess (Editor), *Nonlinear Control Systems Design*, S. 408–412, Pergamon Press, 1992.
- [2] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P. und Rouchon, P.: Flatness and defect of nonlinear systems: Introductory theory and examples. *Int. J. Control*, 61 (1995), S. 1327–1361.
- [3] Isidori, A.: *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 3rd edition, 1995.
- [4] Nijmeijer, H. und van der Schaft, A. J.: *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, 1990.
- [5] Schwarz, H.: *Nichtlineare Regelsysteme – Systemtheoretische Grundlagen*. R. Oldenbourg-Verlag, München 1991.
- [6] Engell, S. (Editor): *Entwurf nichtlinearer Regelungen*. R. Oldenbourg Verlag, München 1995.
- [7] Rouchon, P., Fliess, M., Lévine, J. und Martin, P.: Flatness and motion planning: the car with n trailers. In J.W. Nieuwenhuis, C. Praagman, and H. L. Trentelman, (Eds.), *Proc. 2nd European Control Conference ECC '93*, Groningen/The Netherlands, S. 1518–1522, 1993.
- [8] Martin, P. und Rouchon, P.: Flatness and sampling control of induction motors. In *Proc. 13th IFAC World Congress '96*, San Francisco, USA, S. 389–394, 1996.
- [9] Chelouah, A., Delaleau, E., Martin, P. und Rouchon, P.: Differential flatness and control of induction motors. In *Proc. Symposium on Control, Optimization and Supervision „Computational Engineering in Systems Applications“ IMACS Multiconference*, Lille/France, July 9–12, 1996, S. 80–85, 1996.
- [10] Lévine, J., Lottin, J., und Ponsart, J.C.: A nonlinear approach to the control of magnetic bearings. *IEEE Trans. Control Systems Technology*, 4 (1996), S. 524–544.
- [11] Murray, R. M.: Trajectory generation for a towed cable system using differential flatness. In *Proc. 13th IFAC World Congress '96*, San Francisco, USA, S. 395–400, 1996.
- [12] Rothfuß, R., Rudolph, J. und Zeitz, M.: Flatness based control of a nonlinear chemical reactor model. *Automatica*, 32 (1996), S. 1433–1439.
- [13] Rothfuß, R.: *Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme*. Dissertation, VDI-Fortschritt-Berichte Nr.8/664, VDI-Verlag, Düsseldorf 1997.
- [14] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P. und Rouchon, P.: Linéarisation par bouclage dynamique et transformations de Lie-Bäcklund. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 317 (1993), S. 981–986.
- [15] Fliess, M., Lévine, J., Martin, P. und Rouchon, P.: Design of trajectory stabilizing feedback for driftless flat systems. In Isidori, A. et al., (Editor), *Proc. 3rd European Control Conference ECC '95*, Roma/Italy, S. 1882–1887, 1995.
- [16] Martin, P., Murray, R. M. und Rouchon, P.: Flat Systems, In: Bastin, G. and Gevers, M. (Eds.): *Plenary Lectures and Mini-Courses*, 4th European Control Conference ECC '97, Brussels/Belgium, 1997, S. 211–264.
- [17] Delaleau, E. und Fliess, M.: Algorithmes de structure, filtrations et découplage. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 315 (1992), S. 101–106.
- [18] Delaleau, E. und Rudolph, J.: Decoupling and linearization by quasi-static feedback of generalized states. In Isidori, A. et al., (Editor), *3rd European Control Conference ECC '95*, Roma/Italy, S. 1069–1074, 1995.
- [19] Charlet, B., Lévine, J. und Marino, R.: Sufficient conditions for dynamic state feedback linearization. *SIAM J. Control and Optim.*, 29 (1991), S. 38–57.
- [20] Fliess, M. und Rudolph, J.: Corps de Hardy et observateurs asymptotiques locaux pour les systèmes différentiellement plats. *C. R. Acad. Sci. Paris, Série II b*, 324 (1997), S. 513–519.
- [21] Freund, E.: *Zeitvariable Mehrgrößensysteme*. Springer-Verlag, 1971.
- [22] Fliess, M. und Rudolph, J.: Local „tracking observers“ for flat systems. In *Proc. Symposium on Control, Optimization and Supervision „Computational Engineering in Systems Applications“ IMACS Multiconference*, Lille/France, S. 213–217, 1996.
- [23] Föllinger, O.: Entwurf zeitvarianter Systeme durch Polvorgabe. *Regelungstechnik*, 6 (1978), S. 189–196.
- [24] Mounier, H. und Rudolph, J.: First steps towards flatness based control of a class of nonlinear chemical reactors with time delays. In *Proc. 4th European Control Conference ECC '97*, Brussels/Belgium, TU-E-H 4, 1997.
- [25] Fliess, M., Mounier, H., Rouchon, P. und Rudolph, J.: Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d'une poutre flexible. In *ESAIM Proc. Élasticité, Viscoélasticité et Contrôle Optimal*, 8ème Entretiens du Centre Jacques Cartier, To appear.
- [26] Mounier, H., Aoustin, Y., Fliess, M., Rouchon, P. und Rudolph, J.: Theory and practice in the motion planning of a flexible robot arm using Mikusiński operators. In *Proc. Syroco-97*, Nantes, Sept. 1997, 1997. To appear.