

# Randsteuerung von Wärmetauschern mit örtlich verteilten Parametern: Ein flachheitsbasierter Zugang

## Boundary Control of Heat Exchangers with Spatially Distributed Parameters: A Flatness-Based Approach

Joachim Rudolph, TU Dresden

*Herrn Prof. Dr.-Ing. M. Zeitz zum 60. Geburtstag gewidmet.*

---

Die Erweiterung des von den nichtlinearen endlichdimensionalen Systemen stammenden Flachheitskonzepts auf lineare Systeme mit örtlich verteilten Parametern und Randeingriffen wird hier zum Entwurf von Steuerungen für typische Parallelstrom- und Gegenstromwärmetauscher ausgenutzt. Operatorenrechnung gestattet die explizite Parametrierung der Lösungen durch sogenannte flache Ausgänge. Für den Parallelstromwärmetauscher übernimmt die Zuflusstemperatur der Heizflüssigkeit (bzw. der Kühlflüssigkeit) die Rolle des flachen Ausganges, beim Gegenstromwärmetauscher der Ortsgradient beim Zufluss der zu erwärmenden (bzw. der zu kühlenden) Flüssigkeit. Die Lösungen lassen Integraldarstellungen mit endlichem Träger zu, in denen Besselfunktionen auftreten; sie beschreiben „verteilte Totzeiten“ bzw. „verteilte Prädiktionen“. Es ergibt sich eine einfache exakte Methode für die Planung von Übergangsvorgängen zwischen stationären Betriebszuständen und zur Berechnung der dazu erforderlichen Steuerungen.

The extension of the flatness concept, stemming from nonlinear finite dimensional systems, to linear systems with distributed parameters and boundary control is exploited here for the control of typical heat exchanger models: with parallel flow and with counter-flow. Operational calculus allows us to obtain an explicit parametrization of the solution by a so-called flat output. In the present case, this flat output is the inflow temperature of the heating (or cooling) fluid in the parallel flow case, whereas in the counter-flow case it is the spatial gradient of the temperature field at the inflow of the fluid to be heated (or cooled). These solutions give rise to integral representations comprising Bessel functions which can be interpreted as involving „distributed delays“ and „distributed predictions“. This leads to a simple exact trajectory planning method for the transition between stationary regimes and to a direct computation of the corresponding open-loop boundary controls.

---

## 1 Einleitung

Differentiell flache nichtlineare Systeme [3; 4; 17; 28; 30] zeichnen sich durch eine vollständige, endliche und freie differentielle Parametrierbarkeit der Systemtrajektorien aus: Die Lösung kann als differentielle Funktion voneinander unabhängig wählbarer Trajektorien eines sog. flachen Ausgangs dargestellt werden. Auf der Grundlage dieser Eigenschaft konnten effiziente Methoden zur Trajektorienplanung und zur Folgeregelung entwickelt werden. In ähn-

licher Weise eröffnet die sog.  $\pi$ -Freiheit linearer Totzeitsysteme [21; 6], ein aus der Modultheorie linearer Systeme [2] stammendes Steuerbarkeitskonzept, die Möglichkeit zur Lösung der Trajektorienplanung und der Folgeregelung für diese speziellen unendlichdimensionalen Systeme – dieses Konzept bildet zusammen mit der Flachheit nichtlinearer Systeme auch den Ausgangspunkt für die Definition der sog.  $\pi$ -Flachheit nichtlinearer Totzeitsysteme [24]. Mit Hilfe des Konzepts der  $\pi$ -Freiheit konnten Steuerungen und Regelungen für solche hyperbolischen linearen Sys-

teme mit verteilten Parametern und konzentrierten Stelleingriffen entworfen werden, die eine Modellierung als Totzeitsysteme zulassen [26; 8; 22; 23; 25].

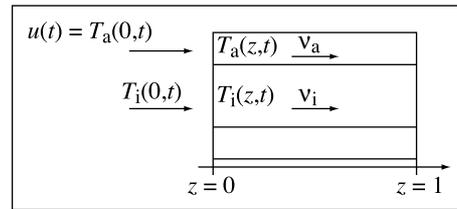
Die Verallgemeinerung der  $\pi$ -Freiheit eröffnet neue Möglichkeiten für die Steuerung weiterer Systeme mit örtlich verteilten Systemen, deren Stellgrößen über den Rand (oder anderweitig örtlich konzentriert) einwirken. Im Rahmen der Modultheorie werden diese Systeme durch Verwendung von an die jeweiligen Modelle angepassten Ringen beschrieben. Auf diese Weise konnten beispielsweise schon parabolische Systeme behandelt werden, die Wärmeleitungsaufgaben oder einfache Rohrreaktoren beschreiben [10; 11; 17; 16; 29], sowie durch biharmonische Gln. (Euler-Bernoulli-Balkengln.) beschriebene flexible Roboterarme [1; 9; 15] und ein piezo-elektrischer Bieger [14]. Einzelne Erweiterungen des Konzepts für spezielle nicht-lineare Systeme mit verteilten Parametern sind ebenfalls bekannt [17; 27; 32].

In [5] wurde für eine durch die (lineare) Telegraphengl. beschriebene Leitung eine Signalverarbeitungsmethode vorgeschlagen, die ebenfalls auf der hier interessierenden  $\pi$ -Freiheit linearer verteilter Systeme basiert. Die zur Beschreibung dieses Systems verwandten Operatoren sind jenen ähnlich, die in den math. Modellen einfacher Wärmetauscher auftreten: Sie führen auf Integrale mit endlichen Trägern, die als „verteilte Totzeiten“ und „verteilte Prädiktionen“ interpretiert werden können (Man erinnere sich daran, dass die verlustfreie Leitung auf Totzeitsysteme führt – s. z.B. [22].) Entsprechend treten auch bei der Trajektorienplanung der hier untersuchten Wärmetauschermodelle solche „verteilten Totzeiten“ und „verteilten Prädiktionen“ auf.

Zwei Klassen von Wärmetauschern werden untersucht: Parallelstrom- und Gegenstromwärmetauscher. In Abschnitt 2 werden die mathematischen Modelle eingeführt und dann mit Hilfe der Operatorenrechnung in eine für den Entwurf von Steuerungen geeignete Form überführt. In Abschnitt 3 wird eine Steuerung für den Übergang zwischen zwei stationären Betriebszuständen entworfen. Dazu wird jeweils einer Größe, die die Rolle eines „flachen Ausgangs“ übernimmt, eine Trajektorie zugewiesen: im Fall des Parallelstroms der Zuflusstemperatur der erwärmenden (oder kühlenden) Flüssigkeit (die als Stellgröße aufgefasst werden kann), im Gegenstromfall dem Ortsgradienten der zu erwärmenden (oder zu kühlenden) Flüssigkeit beim Eintritt in den Wärmetauscher. Der erzielte Zeitverlauf der Temperaturprofile wird mit Simulationsergebnissen illustriert, und die theoretischen Grundlagen werden in Abschnitt 4 skizziert.

## 2 Mathematische Modelle

Ein einfacher Wärmetauscher besteht aus zwei ineinander steckenden zylindrischen Rohren mit einer gemeinsamen Symmetrieachse (vgl. Bild 1). Nimmt man den Wärmeaustausch zwischen dem äußeren Rohr und der Umgebung und



**Bild 1:** Prinzipskizze eines einfachen Wärmetauschers.

die Wärmeleitung als vernachlässigbar an, so erhält man ein mathematisches Modell der Form

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial T_i}{\partial z} = a(T_a - T_i) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial T_a}{\partial t} + v_a \frac{\partial T_a}{\partial z} = b(T_i - T_a). \quad (1b)$$

Dabei stehen  $T_a(z, t)$  und  $T_i(z, t)$  für die Temperaturen im äußeren bzw. im inneren Rohr,  $z \in [0, 1]$  ist die Orts- und  $t \geq 0$  die Zeitvariable. Die konstanten und reellen Parameter des Modells sind: die Strömungsgeschwindigkeiten  $v_i$  und  $v_a$ , die Dichten  $\rho_i$ ,  $\rho_a$  und die spezifischen Wärmekapazitäten  $c_i$ ,  $c_a$  der Flüssigkeiten innen und außen, schließlich der Wärmeaustauschkoeffizient  $\alpha_i$  und die Radien der Rohre  $r_i$  und  $r_a$ . Mit diesen physikalischen Parametern kann man

$$a = \frac{2 \alpha_i}{c_i \rho_i r_i} \quad \text{und} \quad b = \frac{2 \alpha_i r_i}{c_a \rho_a (r_a^2 - r_i^2)}$$

definieren. Zur Vereinfachung der Schreibweise ist die Länge des Wärmetauschers normiert.

Werden als Anfangsbedingung stationäre Profile angenommen, so kann in Folge der Linearität des Modells

$$T_i(z, 0) = T_a(z, 0) = 0$$

betrachtet werden; jedes andere stationäre Profil kann durch Superposition addiert werden. Wird für den Gegenstromfall eine negative Geschwindigkeit im Innenrohr,  $v_i < 0$ , verwandt, sind die pDgln. des Modells in beiden Fällen identisch. Hingegen ergeben sich unterschiedliche Randbedingungen, denn der Zufluss des Innenrohrs befindet sich in diesem Fall bei  $z = 1$ . Fasst man die Zuflusstemperatur des Außenrohrs (bei  $z = 0$ ) als Stellgröße auf,  $u(t) = T_a(0, t)$ , so ergeben sich die Randbedingungen

$$T_i(0, t) = T_{i0}(t) = 0, \quad T_a(0, t) = u(t)$$

für den Parallelstrom und

$$T_i(1, t) = T_{i1}(t) = 0, \quad T_a(0, t) = u(t)$$

bei Gegenstrom.

Es ist hilfreich, in den pDgln. durch die Geschwindigkeiten zu dividieren und die Mittelwerte und Differenzgrößen als Parameter zu verwenden:

$$\bar{v} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_i} + \frac{1}{v_a} \right), \quad \Delta v = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{v_i} - \frac{1}{v_a} \right),$$

$$\bar{\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{v_i} + \frac{b}{v_a} \right), \quad \Delta \beta = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{v_i} - \frac{b}{v_a} \right);$$

damit lauten die Gln. (1)

$$\frac{\partial T_i}{\partial z} + (\bar{v} + \Delta v) \frac{\partial T_i}{\partial t} - (\bar{\beta} + \Delta\beta)(T_a - T_i) = 0$$

$$\frac{\partial T_a}{\partial z} + (\bar{v} - \Delta v) \frac{\partial T_a}{\partial t} - (\bar{\beta} - \Delta\beta)(T_i - T_a) = 0.$$

Nun gewinnt man die pDgln. des Gegenstromfalls aus denen des Parallelstromfalls, indem man  $v_i > 0$  verwendet und jeweils  $\bar{\beta}$  durch  $-\Delta\beta$  und  $\bar{v}$  durch  $-\Delta v$  ersetzt, und vice versa.

## 2.1 Übertragungsfunktionen

Einführen des Operators  $s$  für die Ableitung nach der Zeit  $t$  und der Operatorfunktionen<sup>1</sup>  $\hat{T}_i(z, s)$  und  $\hat{T}_a(z, s)$  – s. dazu Abschnitt 4 – führt auf das System gew. Dgln.

$$\frac{d\hat{T}_i}{dz} + (\bar{v} + \Delta v)s \hat{T}_i - (\bar{\beta} + \Delta\beta)(\hat{T}_a - \hat{T}_i) = 0$$

$$\frac{d\hat{T}_a}{dz} + (\bar{v} - \Delta v)s \hat{T}_a - (\bar{\beta} - \Delta\beta)(\hat{T}_i - \hat{T}_a) = 0.$$

Darin spielt  $s$  die Rolle eines Parameters. Für dieses lineare Differentialgleichungssystem kann leicht die allgemeine Lösung in Abhängigkeit der Randbedingungen bestimmt werden. Dies führt in bekannter Weise auf die im folgenden detaillierten Übertragungsfunktionen.

### 2.1.1 Parallelstromwärmetauscher

Für den Parallelstromwärmetauscher ergibt sich

$$\hat{T}_i(z, s) = G_{T_{a0}}^{T_i}(z, s) \hat{u}(s)$$

$$= \left[ \frac{(\bar{\beta} + \Delta\beta) \sinh(\sqrt{\Delta v^2 s^2 + 2\Delta v \Delta\beta s + \bar{\beta}^2} z)}{\sqrt{\Delta v^2 s^2 + 2\Delta v \Delta\beta s + \bar{\beta}^2}} \right] e^{-(s\bar{v} + \bar{\beta})z} \hat{u}(s)$$

$$\hat{T}_a(z, s) = G_{T_{a0}}^{T_a}(z, s) \hat{u}(s)$$

$$= \left[ \cosh(\sqrt{\Delta v^2 s^2 + 2\Delta v \Delta\beta s + \bar{\beta}^2} z) + \frac{(s\Delta v + \Delta\beta) \sinh(\sqrt{\Delta v^2 s^2 + 2\Delta v \Delta\beta s + \bar{\beta}^2} z)}{\sqrt{\Delta v^2 s^2 + 2\Delta v \Delta\beta s + \bar{\beta}^2}} \right] e^{-(s\bar{v} + \bar{\beta})z} \hat{u}(s),$$

mit den ortsabhängigen Übertragungsfunktionen  $G_{T_{a0}}^{T_i}(z, s)$  und  $G_{T_{a0}}^{T_a}(z, s)$  von der Stellgröße  $u = T_{a0}$  jeweils zu den Temperaturen innen und außen an der Stelle  $z$ .

<sup>1</sup> Die sich mit dem hier verwendeten Mikusínskischen Operatorenkalkül ergebenden Ausdrücke entsprechen in vielen Anwendungen jenen, die sich bei einer Verwendung der Laplacetransformation ergäben – s. hierzu z.B. [20]. Die Voraussetzungen zur Anwendung dieses Operatorenkalküls sind weniger streng und gestatten die Lösung der hier untersuchten Aufgabe.

### 2.1.2 Gegenstromwärmetauscher

Für den Gegenstromwärmetauscher ergeben sich analog die ortsabhängigen Übertragungsfunktionen

$$G_{T_{a0}}^{T_i}(z, s) = \frac{\mathcal{N}_1(z, s)}{\mathcal{D}(s)} = \frac{\hat{T}_i(z, s)}{\hat{T}_a(0, s)}$$

$$G_{T_{a0}}^{T_a}(z, s) = \frac{\mathcal{N}_2(z, s)}{\mathcal{D}(s)} = \frac{\hat{T}_a(z, s)}{\hat{T}_a(0, s)},$$

mit

$$\mathcal{D}(s) = e^{-(s\Delta v + \Delta\beta)}$$

$$\left( \cosh\left(\sqrt{\bar{v}^2 s^2 + 2\bar{v}\bar{\beta}s + \Delta\beta^2}\right) + (s\bar{v} + \bar{\beta}) \frac{\sinh\left(\sqrt{\bar{v}^2 s^2 + 2\bar{v}\bar{\beta}s + \Delta\beta^2}\right)}{\sqrt{\bar{v}^2 s^2 + 2\bar{v}\bar{\beta}s + \Delta\beta^2}} \right)$$

$$\mathcal{N}_1(z, s) = e^{(s\Delta v + \Delta\beta)(z-1)} (\bar{\beta} + \Delta\beta) \frac{\sinh\left(\sqrt{\bar{v}^2 s^2 + 2\bar{v}\bar{\beta}s + \Delta\beta^2}(1-z)\right)}{\sqrt{\bar{v}^2 s^2 + 2\bar{v}\bar{\beta}s + \Delta\beta^2}}$$

$$\mathcal{N}_2(z, s) = e^{(s\Delta v + \Delta\beta)(z-1)} \left( \cosh\left(\sqrt{\bar{v}^2 s^2 + 2\bar{v}\bar{\beta}s + \Delta\beta^2}(1-z)\right) + (s\bar{v} + \bar{\beta}) \frac{\sinh\left(\sqrt{\bar{v}^2 s^2 + 2\bar{v}\bar{\beta}s + \Delta\beta^2}(1-z)\right)}{\sqrt{\bar{v}^2 s^2 + 2\bar{v}\bar{\beta}s + \Delta\beta^2}} \right).$$

Unter Verwendung von

$$\hat{B}(s) = \mathcal{D}^{-1}(s) \hat{T}_a(0, s)$$

können  $\hat{T}_i(z, s)$  und  $\hat{T}_a(z, s)$  dargestellt werden, ohne den zu  $\mathcal{D}(s)$  inversen Operator zu benutzen:

$$\hat{T}_i(z, s) = \mathcal{N}_1(z, s) \hat{B}(s)$$

$$\hat{T}_a(z, s) = \mathcal{N}_2(z, s) \hat{B}(s).$$

Es lohnt sich, die physikalische Bedeutung der Größe  $\hat{B}(s)$  offenzulegen, die die Rolle eines „flachen Ausgangs“ übernimmt. Man verifiziert leicht durch Ableiten von  $\hat{T}_i$  nach  $z$  und Auswerten bei  $z = 1$ , dass sie (bis auf eine Skalierung) den Ortsgradienten des Temperaturprofils  $T_i(z, t)$  im Innenrohr bei  $z = 1$  beschreibt:

$$B(t) = \frac{-1}{(\bar{\beta} + \Delta\beta)} \frac{\partial T_i}{\partial z}(1, t).$$

Stationär entspricht dieser Gradient der Temperaturdifferenz zwischen den beiden Rohren an der Stelle  $z = 1$ , das ergibt sich aus der pDgl. (1a) des Modells.

Es kann nun bereits ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Fällen unterstrichen werden: Während im Parallelstromfall zur Berechnung der Temperaturprofile keiner der auftretenden Operatoren invertiert werden muß, wird

eine solche Operatorinversion zum Einführen von  $\hat{B}(s)$  erforderlich. Aus dieser Größe können allerdings die Temperaturen dann leicht berechnet werden, diese Berechnung bildet den Inhalt des nächsten Abschnitts. Die Erörterung dieser Unterschiede wird in der Folge noch vertieft.

### 3 Übergang zwischen stationären Profilen

#### 3.1 Zeitabhängige Lösungen

Zur Berechnung der Funktionen, die den in den Gln. für die Wärmetauscher auftretenden Operatoren und Operatorfunktionen entsprechen, kann man sich der Korrespondenztabelle der Laplacetransformation bedienen. So findet man beispielsweise als Nr. 337 in der Tabelle des Buchs von G. Fodor [13]

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{e^{-T\sqrt{\sigma^2 + \alpha^2}}}{\sqrt{\sigma^2 + \alpha^2}} \right\} = \mathbf{1}(t - T) J_0 \left( \alpha \sqrt{t^2 - T^2} \right)$$

für  $T > 0$ , wobei  $J_0$  die Besselsche Funktion erster Gattung nullter Ordnung ist. Diese Korrespondenz kann im Rahmen von Mikusínskis Operatorenkalkül zur Berechnung von  $\sinh(T\sqrt{\sigma^2 + \alpha^2}) / (\sqrt{\sigma^2 + \alpha^2})$  und  $\cosh(T\sqrt{\sigma^2 + \alpha^2})$  auf  $T < 0$  ausgedehnt werden (Man kann das Ergebnis leicht verifizieren.). Die Substitution von

$$\sigma = s + \frac{\Delta\beta}{\Delta v}, \quad \alpha = \frac{\sqrt{\bar{\beta}^2 + (\Delta\beta)^2}}{\Delta v}, \quad \text{und } T = \Delta v z$$

führt für den Parallelstromfall auf

$$T_i(z, t) = \frac{(\bar{\beta} + \Delta\beta) e^{-\bar{\beta}z}}{2 \Delta v} \int_{-\Delta v z}^{\Delta v z} J_0 \left( \alpha \sqrt{\tau^2 - (\Delta v z)^2} \right) e^{-\frac{\bar{\beta}}{\Delta v} \tau} T_a(0, t - \bar{v} z - \tau) d\tau$$

und

$$T_a(z, t) = \frac{\alpha e^{-\bar{\beta}z}}{2} \int_{-\Delta v z}^{\Delta v z} \frac{\Delta v z - \tau}{\sqrt{\tau^2 - (\Delta v z)^2}} J_1 \left( \alpha \sqrt{\tau^2 - (\Delta v z)^2} \right) e^{-\frac{\bar{\beta}}{\Delta v} \tau} T_a(0, t - \bar{v} z - \tau) d\tau + e^{(\Delta\beta - \bar{\beta})z} T_a(0, t - (\bar{v} - \Delta v)z),$$

mit der Besselfunktion erster Gattung erster Ordnung  $J_1$ . Es ergibt sich also für die Temperaturprofile jeweils ein Integral mit endlichem Träger, das als „verteilte Totzeit“ interpretiert werden kann<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> Man kann dieses Ergebnis auch mit der Riemannschen Integrationsmethode ableiten.

Für den Gegenstromwärmetauscher treten die gleichen Operatoren auf: Es genügt somit auch hier, jeweils  $\bar{\beta}$  mit  $-\Delta\beta$  und  $\bar{v}$  mit  $-\Delta v$  zu vertauschen. Mit  $\alpha = -\sqrt{\bar{\beta}^2 + (\Delta\beta)^2} / \bar{v}$  erhält man

$$T_i(z, t) = \frac{(\bar{\beta} + \Delta\beta)}{2 \bar{v}} \int_{-\bar{v}(1-z)}^{\bar{v}(1-z)} J_0 \left( \alpha \sqrt{\tau^2 - (\bar{v}(1-z))^2} \right) e^{-\frac{\bar{\beta}}{\bar{v}} \tau} B(t - \tau) d\tau$$

$$T_a(z, t) = \frac{\alpha}{2} \int_{-\bar{v}(1-z)}^{\bar{v}(1-z)} \frac{(\bar{v}(1-z) - \tau) J_1 \left( \alpha \sqrt{\tau^2 - (\bar{v}(1-z))^2} \right)}{\sqrt{\tau^2 - (\bar{v}(1-z))^2}} e^{-\frac{\bar{\beta}}{\bar{v}} \tau} B(t - \tau) d\tau + e^{\bar{\beta}(1-z)} B(t + \bar{v}(1-z)).$$

Hier wird neben der „verteilten Totzeit“ auch eine „verteilte Prädiktion“ (jeweils endlicher Amplitude) erforderlich: Die geplante Trajektorie von  $B$  muß um  $\bar{v}$  im Voraus bekannt sein, denn zur Berechnung der Temperaturen an der Stelle  $z = 0$  wird  $B(t + \bar{v})$  benötigt.

#### 3.2 Trajektorienplanung und Berechnung der Steuerungen

Zur Parametrierung eines Übergangs zwischen zwei stationären Profilen reicht es nun aus, folgende Trajektorien für den jeweiligen „flachen Ausgang“ zu wählen:

- $[0, t_*] \ni t \mapsto u(t) \in \mathbb{R}$  für die Stellgröße  $u$  im Parallelstromfall;
- und  $[0, t_*] \ni t \mapsto B(t) \in \mathbb{R}$  für den Gradienten  $\partial T_i / \partial z(1, t)$  beim Gegenstromwärmetauscher.

Man beachte, dass (im Gegensatz beispielsweise zu den parabolischen pDgl. in [10; 11; 16]) keinerlei Differenzierbarkeitseigenschaften für diese Trajektorien gefordert werden müssen: Es handelt sich um ein hyperbolisches System.

Für den Parallelstromwärmetauscher wird der Endwert der Trajektorie aus dem gewünschten stationären Wert der Temperatur im Innenrohr am Ende des Übergangsvorgangs berechnet, also aus  $T_i(1, t_*) = T_{i, \text{stat.}}(1)$ ; es muß

$$u(t_*) = T_{a, \text{stat.}}(0) = \frac{2\bar{\beta}}{(\bar{\beta} + \Delta\beta)(1 - e^{-2\bar{\beta}})} T_i(1, t_*)$$

gelten. Die Wahl der Funktion zwischen dem Anfangswert  $u(0) = 0$  und dem Endwert  $u(t_*)$  ist a priori freigestellt.

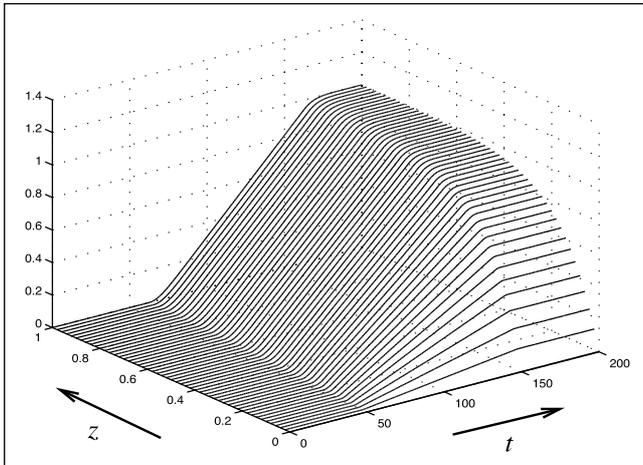
Für den Gegenstromfall wird ähnlich vorgegangen:

$$B(t_*) = \frac{\Delta\beta}{(\bar{\beta} + \Delta\beta) \sinh(\Delta\beta)} T_{i, \text{stat.}}(0).$$

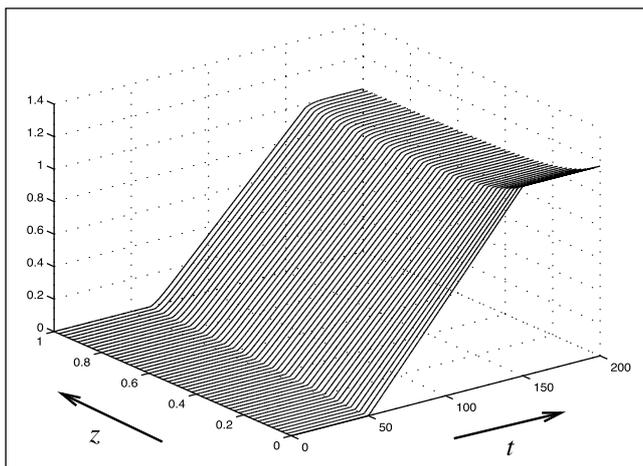
Die Stellgröße ergibt sich daraus durch Auswertung von  $T_a(z, t)$  an der Stelle  $z = 0$ .

### 3.3 Simulationsergebnisse

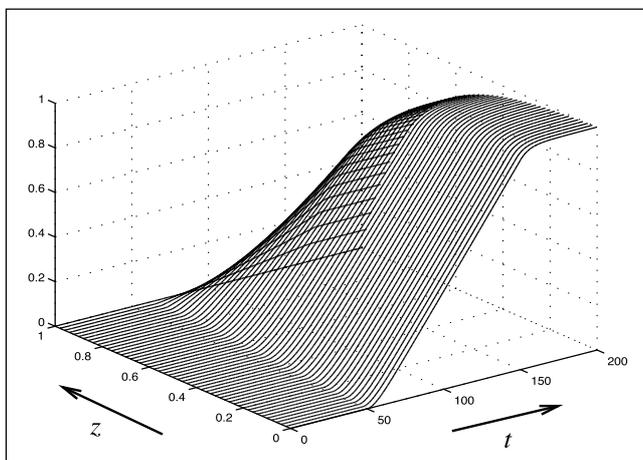
Für den Parallelstromwärmetauscher zeigen Bild 2 und Bild 3 die zeitliche Veränderung der Temperaturprofile.



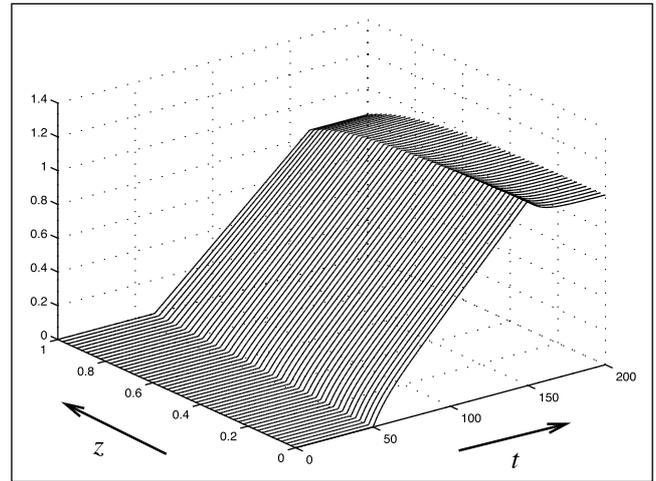
**Bild 2:** Zeitlicher Verlauf des ortsabhängigen Temperaturprofils im Innenrohr eines Parallelstromwärmetauschers bei einer linearen Erhöhung der Zuflusstemperatur im Außenrohr.



**Bild 3:** Zeitlicher Verlauf des ortsabhängigen Temperaturprofils im Außenrohr eines Parallelstromwärmetauschers bei einer linearen Erhöhung der Zuflusstemperatur im Außenrohr.



**Bild 4:** Zeitlicher Verlauf des ortsabhängigen Temperaturprofils im Innenrohr eines Gegenstromwärmetauschers bei einer linearen Erhöhung von  $B(t)$ .



**Bild 5:** Zeitlicher Verlauf des ortsabhängigen Temperaturprofils im Außenrohr eines Gegenstromwärmetauschers bei einer linearen Erhöhung von  $B(t)$ .

Diese Lösung entspricht einer in  $t$  linearen Erhöhung der Stellgröße  $u(t)$ , also der Temperatur  $T_a(0, t)$ .

Entsprechend zeigen die Bilder 4 und 5 das Verhalten eines Gegenstromwärmetauschers bei einer in  $t$  linearen Erhöhung von  $B(t)$ .

## 4 Theoretische Grundlagen

Es soll hier nur ein kurzer Abriss der theoretischen Grundlagen gegeben werden. Eine umfassendere Abhandlung findet sich z.B. in [7; 9; 12] und den darin angegebenen Literaturstellen.

### 4.1 Mikusińskis Operatorenkalkül

Die Menge der stetigen Funktionen  $[0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{C}$ , ausgestattet mit der Addition  $+$ ,  $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$ , und dem Faltungsprodukt  $\star$ ,  $(f \star g)(t) = (g \star f)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t - \tau) d\tau = \int_0^t g(\tau)f(t - \tau) d\tau$  bildet einen kommutativen Ring  $\mathcal{C}$ . Einem berühmten Satz von Titchmarsh zufolge (s. [19; 20; 31]) ist  $\mathcal{C}$  nullteilerfrei:  $f \star g = 0 \Leftrightarrow f = 0$  oder  $g = 0$ . Der Quotientenkörper  $\mathcal{M}$  von  $\mathcal{C}$  heißt *Mikusiński-Körper*, seine Elemente *Operatoren*.

Schreibweise: 1) Wird eine Funktion  $f(t) \in \mathcal{C}$  als Operator aus  $\mathcal{M}$  aufgefasst (durch Einbettung), so schreibt man dafür oft  $\{f(t)\}$ .

2) Das (Faltungs-)Produkt zweier Operatoren  $a, b \in \mathcal{M}$  wird  $ab$  geschrieben.

Beispiele: 1) Das neutrale Element, 1, in  $\mathcal{M}$  heißt *Dirac-Operator*, dieser entspricht der Diracschen Distribution in der Theorie von L. Schwartz, und er darf nicht mit der Heaviside-Funktion  $\{\mathbf{1}\} \in \mathcal{C}$  verwechselt werden.

2) Die Heaviside-Funktion  $\{\mathbf{1}\}$  besitzt ein inverses Element in  $\mathcal{M}$ , den Differentialoperator  $s$ , der der gewohnten Regel genügt: Ist  $f \in \mathcal{C}$  eine  $C^1$ -Funktion, dann ist  $\{sf\} = \{\dot{f}\} + \{f(0)\}$ , mit  $\dot{f}$  der Ableitung von  $f$ .

3) Die Operatoren des Unterkörpers  $\mathbb{C}(s)$  der gebrochen rationalen Ausdrücke in  $s$  haben die übliche Bedeutung.

4) Die Operatoren  $e^{-\lambda s}$ , mit  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$  sind die Totzeitoperatoren konstanter Amplitude  $\lambda$ . Ihre Inversen  $e^{\lambda s}$  sind Prädiktionsoperatoren.

Eine *Operatorfunktion* [18; 19; 20] ist eine Abbildung  $I \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$ ; deren Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit können in gewohnter Weise definiert werden.

## 4.2 Moduln und Systeme

Sei  $R$  ein über  $\mathbb{C}$  durch eine endliche Anzahl von Operatoren und Operatorfunktionen erzeugter Ring, und sei  $A = R[\pi^{-1}]$ , mit  $\pi \in R$ , eine  $R$ -Algebra. Ein lineares  $R$ -System  $\Sigma$  ist dann ein endlich erzeugter  $R$ -Modul<sup>3</sup>. Ist  $\Sigma$  ein freier<sup>4</sup> Modul, so wird eine Basis als *flacher Ausgang*<sup>5</sup> bezeichnet. Ist  $A \otimes \Sigma$  frei<sup>6</sup> und  $1 \otimes \hat{\zeta}$ , mit  $\hat{\zeta} \in \Sigma$ , eine Basis, dann heißt  $\Sigma$   $\pi$ -frei, und  $\hat{\zeta}$  wird als  $\pi$ -flacher Ausgang bezeichnet.

Beispiele: 1) Mit  $R = \mathbb{R}[s]$  erhält man ein zeitinvariantes lineares endlichdimensionales System. Bilden  $z_1, \dots, z_s$  ein Erzeugendensystem des  $R$ -Moduls  $\Sigma$ , dann können die Beziehungen zwischen diesen Größen, die Systemgl., in der Form  $\sum_{i=1}^s a_{j,i}(s) z_i = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , mit  $a_{j,i} \in R$ , angeschrieben werden. Der Modul  $\Sigma$  ist genau dann frei, wenn er torsionsfrei ist: Das System ist dann steuerbar [2]. Jede beliebige Systemgröße  $w \in \Sigma$  kann in diesem Fall als  $R$ -Linearkombination der Komponenten eines flachen Ausgangs  $(b_1, \dots, b_m)$  dargestellt werden:  $w = \sum_{i=1}^m c_i(s) b_i$ , mit  $c_i \in R$ . Für ein durch nur zwei Größen  $y$  und  $u$  erzeugtes  $R$ -System mit den Gln.  $d(s)y - n(s)u = 0$  entspricht die Steuerbarkeit bekanntlich der Teilerfremdheit von  $d(s)$  und  $n(s)$ , und ein flacher Ausgang, also eine Basis von  $\Sigma$ , ist dann das Element  $b \in \Sigma$ , für das gilt  $y = n(s)b$  und  $u = d(s)b$ .

2) Mit  $R = \mathbb{R}[s, e^{-\lambda s}]$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > 0$  erhält man ein System, dessen Gln. ein Totzeitsystem beschreiben. Beispiele mögen die eingeführten Konzepte illustrieren:

a) Sei  $\Sigma_1$  das durch  $y$  und  $u$  erzeugte  $\mathbb{R}[s, e^{-\lambda s}]$ -System mit der Gl.  $s y - s e^{-\lambda s} u = 0$ . Der Modul  $\Sigma_1$  ist nicht torsionsfrei und damit auch nicht frei, denn  $z = y - e^{-\lambda s} u \in \Sigma_1$  genügt der Beziehung  $s z = 0$ .

b) Sei  $\Sigma_2$  das durch  $y$  und  $u$  erzeugte  $\mathbb{R}[s, e^{-\lambda s}]$ -System mit der Gl.  $s^2 y + e^{-\lambda s} y - u = 0$ . Der Modul  $\Sigma_2$  ist frei:  $y$

ist eine Basis, denn alle Größen in  $\Sigma_2$  sind  $R$ -Linearkombinationen von  $y$  und  $u = (s^2 + e^{-\lambda s}) y$ , also von der Form  $c y$ , mit  $c \in R$ .

c) Sei  $\Sigma_3$  das durch  $y$  und  $u$  erzeugte  $\mathbb{R}[s, e^{-\lambda s}]$ -System mit der Gl.  $s y - e^{-\lambda s} u = 0$ . Der Modul  $\Sigma_2$  ist torsionsfrei aber nicht frei (ein geeignetes Kriterium findet sich z.B. in [6; 21]). Der  $\mathbb{R}[s, e^{-\lambda s}, e^{\lambda s}]$ -Modul  $\mathbb{R}[s, e^{-\lambda s}, e^{\lambda s}] \otimes \Sigma_3$  hingegen ist frei: Man kann  $u$  durch  $y$  ausdrücken, wenn die Multiplikation mit dem Prädiktionsoperator  $e^{\lambda s}$  zugelassen wird. Das System  $\Sigma_3$  ist folglich  $e^{-\lambda s}$ -frei und  $y$  ein  $e^{-\lambda s}$ -flacher Ausgang. Die Erweiterung des Systems durch Hinzunahme einer Prädiktion erlaubt also die Parametrierung der Lösung mit einer Trajektorie für  $y$ .

Was bedeuten diese Definitionen nun für die Wärmetauschermodelle? Für den Parallelstromwärmetauscher ist das System der freie  $\mathbb{C}[G_{T_{a0}}^{T_i}(z, s), G_{T_{a0}}^{T_a}(z, s)]$ -Modul mit der Basis  $\hat{u}$ . Diese Definition des Systems besagt im wesentlichen, dass die in einem math. Modell des Wärmetauschers auftretenden Größen in der Form  $a \hat{u}$  dargestellt werden können, wobei  $a$  ein Polynom in  $G_{T_{a0}}^{T_i}(z, s), G_{T_{a0}}^{T_a}(z, s)$  und  $s$  ist, mit komplexen Koeffizienten. So können insbesondere  $\hat{T}_a$  und  $\hat{T}_i$  in dieser Weise dargestellt werden, wie dies in Abschnitt 2.1.1 geschah.

Für den Gegenstromwärmetauscher ist das System der  $\mathbb{C}[\mathcal{N}_1(z, s), \mathcal{N}_2(z, s), \mathcal{D}(s)]$ -Modul  $\Lambda$ , der durch  $\hat{T}_i, \hat{T}_a$  und  $\hat{u}$  erzeugt wird: Die Systemgl. können mit Linearkombinationen der Größen  $\hat{T}_i, \hat{T}_a$  und  $\hat{u}$  mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}[\mathcal{N}_1(z, s), \mathcal{N}_2(z, s), \mathcal{D}(s)]$  dargestellt werden (vgl. Abschnitt 2.1.2). Der Modul  $\Lambda$  ist torsionsfrei<sup>7</sup>. Sei  $A = \mathbb{C}[\mathcal{N}_1(z, s), \mathcal{N}_2(z, s), \mathcal{D}(s), \mathcal{D}(s)^{-1}]$ ; dann ist das  $A$ -System  $A \otimes \Lambda$  frei und  $\hat{B}$  eine Basis, also ist  $\hat{B}$  ein  $\mathcal{D}$ -flacher Ausgang von  $\Lambda$ . Dies wurde in Abschnitt 2.1.2 ausgenutzt, um lineare Gln. für die die Temperaturprofile beschreibenden Systemgrößen  $\hat{T}_i$  und  $\hat{T}_a$  abzuleiten, in denen als Koeffizienten nur Ausdrücke aus  $\mathbb{C}[\mathcal{N}_1(z, s), \mathcal{N}_2(z, s), \mathcal{D}(s)]$  auftraten. Dadurch war es möglich, die den Operatorfunktionen entsprechenden Funktionen von  $z$  und  $t$  zu bestimmen. Auch hier wird also, analog zu dem oben als Beispiel c) untersuchten Totzeitsystem, nach einer Erweiterung des Systems durch Zulassen der Inversion eines Operators die Parametrierung der Lösung mit einer Trajektorie für den  $\mathcal{D}(s)$ -flachen Ausgang  $\hat{B}$  möglich. Das führt erneut auf eine – nun „verteilte“ – Prädiktion.

## 5 Zusammenfassung

Wie für flache nichtlineare Systeme (endlicher Dimension) können auch für die üblichen Modelle einfacher Wärmetauscher, lineare Systeme mit örtlich verteilten Parametern und Randeingriffen, die Lösungen mit einem „flachen Ausgang“ parametrieren. Dies gestattet eine effiziente Planung von Übergangsvorgängen und die Berechnung der dazu erforderlichen Stellsignale. Das zugrunde-

<sup>3</sup> Die Elemente eines endlich erzeugten  $R$ -Moduls sind Linearkombinationen, mit Koeffizienten in dem Ring  $R$ , einer endlichen Zahl von sog. Erzeugenden. Es handelt sich also um zu Vektorräumen analoge Strukturen: Vektorräume sind spezielle Moduln, die über einem Ring erzeugt werden, dessen Elemente Inverse bezügl. der Multiplikation besitzen, also über einem Körper.

<sup>4</sup> Ein freier  $R$ -Modul ist ein  $R$ -Modul, der eine Basis besitzt, also ein  $R$ -linear unabhängiges Erzeugendensystem. Auch hier erkennt man den Spezialfall der Basis eines Vektorraums.

<sup>5</sup> französisch als „sortie basique“ oder „sortie plate“, englisch als „basic output“ oder als „flat output“

<sup>6</sup> Man kann  $A \otimes \Sigma$  als durch Hinzunehmen von  $\pi^{-1}$  zu dem Ring  $R$  entstanden verstehen, d.h. in dieser Struktur können Potenzen von  $\pi^{-1}$  in den Koeffizienten der Linearkombinationen auftreten.

<sup>7</sup> D.h. es gibt keine Beziehung der Form  $az = 0$  mit  $0 \neq a \in \mathbb{C}[\mathcal{N}_1(z, s), \mathcal{N}_2(z, s), \mathcal{D}(s)]$  und  $z \in \Lambda$ .

liegende Konzept erweitert das zur Flachheit analoge Konzept der  $\pi$ -Freiheit linearer Totzeitsysteme mit Totzeiten konstanter Amplitude. Die Interpretation der mit Hilfe des Operatorenkalküls erhaltenen Lösung im Zeitbereich ergibt „verteilte Totzeiten“ und „verteilte Prädiktionen“, die durch Integrale mit endlichen Trägern beschrieben werden. Während das Entwurfsverfahren für den Parallelstromwärmetauscher im wesentlichen die Berechnung der Lösung für einen vorgegebenen Stellgrößenverlauf ausnutzt, wird für den Gegenstromwärmetauscher der Zeitverlauf einer Größe vorgegeben, die zunächst nicht zu den das System beschreibenden sog. Systemgrößen gehört: Im zugrundeliegenden modultheoretischen Rahmen ist eine Erweiterung des Systems durch Hinzunahme eines inversen Operators erforderlich. Auf diese Weise kommt es zum Auftreten einer „verteilten Prädiktion“.

Eine Reihe weiterer Beispiele zur Anwendung des vorgestellten Konzepts findet sich in der Literaturliste. Dabei treten je nach den pDgl. der Modelle unterschiedliche Operatoren auf, die im Gegensatz zur hier verwandten Integraldarstellung mitunter auf Reihendarstellungen führen. Während bei den hier untersuchten hyperbolischen Systemen keinerlei Differenzierbarkeitsanforderungen an die Trajektorien des „flachen Ausgangs“ gestellt werden müssen, sind dann glatte Trajektorien erforderlich, die außerdem zusätzlichen Bedingungen genügen müssen, um die Konvergenz der Reihen sicherzustellen.

## Danksagung

Die vorgestellten Ergebnisse entstanden im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projektes. Der Dank des Autors gilt auch den ehemaligen Diplomanden am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie Herrn Dipl.-Ing. Th. Wallstein und Herrn Dipl.-Ing. F. Woittennek für ihre Beteiligung an den Berechnungen und den Programmierarbeiten zur Simulation.

## Literatur

- [1] Y. Aoustin, M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph, *Theory and practice in the motion planning and control of a flexible robot arm using Mikusiński operators*, in: Proc. IFAC-SYROCO Conf., Nantes, S. 287–293, 1997.
- [2] M. Fliess, Some basic structural properties of generalized linear systems, *Systems & Control Lett.*, 15, 391–396, 1990.
- [3] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon, Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and applications, *Internat. J. Control*, 61, 1327–1361, 1995.
- [4] M. Fliess, J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon, A Lie-Bäcklund approach to equivalence and flatness of nonlinear systems, *IEEE Trans. Automat. Control*, 44, 922–937, 1999.
- [5] M. Fliess, Ph. Martin, N. Petit und P. Rouchon, Commande de l'équation des télégraphistes et restauration active d'un signal, *Traitement du Signal, Spécial*, 15, 619–625, 1998.
- [6] M. Fliess und H. Mounier. Controllability and observability of linear delay systems: an algebraic approach, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 3, 301–314, (URL: <http://www.emath.fr/COCV/>), 1998.
- [7] M. Fliess und H. Mounier. *Tracking control and  $\pi$ -freeness of infinite dimensional linear systems*, in: Dynamical Systems, Control, Coding, Computer Vision, G. Picci und D. S. Gilliam (Hg.), Birkhäuser, Boston, S. 45–68, 1999.
- [8] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph, *Controllability and motion planning for linear delay systems with an application to a flexible rod*, in: Proc. 34th Conference on Decision & Control, New Orleans, S. 2046–2051, 1995.
- [9] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph, Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d'une poutre flexible, *ESAIM Proc.*, 2, 183–193, (URL: <http://www.emath.fr/proc/Vol.2/>), 1997.
- [10] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph, *Controlling the transient of a chemical reactor: a distributed parameter approach*, in: Proc. Computational Engineering in Systems Application IMACS Multiconference, Hammamet, Tunesien (CESA '98), 1998.
- [11] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph, *A distributed parameter approach to the control of a tubular reactor: a multi-variable case*, in: Proc. 37th Conference on Decision & Control, Tampa, Florida, S. 439–442, 1998.
- [12] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph, *Gevrey functions, Mikusiński's operational calculus and motion planning for some elementary distributed parameter systems*, in Vorbereitung.
- [13] G. Fodor, *Laplace transforms in Engineering*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1965.
- [14] W. Haas und J. Rudolph, *Steering the deflection of a piezoelectric bender*, in: Proc. European Control Conference ECC 99, Karlsruhe, 1999.
- [15] D. Hisseine, B. Lohmann und A. Kuczynski, *Two control approaches for a flexible-link manipulator*, in: Proc. IASTED Int. Conf. Robotics and Automation, RA '99, Santa Barbara, USA, 1999.
- [16] B. Laroche, Ph. Martin und P. Rouchon, *Motion planning for a class of partial differential equations with boundary control*, in: Proc. 37th Conference on Decision & Control, Tampa, Florida, S. 3494–3497, 1998.
- [17] P. Martin, R.M. Murray und P. Rouchon, Flat systems, *Plenary Lectures and Mini-Courses ECC-97*, G. Bastin und M. Gevers (Hg.), S. 211–264, 1997.
- [18] J. Mikusiński, *Operatorenrechnung*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1957.
- [19] J. Mikusiński, *Operational Calculus*, Bd. 1, Pergamon, Oxford & PWN, Warszawa, 1983.
- [20] J. Mikusiński und T. K. Boehme, *Operational Calculus*, Bd. 2, Pergamon, Oxford & PWN, Warszawa, 1987.
- [21] H. Mounier, *Propriétés structurelles des systèmes linéaires à retards: aspects théoriques et pratiques*, Dissertation, Université Paris XI, Orsay, 1995.
- [22] H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph,  *$\pi$ -freeness of a long electric line*, in: Proc. Symposium on Modelling, Analysis and Simulation, CESA '96 IMACS Multiconference, Lille, Frankreich, S. 28–29, 1996.
- [23] H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph, *Some examples of linear systems with delays*, *RAIRO-APII-JESA*, 31, 911–925, 1997.
- [24] H. Mounier und J. Rudolph, Flatness based control of nonlinear delay systems: a chemical reactor example, *Internat. J. Control*, 71, 871–890, 1998.
- [25] H. Mounier, J. Rudolph, M. Fliess und P. Rouchon, Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as delay system, *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 3, 315–321, (URL: <http://www.emath.fr/COCV/>), 1998.
- [26] H. Mounier, J. Rudolph, M. Petitot und M. Fliess, *A Flexible Rod as a Linear Delay System*, in: Proc. European Control Conference 1995, Rom, S. 3676–3681, 1995.
- [27] N. Petit, Y. Creff und P. Rouchon, *Motion planning for two classes of nonlinear systems with delays depending on the control*, in: Proc. 37th Conference on Decision & Control, Tampa, Florida, S. 1007–1011, 1998.



- [28] R. Rothfuß, *Anwendung der flachbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Systeme*, V.D.I., Düsseldorf, 1997.
- [29] R. Rothfuss, U. Becker und J. Rudolph, *Controlling a solenoid valve – a distributed parameter approach*, erscheint in: Proc. 14th Int. Symp. Math. Theory of Networks and Systems, mtms '2000, Perpignan, Juni 2000.
- [30] R. Rothfuss, J. Rudolph und M. Zeitz, *Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme*, at – Automatisierungstechnik, 45, 517–525, 1997.
- [31] P. Rouchon und J. Rudolph, *Réacteurs chimiques différentiels plats : planification et suivi de trajectoires*, erscheint in: *Automatique et procédés chimiques*, J. P. Corriou (Hg.), Partie II, Chap. III.f, Hermes, 2000.
- [32] K. Yosida. *Operational Calculus*. Springer-Verlag, New York, 1984.

Manuskripteingang: 13. Januar 2000.



**Dr. Joachim Rudolph** ist als Stipendiat im Habilitandenprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie der TU Dresden bei Prof. K. Reinschke tätig. Hauptarbeitsfelder: Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Regelstrecken, algebraische Methoden, lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme.

Adresse: Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, Technische Universität Dresden, Mommsenstr. 13, D-01062 Dresden,  
E-Mail: rudolph@erss11.et.tu-dresden.de