

# Flachheit: Eine nützliche Eigenschaft auch für Systeme mit Totzeiten

## Flatness: A Useful Property also for Systems with Delays

Joachim Rudolph

---

Die Trajektorienplanung sowie die Steuerung und die Folgeregulierung nichtlinearer Systeme werden durch die Flachheitseigenschaft wesentlich vereinfacht. Davon zeugen zahlreiche Anwendungen im universitären wie im industriellen Bereich. Das Flachheitskonzept kann auf nichtlineare Totzeitsysteme und verteilte Systeme mit konzentrierten Stelleingriffen ausgedehnt werden. Anhand von Modellen chemischer Reaktoren wird beispielhaft in die flachheitsbasierten Methoden zur Systemanalyse, zur Trajektorienplanung und zum Reglerentwurf für nichtlineare Totzeitsysteme eingeführt.

Trajectory planning as well as the design of feedforward and feedback control for nonlinear systems are largely simplified if the systems are flat. This has been shown by numerous academic case studies and industrial applications. Furthermore, the flatness concept can be generalized to nonlinear delay systems and boundary controlled distributed parameter systems. An introduction to the flatness based trajectory planning and control design methods for nonlinear delay systems is given. Chemical reactor examples serve for illustration.

**Schlagwörter:** Differentielle Flachheit, nichtlineare Totzeitsysteme, Trajektorienplanung, Steuerung, Reglerentwurf

**Keywords:** Differential flatness, nonlinear delay systems, trajectory planning, control design

---

## 1 Einführende Übersicht

Unter dem Oberbegriff „Flachheitsbasierte Entwurfsmethoden“ lassen sich einige wichtige Fortschritte zusammenfassen, die in den vergangenen Jahren in der Regelungstechnik gemacht wurden. Die Bedeutung dieser Verfahren ergibt sich einerseits aus ihrer Nützlichkeit bei einer Vielzahl von Steuerungs- und Regelungsaufgaben der industriellen Praxis, andererseits aus ihrer großen Tragweite im Bereich der Theorie.

Die flachheitsbasierte Regelung wurde erfolgreich in industriellen Anwendungen eingesetzt, beispielsweise zur Regelung

- von elektrischen Antrieben [6; 12] (Schneider Electric, Bosch),
- von mechatronischen Systemen in Kraftfahrzeugen, z. B. Scheibenwischern [1; 15], Kupplungen [11; 16], Abgas-Turboladern [22] und Bremsen [7] (Bosch, Siemens, Valeo, PSA),
- von Hochpräzisions-Positioniertischen [2] (Micro-Contrôle),

- von Walzanlagen in der Stahlindustrie [10; 36] (VAI),
- von magnetisch gelagerten Werkzeugspindeln für die hochgenaue Unrundbearbeitung [5; 17; 35] (Axomat)
- und von verfahrenstechnischen Prozessen (Total-Fina-Elf), darunter der weltweit größte Polymerisationsreaktor zur Polypropylen-Herstellung [23].

Bei der Regelung der Werkzeugspindeln wird eine unrunde, winkelsynchrone Bahn vorgegeben, der das Schneidwerkzeug bei einigen tausend Umdrehungen pro Minute mikrometergenau folgt [5]. Bei der Regelung des Polymerisationsreaktors, für deren Entwurf ein einfaches nichtlineares Totzeitmodell verwendet wird, werden von der Produktionsplanung geforderte Wechsel der Menge und Eigenschaften (des sog. Schmelzindex) des produzierten Polypropylens schnell, genau und reproduzierbar durchgeführt [23]. Bei solchen Bahnführungsaufgaben und Arbeitspunktwechseln, die nichtlineare mathematische Modelle zur Systembeschreibung erfordern, wird das Potential der flachheitsbasierten Methoden besonders deutlich.

Steht ein möglichst einfaches, das Prozessverhalten aber zugleich hinreichend genau beschreibendes mathematisches

Modell zur Verfügung, so müssen zunächst für die interessierenden „Regelgrößen“ Trajektorien (also Zeitverläufe) entworfen werden, die die gestellte Aufgabe lösen. Das kann recht schwierig sein. Zu den einfacheren Fällen gehören solche Anfahrvorgänge, bei denen ein Wechsel zwischen zwei stationären Betriebspunkten gefordert wird. Allerdings ist auch das nicht unbedingt eine leichte Aufgabe. So kann es beispielsweise schwierig sein

- geeignete stationäre Lösungen der Modellgleichungen überhaupt zu finden,
- Trajektorien für die Regelgrößen anzugeben, die mit dem Systemmodell verträglich sind,
- die dazugehörigen Stellgrößenverläufe zu berechnen
- und dabei, gegebenenfalls auch für weitere Systemgrößen, Amplitudenbeschränkungen zu berücksichtigen.

Sind die Trajektorien geplant und die dazugehörigen Steuerungen berechnet, so können im nachfolgenden Entwurfschritt Regler entworfen werden. Diese werden meist ergänzt durch Beobachter zur Bestimmung nicht gemessener Größen. Wenn das Modell das Systemverhalten hinreichend gut beschreibt, die geplante Trajektorie stabil ist und der Einfluss äußerer Störungen gering, so kann die berechnete Steuerung verwendet werden, da diese das mögliche Systemverhalten berücksichtigt, indem nur mit den Modellgleichungen verträgliche Trajektorien verwendet werden.

Hier wird ein Aufgabenbereich der Regelungstechnik deutlich, der mit den flachheitsbasierten Entwurfsmethoden verstärkt ins Blickfeld gerückt wurde: der Entwurf von an das Systemmodell angepassten Steuerungen. Die Berechnung solcher Steuerungen kann als eine Inversion des Systemmodells interpretiert werden, denn man berechnet Stellgrößenverläufe aus den Trajektorien von Regelgrößen [9].

Eine gute Trajektorienplanung und die Verwendung der daraus resultierenden Steuerung erleichtern die Regelung ganz wesentlich. Vereinfacht ausgedrückt gilt: Der Regler muss nur noch die Abweichungen ausgleichen, die aus den bei der Modellierung getroffenen vereinfachenden Annahmen herrühren, und gegenüber den äußeren Störungen stabilisieren. Von der Führungsarbeit wird er entlastet, diese übernimmt die Steuerung.

Es ist offensichtlich, dass die Schwierigkeit der Lösung der Entwurfsaufgaben wesentlich von den Eigenschaften des Systemmodells abhängt: Ist dieses Modell linear und zeitinvariant oder aber nichtlinear, vielleicht sogar nur als implizites System gegeben? Enthält es Totzeiten oder partielle Differentialgleichungen, liegt also ein sog. unendlichdimensionales System vor? Sicher gibt es Anwendungsfälle, in denen die Systemmodelle strukturelle Eigenschaften haben, die eine relativ einfache und elegante Lösung der genannten Aufgaben ermöglichen.

Für den Fall der nichtlinearen endlichdimensionalen Systeme ist eine solche, für den Entwurf von Steuerungen und Regelungen „günstige“ strukturelle Eigenschaft die *differentielle Flachheit* des Modells (siehe Anhang A), die erstmals 1992 von M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin und

P. Rouchon<sup>1</sup> beschrieben wurde [8] – für eine deutschsprachige Einführung siehe z. B. [24; 26]. Für die endlichdimensionalen linearen Systeme entspricht die Flachheit gerade der Steuerbarkeit. Neben den linearen Systemen sind die flachen wohl am einfachsten zu handhaben.

Eine charakteristische Eigenschaft flacher Systeme besteht darin, dass das gesamte Systemverhalten durch die Trajektorien eines sog. *flachen Ausgangs* bestimmt wird, und diese Trajektorien können für die Komponenten des flachen Ausgangs unabhängig vorgegeben werden [26]. Damit kommt dem flachen Ausgang eine ähnliche Bedeutung zu wie der Basis eines Vektorraums: Seine Komponenten sind unabhängig, und er kann verwendet werden, um die anderen Größen darzustellen. Diese Möglichkeit der Parametrierbarkeit sämtlicher Trajektorien durch jene eines flachen Ausgangs macht man sich bei der flachheitsbasierten Trajektorienplanung und Steuerung, aber auch beim Regler- und Beobachterentwurf zunutze.

Diese Aufgaben werden umso einfacher, je mehr Komponenten ein flacher Ausgang umfasst, und man macht sich leicht klar, dass die Zahl der frei vorgebbaren Trajektorien gerade der Anzahl der Stellgrößen entspricht. Mit anderen Worten, die Steuerung mithilfe der flachheitsbasierten Methoden wird umso einfacher, je mehr (unabhängige) Stellgrößen verfügbar sind.

Im vorliegenden Beitrag soll gezeigt werden, dass sich durch Ausdehnung des Flachheitskonzepts auf lineare oder nichtlineare Totzeitsysteme neue leistungsfähige Ansätze für den Entwurf von Steuerungen und Regelungen für diese Systemklasse ergeben. Dabei wird auf theoretische Details verzichtet, die beispielsweise in [30] und den dort angegebenen Literaturstellen nachzulesen sind. Erweiterungsmöglichkeiten für durch partielle Differentialgleichungen beschriebene Systeme wurden in dieser Zeitschrift schon mehrfach aufgezeigt [18; 20; 29], als weiterführende Literatur (einschließlich Simulationsprogrammen für Beispiele) seien hier auch [31; 34] genannt.

Totzeiten spielen insbesondere in praktischen Anwendungen u. a. der Verfahrenstechnik eine Rolle, wo sie beispielsweise durch Materialtransport in Rohrleitungen oder auch als vereinfachte Beschreibungsform für komplexere Prozessstufen auftreten können – letzteres gilt beispielsweise für das Modell des Polypropylen-Reaktors in [23]. Deswegen sollen hier chemische Reaktoren als Beispiele dienen. Daran können viele Aspekte der flachheitsbasierten Methoden anschaulich erläutert werden.

## 2 Systeme erster Ordnung mit Totzeit

Die Grundzüge der Entwurfsmethodik für die Steuerung und Regelung von Totzeitsystemen können schon an einem linearen System erster Ordnung mit einer zeitverzögert

<sup>1</sup> Der Begriff *Flachheit* (franz. „platitude“, engl. „flatness“) wird verwendet, weil die Gln. eines flachen Systems in dem durch einen *flachen Ausgang* und dessen Zeitableitungen aufgespannten (unendlichdimensionalen) Raum lokal einen linearen Teilraum definieren, also eine *Hyperebene*.

wirkenden Stellgröße aufgezeigt werden – im Kontext der Übertragungsglieder spricht man von einem PT<sub>1</sub>-Glied mit Totzeit.

Ein konkretes Beispiel für einen durch ein solches Modell beschriebenen Prozess stellt ein kontinuierlich betriebener, isothermer Rührkesselreaktor dar, in dem ein Stoff A durch eine einfache Reaktion erster Ordnung abgebaut wird, wobei die um eine konstante Verzugszeit  $\tau$  verzögert bereitgestellte Stoffmenge des Reaktanden A mit der Konzentration  $c_F$  zugeführt wird. Ist das Volumen des Stoffgemischs im Reaktor konstant, so liefert die Mengenbilanz

$$\dot{c}(t) = q [c_F(t - \tau) - c(t)] - kc(t). \quad (1)$$

Darin beschreiben  $c$  die Konzentration des Stoffs A, die konstanten positiven Parameter  $q$  und  $k$  die Durchfluss- bzw. die Reaktionsrate. Die Anfangsbedingungen sind hier die Konzentration  $c(t_0)$  im Reaktor zum Zeitpunkt  $t = t_0$  und der Verlauf der Zulaufkonzentration  $c_F$  für  $t \in [t_0 - \tau, t_0)$ . Als Stellgröße dient die Zulaufkonzentration  $c_F$ .

Schon bei diesem sehr einfachen Prozess stellen sich hinsichtlich der Überführung zwischen verschiedenen Betriebspunkten interessante Fragen:

- Kann die Konzentration  $c$  in endlicher Zeit um einen vorgegebenen Betrag erhöht oder reduziert werden?
- Wie kurz kann man, gegebenenfalls unter Berücksichtigung des Bereichs der möglichen Stellgrößenwerte, diese Übergangszeit wählen?
- Wie muss dafür der Verlauf  $t \mapsto c_F(t)$  der Stellgröße gewählt werden?
- Wenn eine mögliche Trajektorie  $t \mapsto c(t)$  und die zugehörige Steuerung  $t \mapsto c_F(t)$  gefunden wurden, wie kann dieser Übergangsvorgang stabilisiert werden?

### 2.1 Überführung in einen neuen Betriebspunkt

Bei einem stationären Betrieb sind die Werte sämtlicher Größen konstant, also (indem Symbole mit Index  $s$  konstante Werte bezeichnen) hier  $c = c_s$  und  $c_F = c_{F,s}$  und folglich  $\dot{c} = 0$  sowie  $c_F(t - \tau) = c_F(t) = c_{F,s}$ . Damit folgt aus (1) die Beziehung

$$0 = q [c_{F,s} - c_s] - kc_s,$$

also

$$c_{F,s} = \frac{k+q}{q} c_s \quad \text{bzw.} \quad c_s = \frac{q}{k+q} c_{F,s}. \quad (2)$$

Eine konzeptionell sehr einfache Möglichkeit für einen Übergang zwischen zwei stationären Werten besteht darin, den stationären Anfangswert  $c_0$  und einen gewünschten stationären Endwert  $c_*$  auszuwählen, mit der Formel (2) die zugehörigen stationären Werte  $c_{F,0}$  und  $c_{F,*}$  für die Stellgröße auszurechnen, und eine sprunghöhen<sup>2</sup> Erhöhung

$$c_F(t) = c_{F,0} + (c_{F,*} - c_{F,0})h(t - t_0) \quad (3)$$

<sup>2</sup> mit dem Heaviside-Einheitssprung  $h$  gemäß  $h(t) = 0$ , für  $t < 0$  und  $h(t) = 1$ , für  $t > 0$

der Stellgröße um  $c_{F,*} - c_{F,0} = (k/q + 1)(c_* - c_0)$  zum Zeitpunkt  $t_0$  anzuwenden. Diese Anregung kann man in die rechte Seite der Modellgleichung (1) einsetzen und die so entstandene Gleichung abschnittsweise auf den Intervallen  $(t_0, t_0 + \tau]$  und  $(t_0 + \tau, t]$  lösen. Aufgrund der Totzeit erhält man so auf dem Intervall  $(t_0, t_0 + \tau]$  die Lösung  $c = c_0$  und für  $t > t_0 + \tau$  die Lösung der gewöhnlichen Dgl.

$$\dot{c}(t) = q [(c_{F,*} - c_{F,0}) - c(t)] - kc(t),$$

insgesamt also

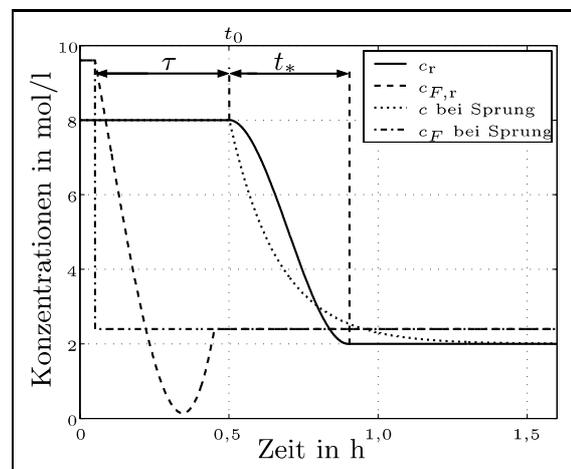
$$c(t) = c_0 - (c_* - c_0)h(t - \tau - t_0)e^{-(k+q)(t-\tau-t_0)}.$$

Offensichtlich ergibt sich so nur ein asymptotischer Übergang – vgl. Bild 1. (Wird der Stoff A abgebaut, so ist  $k + q > 0$ .) Man erkennt ebenso, dass sich die Konzentration  $c$  infolge des Stellgrößensturms bei  $t_0$  wegen der Totzeit erst ab dem Zeitpunkt  $t_0 + \tau$  ändert. Die gefundene Lösung gestattet *keinen* Wechsel des Betriebspunktes *in endlicher Zeit*, ist also unbefriedigend.

Günstiger ist es, eine (geeignete) Referenztrajektorie  $[t_0, t_0 + t_*] \ni t \mapsto c_r(t)$  für  $c$  vorzugeben und daraus den erforderlichen Stellgrößenverlauf zu berechnen; dabei stellt die Übergangszeit  $t_*$  einen Entwurfsparameter dar. Eine solche Referenztrajektorie muss – in Anbetracht des Modells (1) – zumindest einmal differenzierbar sein. Des Weiteren müssen der Anfangs- und der Endwert mit den gewünschten Werten übereinstimmen und, wenn es sich dabei um stationäre Werte handeln soll, wenigstens die ersten Ableitungen sowohl zu Beginn als auch am Ende des Übergangs Null sein. Schließlich wird die Trajektorie nach Ende des Übergangs durch  $c_r(t) = c_*$ ,  $t > t_*$  konstant fortgesetzt.

Eine einfache Referenztrajektorie, die diesen vier Bedingungen genügt, ist für  $t \in [t_0, t_0 + t_*]$  durch ein Polynom vom Grad 3 definiert:

$$c_r(t) = a_0 + a_1 \frac{t - t_0}{t_*} + a_2 \frac{(t - t_0)^2}{t_*^2} + a_3 \frac{(t - t_0)^3}{t_*^3} \quad (4)$$



**Bild 1:** Steuerung des Reaktormodells (1) zum Wechsel des Betriebspunktes in einem Zeitintervall der endlichen Dauer  $t_* = 0,4$  h mit der Referenztrajektorie  $t \mapsto c_r(t)$  gemäß Gl. (5) im Vergleich zur Sprungantwort ( $q = 5 \text{ h}^{-1}$ ,  $k = 1 \text{ h}^{-1}$ ,  $t_0 = 0,5 \text{ h}$ ,  $\tau = 0,45 \text{ h}$ ).

mit der Ableitung

$$\dot{c}_r(t) = \frac{1}{t_*} \left[ a_1 + 2a_2 \frac{t-t_0}{t_*} + 3a_3 \frac{(t-t_0)^2}{t_*^2} \right].$$

Werden die Anfangs- und Endwerte der Funktion und ihrer Ableitung vorgegeben, so lauten die Bedingungen für einen Übergang zwischen stationären Werten

$$\begin{aligned} c(t_0) &= c_0, & c(t_0 + t_*) &= c_* \\ \dot{c}(t_0) &= 0, & \dot{c}(t_0 + t_*) &= 0. \end{aligned}$$

Damit liegt ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten  $a_i, i = 0, \dots, 3$  vor, das man in Abhängigkeit der vorgegebenen Anfangs- und Endwerte lösen kann. Man erhält so für (4) die einfache Darstellung

$$c_r(t) = c_0 + (c_* - c_0) \frac{(t-t_0)^2}{t_*^2} \left( 3 - 2 \frac{(t-t_0)}{t_*} \right). \quad (5)$$

Löst man die Modellgleichung (1) nach der Stellgröße  $c_F$  auf und setzt die Referenztrajektorie  $t \mapsto c_r(t)$  ein, so ergibt sich die Referenztrajektorie der Stellgröße mit

$$c_{F,r}(t - \tau) = [\dot{c}_r(t) + kc_r(t)]/q + c_r(t)$$

und nach einer Zeitverschiebung um  $\tau$

$$c_{F,r}(t) = [\dot{c}_r(t + \tau) + kc_r(t + \tau)]/q + c_r(t + \tau). \quad (6)$$

Man muss also die Referenztrajektorie für  $c$  mindestens um die Verzugszeit  $\tau$  vorausplanen. Dies liegt nicht an der gewählten Entwurfsmethode, sondern spiegelt die im Modell vorhandene Totzeit wider. Man muss bei  $t = t_0 - \tau$  mit der Änderung der Stellgröße  $c_F$  beginnen, um zum Zeitpunkt  $t = t_0$  eine Änderung von  $c$  zu erzielen. Im Gegensatz zum zunächst betrachteten sprungförmigen Stellgrößenverlauf (3) entspricht die nun gefundene Steuerung einer Überführung zwischen zwei stationären Werten von  $c$  in dem *endlichen* Zeitraum  $[t_0, t_0 + t_*]$ .

Dabei hängt die minimale Zeitspanne  $t_*$  für die Überführung der Konzentration  $c$  nur von der Beschränkung der Stellgröße  $c_F$  ab; sie kann kleiner sein als die Verzugszeit  $\tau$ . Das ist bei dem Simulationsergebnis in Bild 1 der Fall. Hier ist die Zeitspanne  $t_*$  für die mit (5) berechnete Trajektorie  $t \mapsto c_r(t)$  so gewählt worden, dass der Wert der Stellgrößentrajektorie  $t \mapsto c_{F,r}(t)$  nicht negativ wird. Tatsächlich wird man einen gewissen positiven Wert nicht unterschreiten wollen, um noch etwas „Spielraum“ für die Regelung zu haben. Man erkennt das Totzeitverhalten des Systems jedoch deutlich daran, dass zunächst im Intervall  $[t_0 - \tau, t_0 - \tau + t_*]$  der Stelleingriff erfolgt, bevor – erst nach Ablauf der Verzugszeit  $\tau$  – zum Zeitpunkt  $t_0$  die Änderung von  $c_r$  einsetzt, die bis  $t_0 + t_*$  dauert.

## 2.2 Regelung des Überführungsvorgangs

Um den Übergang – und damit zugleich den angestrebten Betriebspunkt  $(c_*, c_{F,*})$  – zu stabilisieren, kann man sich nun auf die Referenztrajektorie  $t \mapsto (c_r(t), c_{F,r}(t))$  beziehen. Dazu untersucht man die Abweichung von dieser Referenz,

beispielsweise indem man den *Folgefehler*  $e = c - c_r$  einführt. Die Stabilisierungsaufgabe kann als gelöst betrachtet werden, wenn es gelingt, dafür zu sorgen, dass der Folgefehler  $e$  der (autonomen) linearen Dgl.

$$\dot{e}(t) = -\lambda e(t), \quad \text{mit } \lambda > 0 \quad (7)$$

genügt, denn dann klingt der Fehler im Lauf der Zeit exponentiell ab und die Trajektorie von  $c$  nähert sich der Referenztrajektorie. Natürlich können auch andere abklingende Zeitverläufe und andere Fehlerdefinitionen gewählt werden.

Unter Verwendung der Definition des Folgefehlers  $e$  lautet Gl. (7)

$$\dot{c}(t) - \dot{c}_r(t) = -\lambda [c(t) - c_r(t)]$$

bzw. mit der Modellgl. (1)

$$q [c_F(t - \tau) - c(t)] - kc(t) = \dot{c}_r(t) - \lambda [c(t) - c_r(t)].$$

Diese Gleichung kann man wieder nach  $c_F(t - \tau)$  auflösen und eine Zeitverschiebung um  $\tau$  verwenden und erhält so

$$\begin{aligned} c_F(t) &= [\dot{c}_r(t + \tau) + (k + q)c(t + \tau)]/q \\ &\quad - (\lambda/q) [c(t + \tau) - c_r(t + \tau)]. \end{aligned} \quad (8)$$

Folglich ist dies das Regelgesetz, mit dem man ein exponentielles Fehlerverhalten gemäß (7) erhält. Man erkennt hier einen Vorsteuerungs- und einen Regelungsanteil: Für  $e = c - c_r \equiv 0$  entspricht (8) der Gleichung (6) für die Referenztrajektorie der Stellgröße.

Eine Inspektion der in (8) auftretenden Größen lässt erkennen, dass zur Berechnung der Stellgröße zum Zeitpunkt  $t$  einerseits Werte der Referenztrajektorie und ihrer Ableitung zum Zeitpunkt  $t + \tau$  benötigt werden, andererseits aber auch der Wert der Konzentration  $c$  zum *zukünftigen* Zeitpunkt  $t + \tau$ . Erstere können dank der Vorausplanung der Referenz aus dem Ansatz (5) leicht berechnet werden, für den Wert  $c(t + \tau)$  hingegen wird eine *Prädiktion* erforderlich.

Die Prädiktion erfolgt im Zeittakt der Messung. Zum augenblicklichen Zeitpunkt  $t = t_i$  wird das Verhalten auf dem Intervall  $[t_i, t_i + \tau]$  vorhergesagt. Dabei wird der Messwert  $c(t_i)$  berücksichtigt. Es kommen unterschiedliche Zugänge in Frage.

Eine erste Möglichkeit verwendet die Lösung der Fehlerdgl. (7) mit dem Anfangswert  $e(t_i) = c(t_i) - c_r(t_i)$ ; sie liefert  $e(t_i + \tau) = e(t_i)e^{-\lambda\tau}$ , womit sich

$$c(t_i + \tau) = c_r(t_i + \tau) + [c(t_i) - c_r(t_i)]e^{-\lambda\tau}$$

ergibt. Mit dieser Lösung wird über den Zeitraum  $\tau$  gewissermaßen „blind“ prädiziert.

Besser verwendet man einen *Prädiktionsalgorithmus* [21] auf der Grundlage der Modellgl. (1) und darin die über die Abtastintervalle konstanten, tatsächlich verwendeten Stellgrößenwerte. Die Abtastzeit sei  $\Delta t = \tau/a$  mit einer ganzen Zahl  $a > 0$ . Der Laufindex für die Rechenschritte sei

$j = 1, \dots, a$ . Im Schritt  $j$  ist der Wert der Stellgröße auf dem Intervall  $(t_i + (j-1)\Delta t, t_i + j\Delta t]$  konstant gleich  $c_{F,j} := c_F(t_i + (j-1)\Delta t)$ , und die Größe  $c$  genügt der gewöhnlichen Dgl.

$$\dot{c}(t) = q [c_{F,j} - c(t)] - kc(t).$$

Deren Lösung im Intervall  $(t_i + (j-1)\Delta t, t_i + j\Delta t]$  liefert den Wert am Ende des Intervalls, also bei  $t = t_i + j\Delta t$ :

$$c(t_i + j\Delta t) = c(t_i + (j-1)\Delta t)e^{-(k+q)\Delta t} + \frac{qc_{F,j}}{k+q} [1 - e^{-(k+q)\Delta t}]. \quad (9)$$

Im ersten Schritt ( $j = 1$ ) geht der augenblickliche Messwert  $c(t_i)$  in die Prädiktion ein. Nach  $a$  Schritten erhält man rekursiv den gesuchten prädierten Wert für  $c(t_i + \tau)$ .

### 2.3 Ein nichtlineares Totzeit-Modell

Im Falle einer chemischen Reaktion der Ordnung  $\nu$  gemäß  $\nu A \rightarrow \text{Produkte}$ , erhält man anstelle von (1) das nichtlineare Modell

$$\dot{c}(t) = q [c_F(t - \tau) - c(t)] - kc^\nu(t). \quad (10)$$

Was ändert sich durch diese Verallgemeinerung im Hinblick auf den Steuerungs- und Reglerentwurf?

Die stationäre Lösung von (10) genügt der Beziehung

$$c_{F,s} = c_s + kc_s^\nu/q,$$

und an die Stelle der Gleichung (6) für die Stellgrößen-Referenztrajektorie tritt die Beziehung

$$c_{F,r}(t) = [\dot{c}_r(t + \tau) + kc_r^\nu(t + \tau)]/q + c_r(t + \tau).$$

Beides bedeutet keine Erschwernis, es tritt lediglich anstelle des linearen Ausdrucks  $kc$  der Ausdruck  $kc^\nu$  auf. Auch das Folgefehlerverhalten kann wieder exponentiell gewählt, also gemäß Gl. (7), definiert werden. Das Regelgesetz lautet dann analog zu (8)

$$c_F(t) = [\dot{c}_r(t + \tau) + kc_r^\nu(t + \tau) + qc(t + \tau)]/q - (\lambda/q) [c(t + \tau) - c_r(t + \tau)].$$

Für den diskreten Prädiktionsalgorithmus ist jetzt zum Zeitpunkt  $t_i$  für  $j = 1, \dots, a$  (mit  $a = \tau/\Delta t$ ) die nichtlineare Dgl.

$$\dot{c}(t) = q [c_{F,j} - c(t)] - kc^\nu(t) \quad (11)$$

im Intervall  $(t_i + (j-1)\Delta t, t_i + j\Delta t]$  mit der Anfangsbedingung  $c(t_i + (j-1)\Delta t)$  zu lösen. Das kann mit einem numerischen Algorithmus geschehen. Im Schritt  $j = 1$  wird so wiederum der aktuelle Messwert  $c(t_i)$  berücksichtigt und außerdem in jedem Schritt die tatsächlich wirksame Stellgröße  $c_{F,j}$ .

Man kann auch ausnützen, dass mit der geplanten Trajektorie  $t \mapsto (c_r(t), c_{F,r}(t))$  eine Lösung der Modellgleichung (11) bekannt ist, und um diese Referenztrajektorie linearisieren. Mit den Abweichungen  $\Delta c = c - c_r$  und  $\Delta c_F = c_F - c_{F,r}$  ergibt sich aus (11)

$$\frac{d}{dt} \Delta c(t) = q [\Delta c_{F,j} - \Delta c(t)] - k\gamma(c_r(t)) \Delta c(t)$$

mit  $\gamma(c_r(t)) = \nu c_r^{\nu-1}(t)$ . Vernachlässigt man außerdem die (auf hinreichend kurzen Abtastintervallen kleinen) Änderungen der Referenztrajektorie, so kann die Prädiktionsformel (9) verwendet werden, indem man dort im Schritt  $j$  den Parameter  $k$  durch  $k\gamma(c_r(t_i + (j-1)\Delta t)) = \nu c_r^{\nu-1}(t_i + (j-1)\Delta t)$  ersetzt.

### 3 Beispiele flacher Rührkesselreaktormodelle

Den Ausgangspunkt für die weiteren Betrachtungen soll ein kontinuierlich betriebener Rührkesselreaktor bilden, wie er in Bild 2 schematisch dargestellt ist. In dem Reaktor soll eine Reaktion ablaufen, für deren Bilanz die Berücksichtigung zweier Reaktanden A und B genügt. Das Reaktionsvolumen  $V$  sei konstant und keine Stoffrückführung vorhanden. Dann kann man folgendes Modell verwenden, das sich aus den Bilanzen der Stoffmengen von A und B und der Enthalpie des Reaktionsgemischs ergibt:

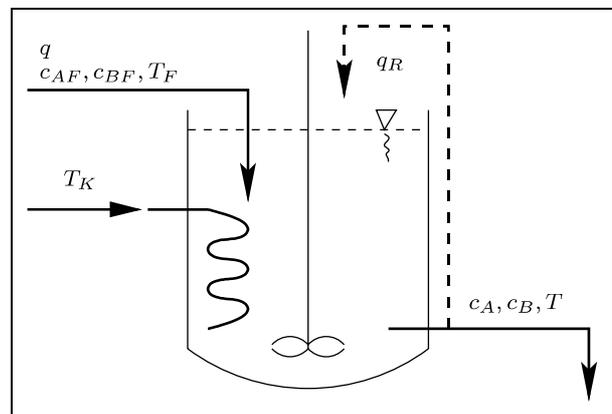
$$\dot{c}_A = q[c_{AF} - c_A] + r_A(c_A, c_B, T) \quad (12a)$$

$$\dot{c}_B = q[c_{BF} - c_B] + r_B(c_A, c_B, T) \quad (12b)$$

$$\dot{T} = q[T_F - T] + h(c_A, c_B, T) + \alpha[T_K - T]. \quad (12c)$$

Hier beschreiben  $c_A$  und  $c_B$  die Konzentrationen der Reaktanden,  $T$  die Temperatur im Reaktionsmedium und  $T_K$  die Temperatur im Kühlmantel; des Weiteren steht  $q$  für den auf  $V$  bezogenen Volumenstrom, und der konstante Parameter  $\alpha$  beschreibt den Wärmeaustausch. Die Konzentrationen im Zulauf seien  $c_{AF}$  bzw.  $c_{BF}$ ,  $T_F$  die dortige Temperatur.

Der Zuwachs bzw. die Abnahme des Reaktanden A im Reaktor wird außer von der Differenz  $q[c_{AF} - c_A]$  aus Zu- und Abfluss durch den reaktionsbedingten Verbrauch bzw. Zuwachs  $r_A(c_A, c_B, T)$  bestimmt. Die Bilanzen für  $c_B$  und  $T$  ergeben sich ganz analog, wobei durch  $r_B(c_A, c_B, T)$  und  $h(c_A, c_B, T)$  die reaktionsbedingten Veränderungen der Konzentration  $c_B$  und der Enthalpie berücksichtigt werden.



**Bild 2:** Rührkesselreaktor im kontinuierlichen Betrieb mit gestrichelt dargestellter Stoffrückführung.

Die Modellgleichungen (12) beschreiben das Prozessverhalten unabhängig davon, welche systemtheoretische Bedeutung die auftretenden Symbole haben. Es ist daher günstig, die verwendeten Symbole in zwei Gruppen aufzuteilen, einerseits zeitabhängige sog. *Systemgrößen*, andererseits (gegebenenfalls ebenfalls zeitabhängige) *Parameter*. Für das Reaktormodell mit den Dgln. (12) werden die Konzentrationen  $c_A$  und  $c_B$  sowie die Temperatur  $T$  als Systemgrößen aufgefasst, zusätzlich meist eine oder mehrere weitere Größen, zumindest jene, die als Stellgrößen dienen sollen. So ergeben sich unterschiedliche Systeme mit den gleichen Modellgleichungen, aber unterschiedlichen Systemgrößen.

Prinzipiell ist es für die *Flachheitsanalyse* nur wichtig, welche der verwendeten Symbole als Systemgrößen und welche als Parameter aufgefasst werden. Die Flachheitseigenschaften der Systeme hängen von der Wahl der Systemgrößen ab, nicht aber davon, ob diese beispielsweise eingeprägte oder interne Größen beschreiben.

### 3.1 Flachheit der Reaktormodelle

Die erste Frage, die sich im Hinblick auf flachheitsbasierte Methoden stellt, lautet: Ist das verwendete mathematische Modell ein flaches System? Mit anderen Worten: Kann ein flacher Ausgang gefunden werden, also ein Satz  $y$  von Systemgrößen mit unabhängigen Komponenten derart, dass alle übrigen Systemgrößen als Funktionen von  $y$  und dessen Zeitableitungen dargestellt werden können?

Um diese Frage beantworten zu können, muss man das betrachtete System festlegen, indem man auswählt, welche der Symbole als Parameter und welche als Systemgrößen aufgefasst werden sollen. Je nachdem, wie diese Wahl ausfällt, wird sich eine unterschiedliche Antwort auf die Frage nach der Flachheit ergeben – und falls Flachheit gegeben ist, verschiedene flache Ausgänge. Dies soll an Beispielen erläutert werden.

#### 3.1.1 Steuerung über die Zulaufgrößen

Es seien neben  $c_A, c_B$  und  $T$  die Zulaufgrößen  $c_{AF}, c_{BF}$ , und  $T_F$  (zeitvariable) Systemgrößen. Die übrigen Symbole  $\alpha, q$  und  $T_K$  stehen dann für Parameter, die als (reelle) Konstanten betrachtet werden. Die Flachheit dieses Systems, mit den Dgln. (12) und den sechs Systemgrößen  $c_A, c_B, T, c_{AF}, c_{BF}$  und  $T_F$ , ist sehr einfach zu erkennen: Es genügt, die drei Bilanzgln. (12) nach  $c_{AF}, c_{BF}$  bzw.  $T_F$  aufzulösen, und man erhält eine Darstellung sämtlicher Systemgrößen als Funktionen von  $(c_A, c_B, T)$ :

$$c_{AF} = c_A + [\dot{c}_A - r_A(c_A, c_B, T)]/q \quad (13a)$$

$$c_{BF} = c_B + [\dot{c}_B - r_B(c_A, c_B, T)]/q \quad (13b)$$

$$T_F = T + [\dot{T} - h(c_A, c_B, T) - \alpha(T_K - T)]/q. \quad (13c)$$

Somit bildet  $(c_A, c_B, T)$  einen flachen Ausgang.

Wird zusätzlich die Temperatur  $T_K$  als vierte Stellgröße verwendet – und damit als eine weitere Systemgröße statt

als Parameter interpretiert, so ist das resultierende System ebenfalls flach. Man kann den flachen Ausgang  $(c_A, c_B, T)$  um die zusätzliche Stellgröße  $T_K$  erweitern.

#### 3.1.2 Steuerung über $c_{AF}$ und $T_K$

Kann außer der Temperatur  $T_K$  im Kühlmantel nur die Zulaufkonzentration  $c_{AF}$  eingestellt werden, so erhält man ein System mit den fünf Systemgrößen<sup>3</sup>  $c_A, c_B, T, c_{AF}$  und  $T_K$ , die den drei Modelldgln. (12) genügen. Damit enthält ein flacher Ausgang nur zwei Komponenten. Um einen solchen zu finden, kann man wie folgt vorgehen. Zunächst reduziert man das System, indem man die Systemgrößen  $T_K$  und  $c_{AF}$  eliminiert und nur die Dgl. (12b) für  $c_B$  betrachtet, in der  $c_A$  und  $T$  auf der rechten Seite auftreten. Für dieses System mit nur drei Systemgrößen und einer Dgl. ist es offensichtlich, dass man alle Systemgrößen, insbesondere  $c_A$ , durch  $(c_B, T, \dot{c}_B, \dot{T})$  ausdrücken kann, sofern  $r_B$  wirklich von  $c_A$  abhängt (also  $\partial r_B/\partial c_A \neq 0$  gilt), denn Auflösen von (12b) nach  $c_A$  liefert

$$c_A = R_B(\dot{c}_B - q[c_{BF} - c_B], c_B, T) \quad (14)$$

mit  $R_B$  der zu  $r_B$  bezüglich  $c_A$  inversen Funktion. Folglich bildet nun  $y = (c_B, T)$  einen flachen Ausgang.

Damit ergibt sich aus (14) eine Darstellung für  $c_A$  in Abhängigkeit von  $y_1 = c_B, y_2 = T$  und  $\dot{y}_1 = \dot{c}_B$ , also

$$c_A = R_0(y_1, \dot{y}_1, y_2), \quad (15a)$$

und durch Zeitableitung folgt direkt

$$\dot{c}_A = R_1(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2). \quad (15b)$$

Nun erhält man leicht auch die entsprechenden Ausdrücke für die zuvor eliminierten Größen  $c_{AF}$  und  $T_K$ , also für das ursprüngliche System; durch Auflösen der Gln. (12a) und (12c) und Ersetzen von  $c_A$  und  $\dot{c}_A$  ergeben sich

$$c_{AF} = R_0(y_1, \dot{y}_1, y_2) + R_1(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, y_2, \dot{y}_2)/q - r_A(R_0(y_1, \dot{y}_1, y_2), y_1, y_2)/q,$$

$$T_K = \dot{y}_2 - q[T_F - y_2] - h(R_0(y_1, \dot{y}_1, y_2), y_1, y_2)/\alpha + y_2.$$

Also bildet  $y = (c_B, T)$  auch einen flachen Ausgang für das vollständige System mit den drei Modelldgln. (12) und den fünf Systemgrößen  $c_A, c_B, T, c_{AF}$  und  $T_K$ .

### 3.2 Bestimmung flacher Ausgänge

Die Diskussion des Reaktorbeispiels mit unterschiedlicher Wahl der Stellgrößen zeigt exemplarisch, wie ein flacher Ausgang durch Inspektion der Modellgleichungen gefunden werden kann. Die Wahl des flachen Ausgangs ist dabei nicht eindeutig, und für verschiedene Aufgabenstellungen können unterschiedliche flache Ausgänge günstig sein (für das Reaktorbeispiel (12) vgl. auch [25]). Nicht immer ist das Auffinden eines flachen Ausgangs so einfach wie in den

<sup>3</sup>Die Zulaufkonzentration  $c_{BF}$  und die Zulauftemperatur  $T_F$  werden dann als (eventuell zeitabhängige) Parameter aufgefasst und nicht als Systemgrößen.

hier diskutierten Fällen. So müssen mitunter lineare partielle Dgln. gelöst werden, und ein stets zum Ziel führendes systematisches Verfahren ist nicht bekannt – für weitere Ausführungen zu diesem Thema kann man beispielsweise die Dissertation [24] konsultieren. Häufig kommt man aber zum Ziel, indem man – wie im vorigen Abschnitt – Systemgrößen sukzessive eliminiert und so das Systemmodell „reduziert“, d. h. weniger Variable und weniger Gleichungen betrachtet. Auch tabellarische Verzeichnisse flacher Systeme mit dazugehörigen flachen Ausgängen, wie beispielsweise in [19; 27], können sehr hilfreich sein.

## 4 Rührkesselreaktormodell mit Totzeiten

Wird der im vorigen Abschnitt betrachtete Rührkesselreaktor mit einer Stoffrückführung betrieben (wie in Bild 2 gestrichelt eingezeichnet) und muss auch am Zulauf die Dauer  $\tau_1$  des Stofftransports oder ein vorangehender Prozess berücksichtigt werden, so ergibt sich anstelle von (12) ein nichtlineares Modell mit Totzeiten. Im einfachsten Fall können die Änderungen der Temperatur und der Konzentrationen im Rückführrohr vernachlässigt werden, etwa wenn dort mangels eines Katalysators keine (nennenswerte) Reaktion stattfindet und das Rohr thermisch isoliert ist. Dann entsprechen die Werte beim Austritt aus dem Rückführrohr jenen im Reaktor zu dem um die Transportzeit  $\tau_2$  früheren Zeitpunkt und es ergibt sich das folgende Modell:

$$\dot{c}_A = q[\delta_1 c_{AF} - c_A] + q_R[\delta_2 c_A - c_A] + r_A(c_A, c_B, T) \quad (16a)$$

$$\dot{c}_B = q[c_{BF} - c_B] + q_R[\delta_2 c_B - c_B] + r_B(c_A, c_B, T) \quad (16b)$$

$$\dot{T} = q[T_F - T] + q_R[\delta_2 T - T] + h(c_A, c_B, T) + \alpha[T_K - T]. \quad (16c)$$

Hier werden zur besseren Lesbarkeit Verschiebe-Operatoren  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2$  benutzt (siehe Anhang B). Damit beschreiben  $\delta_1 c_{AF}(t) := c_{AF}(t - \tau_1)$  die Zulaufkonzentration von A bei Eintritt in den Reaktor,  $\delta_2 c_A(t) := c_A(t - \tau_2)$  und  $\delta_2 c_B(t) := c_B(t - \tau_2)$  bzw.  $\delta_2 T(t) := T(t - \tau_2)$  die Konzentrationen und die Temperatur im Stoffstrom beim Austritt aus dem Rückführrohr, jeweils zum Zeitpunkt  $t$ . Die Zulaufkonzentration  $c_{BF}$  und die Zulauftemperatur  $T_0$  werden als konstant angenommen. Der ebenfalls konstante Parameter  $q_R$  steht für den Quotienten aus dem Volumenstrom im Rückführrohr und dem Flüssigkeitsvolumen im Kessel. Als Stellgrößen werden nun  $T_K$  und  $c_{AF}$  aufgefasst.

### 4.1 Untersuchung auf Flachheit

Es soll nun für das Reaktormodell (16) mit Totzeiten eine Flachheitseigenschaft nachgewiesen werden. Dazu kann man sich am totzeitfreien Fall aus Abschnitt 3.1.2 orientieren und versuchen, die Rechenschritte zu wiederholen, mit deren Hilfe dort die Systemgrößen  $c_A$ ,  $c_{AF}$  und  $T_K$  durch  $y = (c_B, T)$  ausgedrückt werden.

Erneut kann die Gleichung für  $c_B$ , hier also (16b), nach  $c_A$  aufgelöst werden (vgl. (14) und (15)):

$$c_A = R_B(\dot{c}_B - q[c_{BF} - c_B] - q_R[\delta_2 c_B - c_B], c_B, T) = Q_0(y_1, \dot{y}_1, \delta_2 y_1, y_2), \quad (17a)$$

und durch Zeitableitung folgt

$$\dot{c}_A = Q_1(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, \delta_2 y_1, \delta_2 \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2). \quad (17b)$$

Das Auftreten der Totzeit bereitet dabei offensichtlich keine zusätzliche Schwierigkeit.

Schließlich können die Ausdrücke für  $\delta_1 c_{AF}$  und  $T_K$  durch Auflösen der Gln. (16a) und (16c) und Ersetzen von  $c_A$  und  $\dot{c}_A$  bestimmt werden:

$$\delta_1 c_{AF} = (q + q_R - q_R \delta_2) Q_0(y_1, \dot{y}_1, \delta_2 y_1, y_2) / q + Q_1(y_1, \dot{y}_1, \ddot{y}_1, \delta_2 y_1, \delta_2 \dot{y}_1, y_2, \dot{y}_2) / q - r_A(Q_0(y_1, \dot{y}_1, \delta_2 y_1, y_2), y_1, y_2) / q \quad (18a)$$

$$T_K = \dot{y}_2 - q[T_F - y_2] - q_R[\delta_2 y_2 - y_2] - h(Q_0(y_1, \dot{y}_1, \delta_2 y_1, y_2), y_1, y_2) / \alpha + y_2. \quad (18b)$$

Dabei gilt mit dem Verschiebe-Operator  $\delta_2$  für die Zeitverschiebung (siehe Anhang B)

$$\delta_2 Q_0(y_1, \dot{y}_1, \delta_2 y_1, y_2) = Q_0(\delta_2 y_1, \delta_2 \dot{y}_1, \delta_2^2 y_1, \delta_2 y_2).$$

Mit Gleichung (18a) liegt eine Beschreibung von  $\delta_1 c_{AF}(t) = c_{AF}(t - \tau_1)$  in Abhängigkeit der Werte von  $y$ ,  $\dot{y}$  und  $\ddot{y}$  zu den Zeitpunkten  $t$ ,  $t - \tau_2$  und  $t - 2\tau_2$  vor, die in der Form

$$\delta_1 c_{AF} = P(y, \dot{y}, \ddot{y}, \delta_2 y, \delta_2^2 y_1, \delta_2 \dot{y}_1)$$

geschrieben werden kann. Um damit den Wert der Stellgröße  $c_{AF}$  zum Zeitpunkt  $t$  zu berechnen, wird eine Zeitverschiebung mit dem inversen Verschiebe-Operator  $\delta_1^{-1}$  verwendet (siehe Anhang B):

$$c_{AF}(t) = \delta_1^{-1} P(y(t), \dot{y}(t), \ddot{y}(t), \delta_2 y(t), \delta_2^2 y_1(t), \delta_2 \dot{y}_1(t)) = P(y(t + \tau_1), \dots, \dot{y}_1(t + \tau_1 - \tau_2)). \quad (19)$$

Dadurch müssen, falls  $\tau_1 > \tau_2$  ist, zukünftige Werte der Trajektorien von  $y$  berücksichtigt werden. Wie für die einfachen Beispiele in Abschnitt 2 werden dazu die Referenztrajektorien  $t \mapsto y_r(t)$  hinreichend weit im Voraus geplant.

Es können also auch im Fall des Reaktormodells (16) mit Totzeiten alle Systemgrößen  $c_A$ ,  $c_B$ ,  $T$ ,  $T_K$  und  $c_{AF}$  durch nur zwei freie Größen, nämlich durch  $y = (c_B, T)$ , ausgedrückt werden. Da in diesem Fall inverse Totzeit-Operatoren benötigt werden, spricht man von einem  $\delta$ -flachen Ausgang (siehe Anhang C).

### 4.2 Trajektorienplanung und Steuerung

Es sollen nun Referenztrajektorien  $t \mapsto y_r(t)$  für Übergangsvorgänge zwischen stationären Arbeitspunkten geplant werden. Zur Bestimmung dieser Anfangs- und Endpunkte kann, analog zum Fall ohne Totzeiten [26], die

„flachheitsbasierte Repräsentation“ sämtlicher Systemgrößen verwendet werden, also die Gleichungen  $c_B = y_1$ ,  $T = y_2$ , sowie (17a), (18b) und (19).

Daraus erhält man eine Darstellung für die möglichen stationären Werte einer beliebigen Systemgröße in Abhängigkeit von den stationären Werten  $y_s$  des  $\delta$ -flachen Ausgangs  $y$ , indem man dessen Ableitungen gleich Null setzt und die zeitverschobenen Werte von  $y$  gleich  $y_s$ . Für das Reaktormodell lauten die in  $y_s$  parametrisierten stationären Lösungen für die Stellgrößen damit formal, gemäß (18b) und (19),

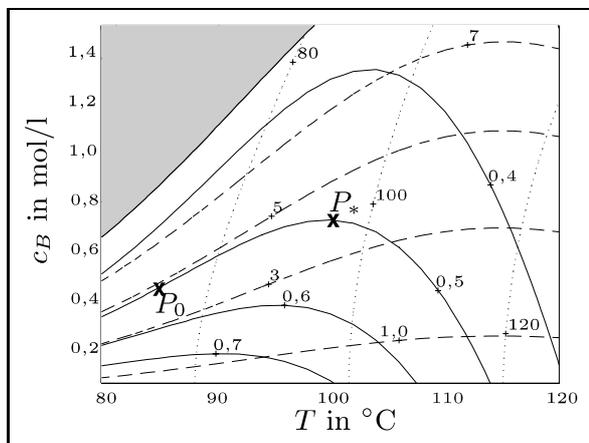
$$T_{K,s} = -q[T_F - y_{s,2}] - h(Q_0(y_{s,1}, 0, y_{s,1}, y_{s,2}), y_{s,1}, y_{s,2})/\alpha + y_{s,2}$$

$$c_{AF,s} = P(y_s, 0, 0, y_s, y_{s,1}, 0).$$

Mit diesen Beziehungen kann man recht leicht die möglichen stationären Betriebspunkte untersuchen. Beispielsweise kann man diese in einem gewissen Wertebereich für  $y_s$  auswerten und prüfen, ob sich sinnvolle stationäre Werte ergeben. Analog kann man beliebige Funktionen der Systemgrößen untersuchen. Soll beispielsweise das Produktivitätsmaß  $p = c_B/(c_{AF} - c_A)$ , das das Verhältnis der erzielten Menge des Produkts B zur verbrauchten Rohstoffmenge beschreibt, stationär konstant gehalten und dabei die Konzentration  $c_B$  des Produkts B stationär maximiert werden, so kann man  $p_s$  in Abhängigkeit von  $y_s$  bestimmen. Das Ergebnis kann in einer Karte veranschaulicht werden, wie sie Bild 3 zeigt. Die numerischen Berechnungen basieren auf den Daten aus [25] für einen Reaktor mit einer Reaktion nach dem van-der-Vusse-Schema<sup>4</sup>  $A \rightarrow B \rightarrow C$ ,  $2A \rightarrow D$ .

Um nun eine Referenztrajektorie  $t \mapsto y_r(t)$  für  $y$  im Intervall  $(0, t_*)$  zu planen, die zwei ausgewählte stationäre Betriebspunkte verbindet, kann man ähnlich wie in Ab-

<sup>4</sup> Dieses Beispiel wurde im GMA-Ausschuss 1.40 entwickelt [13] und seither in einer Vielzahl von Veröffentlichungen verwendet, z. B. [3; 14; 25; 28; 33].



Ableitung von  $y_2$ . Man kann also ein Polynom (mindestens) vom Grad 5 für  $y_{r,1}$  verwenden und jenes vom Grad 3 aus Abschnitt 2.1 für  $y_{r,2}$ .

Die so geplante Referenztrajektorie des  $\delta$ -flachen Ausgangs  $y$  kann man dann in die Gleichungen (18b) und (19) einsetzen und erhält so die dazugehörigen Verläufe der Stellgrößen  $T_K$  und  $c_{AF}$ , die man zur Steuerung verwenden kann, falls Stabilität gegeben ist.

### 4.3 Prädiktive Regelung

Wie im Eingrößenfall in Abschnitt 2.2, lässt sich für die stabile Folgeregelung ein Regelkreis realisieren, der durch ein lineares zeitinvariantes System beschrieben wird. Dieses Folgefehlersystem kann in Form von entkoppelten Teilsystemen vorgegeben werden<sup>5</sup>. Man wählt hier ein System zweiter Ordnung für den Folgefehler  $e_1 = c_B - c_{B,r}$  der Konzentration  $y_1 = c_B$  und eines erster Ordnung für den Folgefehler  $e_2 = T - T_r$  der Temperatur  $y_2 = T$ . Auflösen der so angesetzten Fehlerdgl. (mit  $k_0, k_1, k_2 > 0$ ) ergibt

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= \ddot{y}_{1,r} - k_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_{1,r}) - k_0(y_1 - y_{1,r}), \\ \dot{y}_2 &= \dot{y}_{2,r} - k_2(y_2 - y_{2,r}).\end{aligned}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in die Gln. (18b) und (19) liefert als Ergebnis des Reglerentwurfs eine statische, aber über die Referenztrajektorie zeitabhängige Rückführung. Für die Realisierung dieser Regelung können die in Abschnitt 2.2 beschriebenen Prädiktionsmethoden verwendet werden (vgl. auch [21; 30]).

Ein Simulationsergebnis für den Reaktor mit Totzeiten (16) ist in Bild 4 dargestellt. Die Daten entsprechen wieder jenen des Reaktors aus [25], ergänzt durch den Parameter  $q_R = 7,5 \text{ h}^{-1}$  für die Strömungsrate der Stoffrückführung und die Verzugszeiten  $\tau_1 = 0,5 \text{ h}$  und  $\tau_2 = 0,375 \text{ h}$ . Um einen Eindruck von der Robustheit des geschlossenen Kreises zu geben, wurde im Regler der doppelte Wert von  $0,75 \text{ h}$  für  $\tau_2$  angenommen.

## 5 Schlussfolgerung

Flachheitsbasierte Methoden der Trajektorienplanung, Steuerung und Regelung können auch für (nichtlineare) Mehrgrößensysteme mit Totzeiten verwendet werden. Jedoch kann mit den flachheitsbasierten Methoden das Totzeitverhalten des Prozessmodells nicht beseitigt werden. Für die Trajektorienplanung und die Steuerung bedeutet dies, dass die Trajektorien „hinreichend weit vorausgeplant“ werden müssen. Im Rahmen einer stabilisierenden Folgeregelung kann eine Prädiktion des Systemverhaltens erforderlich werden. Auch dazu kann die Flachheitseigenschaft des Modells ausgenutzt werden.

Verallgemeinerungen der hier an Beispielen von Modellen für chemische Reaktoren vorgestellten Methoden ergeben sich beispielsweise, wenn in der in Abschnitt 4 betrachteten

Stoffrückführung die Reaktion nicht vernachlässigt werden kann oder der Durchfluss variiert [33].

## Anhang A: Differentielle Flachheit

Ein (nichtlineares, endlichdimensionales) System

$$S_i(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(\sigma_i)}) = 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad (20)$$

heißt (*differentiell*) *flach*, falls ein  $m$ -Tupel  $y = (y_1, \dots, y_m)$  von Funktionen der Systemgrößen  $z_i, i = 1, \dots, s$ , und ihrer Ableitungen existiert, d. h.

$$y_i = \phi_i(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(\alpha_i)}), \quad i = 1, \dots, m,$$

für das Folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (I) Aus den Systemgleichungen (20) kann keine<sup>6</sup> Differentialgleichung (Dgl.) der Form

$$R(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta)}) = 0$$

abgeleitet werden. Die Komponenten  $y_i$  von  $y$  sind also nicht über eine Dgl. in  $y$  verkoppelt, und es genügt auch keine der Komponenten  $y_i$  von  $y$  einer Dgl. in  $y_i$  allein; man sagt,  $y$  ist *differentiell unabhängig*.

- (II) Alle Systemgrößen, d. h. die Komponenten von  $z$ , können ihrerseits (lokal) durch  $y$  und dessen Zeitableitungen ausgedrückt werden:

$$z_i = \psi_i(y, \dot{y}, \dots, y^{(\gamma_i)}), \quad i = 1, \dots, s.$$

Gleiches gilt damit für alle Ableitungen von  $z$  und sämtliche Funktionen dieser Größen.

In diesem Fall wird  $y$  als *flacher Ausgang* des Systems bezeichnet [26; 30].

## Anhang B: Verschiebeoperatoren

Verschiebe-Operatoren  $\delta_i, i = 1, \dots, r$  bilden den Funktionswert einer Funktion  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  an der Stelle  $t$  auf den Funktionswert derselben Funktion  $f$  an der Stelle  $t - \tau_i$  ab, wobei die Verzugszeit  $\tau_i$  der zur  $\delta_i$  gehörende, positive reelle Parameter ist: Es gilt  $\delta_i f(t) := f(t - \tau_i)$ . Damit folgt für verkettete Funktionen  $\delta_i g(f(t)) = g(f(t - \tau_i))$  und für die mehrfache Anwendung  $\delta_i \delta_j f(t) = f(t - \tau_i - \tau_j) = \delta_j \delta_i f(t)$ . Somit ist es sinnvoll und günstig, eine Potenzschreibweise zu verwenden, also  $\delta_1^{j_1} \delta_2^{j_2} \dots \delta_r^{j_r} f(t) = f(t - j_1 \tau_1 - j_2 \tau_2 - \dots - j_r \tau_r)$  mit  $j_1, \dots, j_r \in \mathbb{N}$ . Für die Verschiebung in die umgekehrte  $t$ -Richtung verwendet man entsprechend die inversen Operatoren  $\delta_i^{-1}, i = 1, \dots, r$ , für die gilt  $\delta_i^{-1} f(t) = f(t + \tau_i)$ , also  $\delta_i \delta_i^{-1} = \delta_i^{-1} \delta_i = 1$ .

## Anhang C: $\delta$ -Flachheit von Totzeitsystemen

Ein System der Form (20) heißt  *$\delta$ -flach*, falls ein  $m$ -Tupel  $y = (y_1, \dots, y_m)$  von Funktionen der Systemgrößen  $z_k, k = 1, \dots, s$ , der Zeitableitungen  $z_k^{(j)}, j \geq 0$  und der unter

<sup>5</sup> Zur Auswahl der Teilsystemordnungen kann man analog zu den endlichdimensionalen flachen Systemen [4; 24; 30; 32] vorgehen [21; 30].

<sup>6</sup> Hier und bei analogen Aussagen ist der triviale Fall von Dgl., die sich in  $0 = 0$  umformen lassen, ausgeschlossen.

Verwendung von Totzeitoperatoren  $\delta^e$ ,  $e \in \mathbb{N}^r$  verzögerten Größen  $z_k^{(j)}$ ,  $j \geq 0$  existiert, d. h.

$$y_i = \phi_i(z, \dots, \delta^e z^{(j)}, \dots, \delta^{b_i} z^{(\alpha_i)}), \quad i = 1, \dots, m,$$

für das die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(I) Aus den Systemgleichungen (20) kann man keine Differenzen-Differentialgleichung der Form

$$R(y, \dots, \delta^e y^{(j)}, \dots, \delta^c y^{(\beta)}) = 0$$

herleiten. Die Komponenten  $y_i$  von  $y$  sind also nicht über eine solche Gleichung voneinander abhängig, und keine der Komponenten  $y_i$  von  $y$  genügt einer solchen Gleichung in  $y_i$  allein; man sagt,  $y$  ist  $\delta$ -*differentiell unabhängig*.

(II) Die Systemgrößen in  $z$  können ihrerseits (lokal) durch  $y$ , dessen Zeitableitungen und die *in positiver oder negativer Richtung* verschobenen Größen  $y_k^{(j)}$ ,  $j \geq 0$  ausgedrückt werden:

$$z_i = \psi_i(y, \dots, \delta^{-\bar{e}} \delta^e y^{(j)}, \dots, \delta^{-\bar{d}_i} \delta^{d_i} y^{(j_i)}). \quad (21)$$

In diesem Fall wird  $y$  als ein  $\delta$ -*flacher Ausgang* des Systems bezeichnet [21].

Werden in den Funktionen  $\psi_i$ ,  $i = 1, \dots, s$  in der Bedingung (II) nur nicht-negative Potenzen von  $\delta$  benötigt, so spricht man von *flachen* Systemen.

## Danksagung

Der Autor dankt Herrn Prof. F. Allgöwer für die Einladung, zu diesem Heft beizutragen, Herrn Prof. M. Zeitz für sehr wertvolle Anregungen zur Gestaltung des Beitrags und Herrn J. Winkler für die Unterstützung bei der kurzfristigen Fertigstellung der numerischen Berechnungen.

## Literatur

- [1] *Bitauld, L., M. Fliess* und *J. Lévine*: A flatness based control synthesis of linear systems and application to windshield whippers. In Proc. 4th European Control Conference, Brussels, Belgium, 1997.
- [2] *Boichot, J., E. Delaleau, N.V. Diep, J. Lévine* und *E. Parzy*: Modeling and control of a high-precision positioning system actuated by a linear synchronous motor. In Proc. 14th IFAC World Congress, Beijing, 1999.
- [3] *Chen, H., A. Kremling* und *F. Allgöwer*: Nonlinear predictive control of a CSTR benchmark problem. In *Isidori, A., S. Bittanti, E. Mosca, A. De Luca, M. D. Di Benedetto* und *G. Oriolo* (Hg.): Proc. 3rd European Control Conference, S. 3247–3252, 1995.
- [4] *Delaleau, E.* und *J. Rudolph*: Control of Flat Systems by Quasi-Static Feedback of Generalized States. Internat. J. Control, 71:745–765, 1998.
- [5] *Eckhardt, St.* und *J. Rudolph*: High precision synchronous tool path tracking with an AMB machine tool spindle. In Proc. 9th International Symposium on Magnetic Bearings, Lexington, 2004. Paper no. 109.
- [6] *Fehn, A.A.R., R. Rothfuß* und *M. Zeitz*: Flatness-based torque ripple free control of switched reluctance servo machines. In *Parkin, R.M., A. Al-Habaibeh* und *M.R Jackson* (Hg.): ICOM 2003, International Conference on Mechatronics, S. 209–214, 2003.
- [7] *Fehn, A.A.R., R. Rothfuß* und *M. Zeitz*: Modeling and flatness-based feasibility studies for electro-mechanical brake-by-wire systems. In Proc. 4th Mathmod 2003, Vienna, 2003.
- [8] *Fliess, M., J. Lévine, P. Martin* und *P. Rouchon*: Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., 315:619–624, 1992.
- [9] *Hagenmeyer, V.* und *M. Zeitz*: Flachheitsbasierter Entwurf von linearen und nichtlinearen Vorsteuerungen. at – Automatisierungstechnik, 52:3–12, 2004.
- [10] *Holl, J., K. Schlacher* und *G. Keintzel*: Active rejection of chatter-vibrations in steel rolling mills. In Proc. 3rd European Conf. on Structural Control, 3ECSC, Vienna, Austria, 2004.
- [11] *Horn, J., J. Bamberger, P. Michau* und *S. Pindel*: Flatness-based clutch control for automated manual transmissions. Control Engineering Practice, 11:1353–1359, 2003.
- [12] *Jadot, F., Ph. Martin* und *P. Rouchon*: Industrial sensorless control of induction motors. In *Isidori, A., F. Lamnabhi-Lagarrique* und *W. Respondek* (Hg.): Nonlinear Control in the Year 2000 (Vol. 1), Bd. 258 der Reihe Lecture Notes in Control and Inform. Sci., S. 535–544. Springer-Verlag, 2000.
- [13] *Klatt, K.-U.* und *S. Engell*: Kontinuierlicher Rührkesselreaktor mit Neben- und Folgereaktion. In Nichtlineare Regelung – Methoden, Werkzeuge, Anwendungen, VDI-Berichte, Nr. 1026, S. 101–108. VDI-Verlag, 1993.
- [14] *Klatt, K.-U., S. Engell, A. Kremling* und *F. Allgöwer*: Testbeispiel: Rührkesselreaktor mit Parallel- und Folgereaktion. In *Engell, S.* (Hg.): Entwurf nichtlinearer Regelungen, S. 425–432. Oldenbourg-Verlag, 1995.
- [15] *Lévine, J.*: On the synchronization of a pair of independent windshield wipers. IEEE Trans. Contr. Syst. Technol., 5:787–795, 2004.
- [16] *Lévine, J.* und *B. Rémond*: Flatness based control of an automatic clutch. In Proc. 14th Int. Symp. Mathematical Theory of Networks and Systems – mtns 2000, Perpignan, France, 2000.
- [17] *Löwis, J. von, J. Rudolph, J. Thiele* und *F. Urban*: Flatness-based trajectory tracking control of a rotating shaft. In 7th International Symposium on Magnetic Bearings, Zürich, S. 299–304, 2000.
- [18] *Lynch, A.F.* und *J. Rudolph*: Flachheitsbasierte Randsteuerung parabolischer Systeme mit verteilten Parametern. at – Automatisierungstechnik, 48:478–486, 2000.
- [19] *Martin, P., R.M. Murray* und *P. Rouchon*: Flat systems. In *Bastin, G.* und *M. Gevers* (Hg.): Plenary Lectures and Mini-Courses, 4th European Control Conference, Brussels, Belgium, S. 211–264. 1997.
- [20] *Meurer, T.* und *M. Zeitz*: Flachheitsbasierte Steuerung und Regelung eines Wärmeleitungssystems. at – Automatisierungstechnik, 52:411–420, 2004.
- [21] *Mounier, H.* und *J. Rudolph*: Flatness based control of nonlinear delay systems: A chemical reactor example. Internat. J. Control, 71:871–890, 1998.
- [22] *Nitsche, R., T. Bleile, M. Birk, W. Dieterle* und *R. Rothfuß*: Modellbasierte Ladedruckregelung eines PKW-Dieselmotors. In Steuerung und Regelung von Fahrzeugen und Motoren – AUTOREG 2004, VDI-Berichte, Nr. 1828, S. 119–129. VDI-Verlag, 2004.
- [23] *Petit, N., P. Rouchon, J.-M. Boueilh, F. Guérin* und *Ph. Pividic*: Control of an industrial polymerization reactor using flatness. J. of Process Control, 12:659–665, 2002.
- [24] *Rothfuß, R.*: Anwendung der flachheitsbasierten Analyse und Regelung nichtlinearer Mehrgrößensysteme. Fortschritt-Berichte, Reihe 8, Nr. 664. VDI-Verlag, Düsseldorf, 1997.
- [25] *Rothfuss, R., J. Rudolph* und *M. Zeitz*: Flatness Based Control of a Nonlinear Chemical Reactor Model. Automatica J. IFAC, 32:1433–1439, 1996.

- [26] *Rothfuß, R., J. Rudolph und M. Zeitz*: Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme. at – Automatisierungstechnik, 45:517–525, 1997.
- [27] *Rouchon, P. und J. Rudolph*: Réacteurs chimiques différentiellement plats: planification et suivi de trajectoires. In *Corriou, J.P.* (Hg.): Commande de procédés chimiques – Réacteurs et colonnes de distillation, Kap. 5, S. 163–200. Hermès Science Publications, 2001.
- [28] *Rudolph, J.*: Flatness-based control by quasi-static feedback illustrated on a cascade of two chemical reactors. Internat. J. Control, 73:115–131, 2000.
- [29] *Rudolph, J.*: Randsteuerung von Wärmetauschern mit örtlich verteilten Parametern: Ein flachheitsbasierter Zugang. at – Automatisierungstechnik, 48:399–406, 2000.
- [30] *Rudolph, J.*: Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension. Shaker Verlag, 2003.
- [31] *Rudolph, J.*: Flatness based control of distributed parameter systems. Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik. Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [32] *Rudolph, J.*: Rekursiver Entwurf stabiler Regelkreise durch sukzessive Berücksichtigung von Integratoren und quasi-statische Rückführungen. at – Automatisierungstechnik, 2005. Im Druck.
- [33] *Rudolph, J. und J. Winkler*: A generalized flatness concept for nonlinear delay systems: motivation by chemical reactor models with constant or input-dependent delays. Internat. J. Systems Sci., 34:529–541, 2003.
- [34] *Rudolph, J., J. Winkler und F. Woittennek*: Flatness based control of distributed parameter systems: Examples and computer exercises from various technological domains. Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik. Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [35] *Rudolph, J., F. Woittennek und J. v. Löwis*: Zur Regelung einer elektromagnetisch gelagerten Spindel. at – Automatisierungstechnik, 48:132–139, 2000.
- [36] *Schlacher, K., J. Holl und S. Fuchshumer*: Zur Modellierung und aktiven Schwingungsunterdrückung in Stahlwalzanlagen. at – Automatisierungstechnik, 53:Heft 2, 2005.

Manuskripteingang: 10. Oktober 2004.



**PD Dr.-Ing. habil. Joachim Rudolph** ist am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie (Prof. K. Reinschke) der TU Dresden tätig. Hauptarbeitsgebiete: Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Regelstrecken, algebraische Methoden, lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme; Anwendungen in der Mechatronik und der Verfahrenstechnik.

Adresse: Technische Universität Dresden, Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, 01062 Dresden.  
E-Mail: rudolph@erss11.et.tu-dresden.de