

# Rekursiver Entwurf stabiler Regelkreise durch sukzessive Berücksichtigung von Integratoren und quasi-statische Rückführungen

## Recursive Design of Stable Control Loops by Integrator Backstepping and Quasi-static Feedback

Joachim Rudolph

---

Die in der englischsprachigen Literatur unter der Bezeichnung „integrator backstepping“ bekannte Methode zum Entwurf stabiler Regelkreise wird für die differentiell flachen Systeme diskutiert. Die Verwendung von Brunovský-Zuständen und quasi-statischen Rückführungen ermöglicht eine systematische Behandlung von Systemen mit mehreren Eingangsgrößen unabhängig von der Systemdarstellung. Die Anwendung der Methode für die Trajektorienfolgeregelung wird am Beispiel eines Brückenkrans illustriert.

The design of stable closed loops by integrator backstepping is discussed for differentially flat systems. Brunovský states and quasi-static feedback can be used for a systematic treatment of systems with multiple inputs, independent of the type of representation used. A gantry crane example illustrates how the method can be used for trajectory tracking.

**Schlagwörter:** Differentielle Flachheit, Brunovský-Zustand, quasi-statische Rückführung, rekursiver Reglerentwurf

**Keywords:** Differential flatness, Brunovský state, quasi-static feedback, backstepping

---

## 1 Einführende Übersicht

Im vorliegenden Aufsatz wird eine auf Lyapunov-Funktionen basierende Methode zum Reglerentwurf diskutiert, die in der englischsprachigen Literatur unter der Bezeichnung „integrator backstepping“ bekannt ist [11]. Dazu wird ein Kommentar aus der einführenden Übersichtsdarstellung zu flachen Systemen [12] aufgegriffen. Dieser Hinweis wird – in etwas anderer Form aufbereitet – detailliert erörtert, wozu eine systematische Entwurfsmethode angegeben wird.

Der rekursive Reglerentwurf durch sukzessive Berücksichtigung von Integratoren („integrator backstepping“) nützt aus, dass Systeme erster Ordnung einfacher zu stabilisieren sind als Systeme höherer Ordnung. Dazu werden Lyapunov-Funktionen für Teilsysteme konstruiert, wobei

die Systemordnung schrittweise durch Berücksichtigen weiterer Integratoren erhöht wird, und zwar um je einen Integrator pro „Eingangskanal“. Eine einführende Beschreibung des Verfahrens erfolgt in Abschnitt 4.1.

Es scheint bisher noch nicht völlig geklärt, wie diese Entwurfsmethode für Systeme mit mehreren Stellgrößen systematisch durchgeführt werden kann (siehe hierzu z. B. [20]). Zur Klärung dieser Frage soll die vorgeschlagene Lösung daher ebenfalls beitragen. Dabei werden die Betrachtungen auf die Klasse der differentiell flachen Systeme eingeschränkt. (Einen Weg zur Verallgemeinerung weist [3].) Dies sollte nicht als eine schwerwiegende Einschränkung angesehen werden, denn erstens wird diese rekursive Entwurfsmethode meist ohnehin auf Systeme mit einer gewissen „Dreieck-Struktur“ angewandt – und diese sind immer flach – und zweitens wurde die Flachheitseigenschaft schon

für eine bedeutende Zahl von Modellen technischer Prozesse nachgewiesen und ausgenutzt.

Die theoretische Grundlage für das vorgestellte Verfahren bildet das wesentliche Ergebnis aus [4], das besagt, dass die differentiell flachen Systeme durch quasi-statische Rückführungen eines sog. Brunovský-Zustands exakt linearisiert werden können. Dadurch steht für die flachen Systeme eine systematische Methode zum Entwurf von Folgeregler zur Verfügung, die keine Erhöhung der Systemdimension erfordern. Das heißt, die so entworfenen Regler enthalten keine „Integrator“, daher auch die Bezeichnung „quasi-statisch“ für solche Rückführungen.

Die Tatsache, dass differentiell flache Systeme durch dynamische oder quasi-statische Zustandsrückführungen linearisierbar sind, und ein solcher Entwurf systematisch und recht einfach möglich ist, hat zuweilen zu dem Missverständnis geführt, flachheitsbasierter Reglerentwurf und Zustandslinearisierung seien in gewisser Weise synonym. Dies ist aber keineswegs der Fall, vielmehr ist für die flachen Systeme weitestgehende Entwurfsfreiheit gegeben, und eine lineare Fehlerdynamik ergibt sich mit dem hier diskutierten auf Lyapunov-Funktionen basierenden Entwurf als Sonderfall – ein weiterer, die Flachheitseigenschaft für die Vorsteuerung nutzender Zugang findet sich beispielsweise in [10].

Der Beitrag gliedert sich wie folgt. Im nächsten Abschnitt werden die differentiell flachen Systeme eingeführt, in Abschnitt 3 das Eingangskonzept und die zugehörigen verallgemeinerten Zustände. Dem rekursiven Entwurf mittels Lyapunov-Funktionen widmet sich Abschnitt 4, und in Abschnitt 5 wird die Methode am Beispiel eines Brückenkrans illustriert, wobei zugleich ihre Anwendung zur Trajektorienfolgeführung aufgezeigt wird.

## 2 Differentiell flache Systeme

Ein (nichtlineares, endlichdimensionales) System

$$S_i(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(\alpha_i)}) = 0, \quad i = 1, \dots, q, \quad (1)$$

heißt (*differentiell*) *flach*, falls ein  $m$ -Tupel  $y = (y_1, \dots, y_m)$  von Funktionen der Systemgrößen  $z_i, i = 1, \dots, s$ , und ihrer Ableitungen existiert, d. h.

$$y_i = \phi_i(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(\alpha_i)}), \quad i = 1, \dots, m,$$

für das folgende zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (I) Aus den Systemgleichungen (1) kann keine<sup>1</sup> Differentialgleichung (Dgl.) der Form

$$R(y, \dot{y}, \dots, y^{(\beta)}) = 0$$

abgeleitet werden. Die Komponenten  $y_i$  von  $y$  sind also nicht über eine Dgl. in  $y$  verkoppelt, und es genügt auch keine der Komponenten  $y_i$  von  $y$  einer Dgl. in  $y_i$  allein; man sagt,  $y$  ist *differentiell unabhängig*.

<sup>1</sup> Hier und bei analogen Aussagen ist der triviale Fall von Dgl., die sich in  $0 = 0$  umformen lassen, ausgeschlossen.

- (II) Alle Systemgrößen, d. h. die Komponenten von  $z$ , können ihrerseits (lokal<sup>2</sup>) durch  $y$  und dessen Zeitableitungen ausgedrückt werden:

$$z_i = \psi_i(y, \dot{y}, \dots, y^{(\gamma_i)}), \quad i = 1, \dots, s.$$

Gleiches gilt damit für alle Ableitungen von  $z$  und sämtliche Funktionen dieser Größen.

In diesem Fall wird  $y$  als *flacher Ausgang* des Systems bezeichnet [8; 15].

Bedingung (I) stellt sicher, dass für die Komponenten eines flachen Ausgangs Trajektorien voneinander unabhängig vorgegeben werden können. Bedingung (II) erlaubt, die Trajektorien sämtlicher Systemgrößen aus diesen Trajektorien eines flachen Ausgangs zu berechnen – insbesondere also Stellgrößenverläufe.

Die flachen Systeme können demnach als mit dem Parameter  $y$  *vollständig, endlich und frei differentiell parametrierbar* charakterisiert werden: Es garantiert Bedingung (I), dass die Parametrierung des Systems durch einen flachen Ausgang *frei*, Bedingung (II), dass sie *vollständig* ist. Da die Anzahl der Komponenten eines flachen Ausgangs endlich ist, kann man auch die Parametrierung als *endlich* bezeichnen; *differentiell* ist sie, weil nur Zeitableitungen vorkommen (aber keine Integrationen).

Ein flaches System besitzt unendlich viele flache Ausgänge. Die Auswahl des für die Analyse und Synthese verwendeten flachen Ausgangs wird man von der Aufgabenstellung abhängig machen, wobei z. B. die physikalische Interpretierbarkeit, aber auch die Vereinfachung der Berechnungen [14] oder die Möglichkeit zum Erhalt von Symmetrien im System als Kriterien dienen können [13; 16; 18].

Die Zahl  $m$  seiner Komponenten hängt nicht von der Wahl des flachen Ausgangs  $y$  ab. Offensichtlich gibt es in einem flachen System gerade so viele frei vorgebbare Variablen wie Komponenten eines flachen Ausgangs  $y$ . Die Anzahl  $m$  ist also ein Maß für die Unterbestimmtheit des Dgl.-Systems. (Es wird somit naheliegen, auch  $m$  Eingangsgrößen zu wählen.)

Außer der Möglichkeit zur Parametrierung der Lösung durch unabhängig wählbare Trajektorien des flachen Ausgangs, die einen einfachen Zugang zur Planung von Übergangsvorgängen ermöglicht, ist für die flachen Systeme auch ein einfacher und systematischer Entwurf von Folgeregler möglich, die dafür sorgen, dass die tatsächlichen Trajektorien den entworfenen Solltrajektorien stabil folgen – siehe dazu z. B. [12; 15; 17] und Abschnitt 5.

Man beachte, dass bis hierher keine spezielle Systemdarstellung verwendet wurde, und es wurden auch weder

<sup>2</sup> Die im Allgemeinen implizit definierten Funktionen können lokal, d. h. in einer nicht näher spezifizierten Umgebung geeigneter Punkte des Definitionsbereichs, aufgelöst werden (Satz über die Auflösbarkeit impliziter Funktionen). In diesem Sinne wird in der Folge grundsätzlich vorgegangen und dabei auf die Spezifikation der „geeigneten Punkte“ verzichtet; diese ergibt sich bei konkreten Beispielen während der Berechnungen.

Eingangs- noch Zustandsgrößen definiert. Diese sind Gegenstand des folgenden Abschnitts.

### 3 Eingangs- und Zustandskonzepte

Für eine Reihe von Fragestellungen während der Systemanalyse und während des Entwurfs einer Steuerung oder einer Regelung ist es sehr hilfreich, mit einem allgemeinen Eingangsbegriff zu arbeiten, d.h. auch andere als die Stellgrößen als Eingangsgrößen zu interpretieren. In Abhängigkeit von der getroffenen Wahl der Eingangsgrößen eines Systems werden sich Darstellungen erster Ordnung unterschiedlicher Form ergeben. Im hier gewählten allgemeineren Rahmen, der sich aus dem differentialalgebraischen Zugang zu den nichtlinearen Systemen ableitet [6; 7; 17], hängt eine solche Darstellung a priori von einer endlichen Zahl von Zeitableitungen der Eingangsgrößen ab, man nennt sie deswegen verallgemeinerte Zustandsdarstellungen. Diese Konzepte sollen nun eingeführt werden.

#### 3.1 Eingänge

Wie üblich, wird ein Tupel  $u = (u_1, \dots, u_m)$  solcher Eingangsgrößen  $u_i$  einfach als *Eingang* bezeichnet. Nun sollen die an einen Eingang gestellten Anforderungen festgelegt werden (vgl. [6; 7; 17]):

- Die Komponenten  $u_i$  erfüllen (zumindest lokal) Gln. der Form

$$u_i = \psi_i(z, \dot{z}, \ddot{z}, \dots, z^{(\nu)}) \quad (2)$$

- Ein Eingang  $u$  ist differentiell unabhängig, d.h. es existiert keine Dgl. in den Komponenten von  $u$  allein.
- Jede Systemgröße  $z_i, i = 1, \dots, s$  genügt einer (impliziten) Dgl. der Form

$$E_i(z_i, \dot{z}_i, \dots, z_i^{(\delta_i)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\epsilon_i)}) = 0.$$

Die Eigenschaft (II) besagt, dass die Zeitverläufe der einzelnen Eingangsgrößen  $u_i$  voneinander unabhängig und frei gewählt werden können. Schließlich bedeutet (III), dass bei Vorgabe einer Zeitfunktion für  $u$  (und damit für alle Zeitableitungen von  $u$ ) die Lösung des Systems nur noch von Anfangsbedingungen für die Komponenten von  $z$  und einer endlichen Anzahl von dessen Zeitableitungen abhängt. Es handelt sich also um sehr natürliche Bedingungen für Eingangsgrößen, falls diese zur Steuerung des Systems dienen sollen.

Der Nachweis der beiden relativ abstrakten Eigenschaften (II) und (III) ist in dieser Form im Allgemeinen umständlich. An einem technischen Beispiel sind sie für die Stellgrößen in der Regel erfüllt und anhand der angegebenen Interpretationen leicht plausibel zu machen. Insbesondere genügt der Eingang  $u$  eines durch eine Zustandsdarstellung  $\dot{x} = f(x, u)$  definierten Systems grundsätzlich den drei gestellten Bedingungen.

Sei nun  $u = (u_1, \dots, u_m)$  ein Eingang. Der Einfachheit halber soll dieser in  $z = (z_1, \dots, z_s)$  enthalten sein. (Es ge-

nügt,  $z$  entsprechend zu erweitern.) Dann kann dieses in  $z = (\zeta, u)$  aufgeteilt werden – mit  $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_p)$ , also mit  $p = s - m$ . Nun können die allgemeinen Systemdgl. (1) in diesen Größen neu angeschrieben werden:

$$\bar{S}_i(\zeta, \dot{\zeta}, \dots, \zeta^{(\beta_i)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\gamma_i)}) = 0, \quad i = 1, \dots, q. \quad (3)$$

Da es sich um ein System mit genau  $m$  unabhängigen Größen handelt, nämlich  $u$ , ist leicht einzusehen, dass  $q = p = s - m$  solcher Gln. ausreichen. Man kann also zusammenfassen: Der Eingang  $u$  wird so gewählt, dass das unterbestimmte Dgl.-System (1) für  $z$  zu einem Dgl.-System für  $\zeta$  wird, das für vorgegebene Zeitverläufe der Eingangsgrößen (als hinreichend differenzierbare Zeitfunktionen) bestimmt ist. Die Anzahl  $m$  der Komponenten des Eingangs ist also ein Maß für die Unterbestimmtheit des Systems. Ist das System (1) bestimmt, oder „autonom“, dann ist  $m = 0$ : Es gibt dann keinen (nicht-leeren) Eingang.

#### 3.2 Verallgemeinerte Zustandsdarstellungen

Ein (*verallgemeinerter*) Zustand eines Systems (3) mit dem Eingang  $u = (u_1, \dots, u_m)$  ist ein Tupel  $x = (x_1, \dots, x_n)$  mit

$$x_i = \psi_i(\zeta, \dot{\zeta}, \dots, \zeta^{(\delta_i)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\epsilon_i)}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (4)$$

für das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind [6; 7; 17]:

- Die Komponenten von  $x$  sind voneinander unabhängig in dem Sinne, dass  $x$  keiner Gleichung der Form

$$\Phi(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(x)}) = 0 \quad (5)$$

genügt.

- Für jede beliebige Funktion der Systemgrößen  $z = (\zeta, u)$  und ihrer Zeitableitungen, also für jede Größe

$$\eta = \phi(\zeta, \dot{\zeta}, \dots, \zeta^{(\delta)}, u, \dot{u}, \dots, u^{(\epsilon)}),$$

existiert eine Funktion  $h$  derart, dass (lokal) gilt

$$\eta = h(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\beta)}). \quad (6)$$

Für die ersten Ableitungen der (*verallgemeinerten*) Zustandsgrößen folgt demnach aus (II) entsprechend (6):

$$\dot{x}_i = f_i(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha_i)}), \quad i = 1, \dots, n. \quad (7)$$

Die Darstellungen (7) heißen (*verallgemeinerte*) Zustandsdarstellungen. Kommen darin keine Zeitableitungen von  $u$  vor ( $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, n$ ), so werden sowohl die Zustandsdarstellungen als auch die dazugehörigen Zustände als *klassisch* bezeichnet – Bedingungen für die Existenz solcher klassischen Zustände wurden in [2] angegeben. Wie üblich wird die Anzahl der erforderlichen Komponenten eines Zustands als die *Zustandsdimension*<sup>3</sup> bezeichnet.

<sup>3</sup> Wie im linearen Fall ist diese Dimension eindeutig bestimmt. Die Zustandsdimension ist in der Tat gleich derjenigen des um einen „regulären Punkt“ linearisierten Systems. (Z. B. ist für  $y \neq 0$  die Zustandsdimension des Systems  $y\ddot{y} + \dot{y} = u$  gleich 2; der Wert  $y = 0$  entspricht nichtregulären Punkten.)

Man beachte: Die Definition der Zustände erfordert zunächst die Wahl eines Eingangs  $u$  – es wird deshalb von einem zu  $u$  gehörenden Zustand oder von einem Zustand in Bezug auf  $u$  gesprochen. Dieser Eingang kann natürlich leer sein ( $m = 0$ ), bei einem ungesteuerten System. Dementsprechend hängt auch die Zustandsdimension von der Wahl von  $u$  ab.

Es soll nun nochmals der Sinn des (verallgemeinerten) Zustands-Konzepts betont werden: Ist der Eingang  $u$  vollständig bekannt (als Zeitverlauf oder mit den aktuellen Werten hinreichend vieler Zeitableitungen), dann ist die Kenntnis des aktuellen Wertes eines dazugehörigen (verallgemeinerten) Zustands  $x$  gerade ausreichend für die Integration der Systemdgl. und die Berechnung der Werte beliebiger Systemgrößen. Mit anderen Worten, zusammen mit  $u$  beschreibt  $x$  den „aktuellen Zustand“ des Systems, in einem allgemeinen Wortsinn.

Für ein durch eine (verallgemeinerte) Zustandsdarstellung (7) definiertes System ist  $(x, u)$  also ein vollständiges  $(n + m)$ -Tupel von Systemgrößen, d. h., es werden keine weiteren Größen zur vollständigen Beschreibung des Systems benötigt.

### 3.3 Brunovský-Zustände

Für flache Systeme kann man eine spezielle Form verallgemeinerter Zustandsgrößen einführen. Dazu wird davon ausgegangen, dass ein Eingang  $u$  gewählt wurde, und man kann dann z. B. mit der Systemdarstellung

$$u = A(y, \dot{y}, \dots, y^{(\nu)}) \tag{8}$$

arbeiten. Es ist dabei naheliegend, Komponenten des flachen Ausgangs  $y$  und seiner Zeitableitungen als Zustandsgrößen zu verwenden. Das wird zu Zustandsdarstellungen führen, deren Form man als Verallgemeinerung der für die linearen Systeme bekannten Regelungsform interpretieren kann.

Man betrachtet die Zeitableitungen  $y^{(k)}$  für  $k = 0, 1, \dots$  und konstruiert durch Auswahl von Komponenten dieser  $m$ -Tupel sukzessive einen Zustand, der der Forderung (I) in Abschnitt 3.2 nach Unabhängigkeit genügt. Dazu kann man wie folgt vorgehen [3; 4]:

Im Schritt 0 wählt man aus  $y$  so viele Komponenten wie möglich aus, also<sup>4</sup>

$$\tilde{y}^0 = (\tilde{y}_1^0, \dots, \tilde{y}_{r_0}^0)$$

mit  $\tilde{y}_i^0 \in \{y_1, \dots, y_m\}$ ,  $i = 1, \dots, r_0$ , die voneinander unabhängig sind in dem Sinne, dass  $\tilde{y}^0$  keiner Gleichung der Form

$$\Phi^0(\tilde{y}^0, u, \dot{u}, \dots, u^{(x)}) = 0$$

genügt.

<sup>4</sup>Die hochgestellten Zahlen bezeichnen hier Indices, dienen also der Numerierung der sukzessive konstruierten Tupel.

Im Schritt  $k > 0$  wählt man aus  $\dot{\tilde{y}}^{k-1}$  möglichst viele Komponenten aus, also

$$\tilde{y}^k = (\tilde{y}_1^k, \dots, \tilde{y}_{r_k}^k)$$

mit  $\tilde{y}_i^k \in \{\dot{\tilde{y}}_1^{k-1}, \dots, \dot{\tilde{y}}_{r_{k-1}}^{k-1}\}$ ,  $i = 1, \dots, r_k$ , und zwar so, dass  $\tilde{y}^k$  keiner Gleichung der Form

$$\Phi^k(\tilde{y}^k, \tilde{y}^{k-1}, \dots, \tilde{y}^0, u, \dot{u}, \dots, u^{(x)}) = 0$$

genügt.

Offensichtlich enthält also  $\tilde{y}^k$  Ableitungen der Ordnung  $k$  von Komponenten des flachen Ausgangs  $y$ . Man beachte, dass  $\tilde{y}^k$  tatsächlich aus den Komponenten von  $\dot{\tilde{y}}^{k-1}$  gewählt werden kann, denn aus der Abhängigkeit zwischen einem nicht ausgewählten  $y_j^{(k)}$  und  $\tilde{y}^k$  gemäß

$$\Phi^k(y_j^{(k)}, \tilde{y}^k, \tilde{y}^{k-1}, \dots, \tilde{y}^0, u, \dot{u}, \dots, u^{(x)}) = 0 \tag{9}$$

folgt unmittelbar durch Differentiation und Ersetzen von  $y_j^{(k)}$  mittels (9) eine entsprechende Beziehung

$$\Phi^{k+1}(y_j^{(k+1)}, \dot{\tilde{y}}^k, \tilde{y}^k, \tilde{y}^{k-1}, \dots, \tilde{y}^0, u, \dot{u}, \dots, u^{(x+1)}) = 0.$$

Es ist also sichergestellt, dass in jedem Schritt die maximale Zahl unabhängiger Komponenten der Ableitungen von  $y$  erfasst wird. Durch Vereinigung der  $r_k$ -Tupel  $\tilde{y}^k$  erhält man  $(\tilde{y}^0, \dots, \tilde{y}^k)$ . Dies ist offensichtlich für alle  $k$  endlich, und verändert sich für hinreichend große  $k$  nicht mehr; letzteres ist anhand der Beziehung (8) sofort ersichtlich. Folglich bildet  $(\tilde{y}^0, \dots, \tilde{y}^{k_*})$  für hinreichend großes  $k_*$  einen (verallgemeinerten) Zustand, der durch Umnummerieren in der folgenden einfachen Form geschrieben werden kann:

$$x = (y_1, \dot{y}_1, \dots, y_1^{(\kappa_1-1)}, y_2, \dots, y_m^{(\kappa_m-1)}), \tag{10}$$

wobei zur Vereinfachung der Schreibweise  $y_i^{(-1)} = \emptyset$  vereinbart wird, d. h. für  $\kappa_i = 0$  ist weder  $y_i$  noch eine seiner Zeitableitungen in  $x$  enthalten. Man verifiziert leicht die Definition von  $\kappa_i$ :

$$\kappa_i = \min \{k \in \mathbb{N} \mid y_i^{(k)} \notin \tilde{y}^k\};$$

sie folgt aus der getroffenen Auswahl der  $\tilde{y}^k$ . In  $x$  sind Zeitableitungen von  $y_i$  bis zur Ordnung  $\kappa_i - 1$  enthalten. Da bei der Konstruktion in jedem Schritt eine Auswahl getroffen wurde, sind sowohl der Zustand  $x$  als auch die Zahlen  $\kappa_i$  im Allgemeinen nicht eindeutig.

Die Auswahl des Zustands  $x$  in Gl. (10), der als *Brunovský-Zustand* bezeichnet wird, kann wie folgt dargestellt werden.



$$\begin{array}{cccccc}
 y_1 & y_2 & \dots & y_{r_k} & \dots & y_{r_1} & \dots & y_{r_0} & \dots & y_m \\
 \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dots & \dot{y}_{r_k} & \dots & \dot{y}_{r_1} & \dots & \dot{y}_{r_0} & \dots & \dot{y}_m \\
 \vdots & & & & & & & & & \vdots \\
 y_1^{(k)} & y_2^{(k)} & \dots & y_{r_k}^{(k)} & \dots & y_{r_1}^{(k)} & \dots & y_{r_0}^{(k)} & \dots & y_m^{(k)} \\
 y_1^{(k+1)} & y_2^{(k+1)} & \dots & y_{r_k}^{(k+1)} & \dots & y_{r_1}^{(k+1)} & \dots & y_{r_0}^{(k+1)} & \dots & y_m^{(k+1)} \\
 \vdots & & & & & & & & & \vdots \\
 y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_{r_k}^{(n-1)} & \dots & y_{r_1}^{(n-1)} & \dots & y_{r_0}^{(n-1)} & \dots & y_m^{(n-1)}
 \end{array}$$

Durch Ummumerieren der Komponenten des flachen Ausgangs  $y$  wird der Zustand  $x$  so ausgewählt, dass die in der obigen Tafel fettgedruckten Größen in  $x$  enthalten sind; also in der Tafel in horizontaler Richtung  $r_0$  Komponenten von  $y$ ,  $r_1$  Komponenten von  $\dot{y}$  etc. Von  $y^{(k)}$  werden also  $r_k$  Komponenten ausgewählt, und zwar aus  $(y_1^{(k)}, \dots, y_{r_{k-1}}^{(k)})$ . Wird  $y_{r_k}^{(k+1)}$ , wie in der Tafel dargestellt, nicht in den Zustand  $x$  aufgenommen, dann ist  $\kappa_{r_k} = k + 1$ : Es sind von  $y_{r_k}$  gerade die Ableitungen bis zur Ordnung  $k = \kappa_{r_k} - 1$  in  $x$  enthalten – entsprechend der vertikalen Richtung der Tafel.

Durch das Ummumerieren der Komponenten von  $y$  fallen die Ordnungen der Zeitableitungen, die in  $x$  auftreten, mit steigendem Index:

$$\kappa_i > 0, \quad i = 1, \dots, \bar{m} \leq m, \quad \kappa_i = 0, \quad i = \bar{m} + 1, \dots, m.$$

Sind alle  $\kappa_i = 0$ , seien  $\bar{m} = 0$  und  $x = \emptyset$ . Schließlich wird  $n_i = \sum_{j=1}^i \kappa_j, \quad i = 1, \dots, \bar{m}$  definiert.

Zu einem Brunovský-Zustand  $x$  des flachen Systems mit dem Eingang  $u$  gehört dann offensichtlich (lokal) eine verallgemeinerte Regelungsform

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_j &= x_{j+1}, & j &\in \{1, \dots, n\} \setminus \{n_1, \dots, n_{\bar{m}}\}, \\
 \dot{x}_{n_j} &= \phi_j(x, u, \dots, u^{(\alpha_j)}), & j &= 1, \dots, \bar{m}, \\
 y_j &= \phi_j(x, u, \dots, u^{(\alpha_j)}), & j &= \bar{m} + 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Aus der Konstruktion der Brunovský-Zustände wird ersichtlich, dass ein Zustand auch gewählt werden kann, indem im Schritt  $k$  anstelle der Ableitungen aus  $\tilde{y}^k$  Funktionen

$$\xi^k = \tau^k(\tilde{y}^0, \dots, \tilde{y}^k) \tag{11}$$

als Zustandsgrößen gewählt werden, für die  $D_k \tau^k$  regulär ist<sup>5</sup>. Mit dieser Wahl ergibt sich eine sog. klassische, also vom Eingang  $u$  und dessen Ableitungen unabhängige [17] Zustandstransformation zwischen  $x$  und  $\xi = (\xi^0, \dots, \xi^{k*})$ , wobei  $\tilde{y}^k = \tilde{\tau}^k(\xi^0, \dots, \xi^k)$  gilt.

Im Falle einer einzigen Eingangsgröße ( $m = 1$ ) gehört zu dem Zustand  $\xi$  offensichtlich eine Zustandsdarstellung mit „Dreieck-Struktur“, und umgekehrt ist klar, dass für eine solche Struktur durch eine entsprechende inverse Transformation ein Brunovský-Zustand eingeführt werden kann.

<sup>5</sup> Es bezeichnet  $D_k$  die Ableitung nach dem  $k$ -ten Argument (das gegebenenfalls ein Tupel ist).

Im Fall  $m > 1$  erhält man im Allgemeinen eine verallgemeinerte Zustandsdarstellung, in der Zeitableitungen des Eingangs auftreten, deren Struktur weniger leicht zu charakterisieren ist.

### 3.4 Quasi-statische Rückführungen

Mit

$$v_j = y_j^{(\kappa_j)} = \phi_j(x, u, \dots, u^{(\alpha_j)}), \quad j = 1, \dots, m \tag{12}$$

kann ein neuer Eingang  $v = (v_1, \dots, v_m)$  eingeführt werden. Dessen Komponenten sind offensichtlich differentiell unabhängig, sonst ergäbe sich ein Widerspruch zu Bedingung (I) in Abschnitt 2. Außerdem ist der in (10) bezüglich  $u$  eingeführte Brunovský-Zustand  $x$  auch ein Zustand bezüglich  $v$ . Die zugehörige Zustandsdarstellung entspricht der bekannten Brunovský-Normalform linearer steuerbarer Systeme.

Man kann nun (12) als eine Rückführung des (verallgemeinerten) Zustands  $x$  auffassen, mit einer Aufschaltung des Eingangs  $u$  und dessen Zeitableitungen. Allerdings würde für eine Realisierung ein Ausdruck für  $u$  benötigt. Tatsächlich kann die Definitionsgleichung (12) von  $v$  unter Verwendung der System-Dgln. so invertiert werden, dass sich ein Ausdruck für  $u$  in Abhängigkeit von  $x, v$  sowie einer endlichen Zahl von Zeitableitungen von  $v$  ergibt. Dies folgt aus der Tatsache, dass  $v$  ein Eingang des Systems ist und  $x$  ein zu diesem Eingang gehörender Zustand. Gemäß der Definition eines (verallgemeinerten) Zustands in Abschnitt 3.2 – genauer aus (6) mit  $u$  an Stelle von  $\eta$  und  $v$  anstelle von  $u$ , müssen Beziehungen der Form

$$u_j = \psi_j(x, v, \dots, v^{(\beta_j)}), \quad j = 1, \dots, m \tag{13}$$

existieren.

Da in (12) und (13) Zeitableitungen von  $u$  bzw.  $v$  auftreten, handelt es sich nicht um Zustandsrückführungen der üblichen Form. Allerdings bleibt der Zustand des Systems unter einer solchen Rückführung unverändert – und somit auch seine Dimension. Aus diesem Grund bezeichnet man diese Art von Rückführungen als *quasi-statische* Rückführungen eines verallgemeinerten Zustands [1]. (Detaillierte Erörterungen dieser Klasse von Rückführungen finden sich beispielsweise in [5; 17].)

Die in (13) auftretenden Ableitungen des neuen Eingangs  $v$  können im Rahmen einer Folgeregung leicht – und ohne numerische Differentiation – sukzessive berechnet werden [4; 17]. Bei einer Stabilisierung wird  $v$  mittels  $v = \varphi(x)$  berechnet und die Zeitableitungen ergeben sich ebenfalls unter Verwendung der Zustandsdarstellung als Funktionen von  $x$  – siehe Abschnitt 4.

Man beachte, dass anstelle eines Brunovský-Zustands  $x$  auch ein (verallgemeinerter) Zustand  $\xi$  verwendet werden kann, wie er in (11) am Ende von Abschnitt 3.3 definiert wurde. An der Invertierbarkeit der Rückführungen ändert sich dadurch nichts. (Tatsächlich werden bei der Definition der Rückführungen üblicherweise klassische Zustandstransformationen zugelassen [17].)

## 4 Rekursiver Entwurf mittels Lyapunov-Funktionen

Der rekursive Reglerentwurf durch sukzessive Berücksichtigung von Integratoren („backstepping“) basiert darauf, dass es wesentlich einfacher ist, ein System erster Ordnung zu stabilisieren als ein System höherer Ordnung. Zunächst soll der Grundgedanke kurz erläutert werden. Anschließend wird ein Verfahren zum Entwurf von stabilisierenden Rückführungen und Lyapunov-Funktionen für differentiell flache Systeme angegeben.

### 4.1 Grundprinzip

Betrachtet wird ein System

$$\dot{x} = f(x, w), \quad \dot{w} = u, \tag{14}$$

mit  $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ ,  $w \in \mathcal{W} \subset \mathbb{R}^m$  und  $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$  mit der Gleichgewichtslage  $(0, 0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{W}$ , d. h. mit  $f(0, 0) = 0$ . Es seien eine die Gleichgewichtslage  $x = 0$  des Teilsystems  $\dot{x} = f(x, w)$  lokal stabilisierende Rückführung  $w = \alpha(x)$ , mit  $\alpha(0) = 0$  und eine Lyapunov-Funktion  $V : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  bekannt, d. h. genauer: Bei geeigneter Wahl von  $\mathcal{X}$  sei auf diesem ganzen (offenen) Gebiet außer für  $x = 0$  der Wert  $V(x) > 0$  und  $V(0) = 0$ . Außerdem sei  $V$  stetig differenzierbar, es gelte  $\dot{V} \leq 0$  entlang den Lösungen von  $\dot{x} = f(x, \alpha(x))$ , d. h.  $DV(x) \cdot f(x, \alpha(x)) \leq 0$ , wobei  $DV(x) \cdot f(x, \alpha(x)) = 0$  nur für  $x = 0$  gilt<sup>6</sup>. Kurz zusammengefasst bedeutet das: Auf  $\mathcal{X}$  ist die Funktion  $V$  positiv definit, ihre Ableitung entlang den Lösungstrajektorien des Systems negativ definit.

Dann kann für das System (14) die durch

$$\tilde{V}(x, w) = V(x) + \frac{1}{2} (w - \alpha(x))^T (w - \alpha(x))$$

definierte Funktion zum Entwurf einer lokal stabilisierenden Rückführung verwendet werden. Man erhält mit der neuen Variablen  $z = w - \alpha(x)$  für die Ableitung entlang der Lösung des erweiterten Systems

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}} &= DV(x) \cdot f(x, w) + (w - \alpha(x))^T (u - D\alpha(x) \cdot f(x, w)) \\ &= DV(x) \cdot f(x, \alpha(x) + z) \\ &\quad + (w - \alpha(x))^T (u - D\alpha(x) \cdot f(x, w)) \\ &= DV(x) \cdot (f(x, \alpha(x)) + R(x, z) \cdot z) \\ &\quad + z^T (u - D\alpha(x) \cdot f(x, w)), \end{aligned}$$

mit<sup>7</sup>

$$R(x, z) = \int_0^1 D_2 f(x, \alpha(x) + vz) dv. \tag{15}$$

Darin ist  $v$  ein skalarer reeller Parameter. Für im zweiten Argument affine  $f$ , also  $f(x, w) = F_1(x) + F_2(x) \cdot w$ , ergibt sich direkt  $R(x, z) = F_2(x)$ .

<sup>6</sup> Es bezeichnen  $D$  die Ableitung einer Funktion nach sämtlichen Argumenten und  $D_2$  die Ableitung nach dem zweiten Argument (das gegebenenfalls ein Tupel ist).

<sup>7</sup>  $R(x, z) \cdot z = \int_0^1 D_2 f(x, \alpha(x) + vz) z dv = \int_0^1 \frac{\partial f(x, \alpha(x) + vz)}{\partial v} dv = f(x, \alpha(x) + z) - f(x, \alpha(x))$ .

Aufgrund der Annahmen  $DV(x) \cdot f(x, \alpha(x)) \leq 0$  und  $DV(x) \cdot f(x, \alpha(x)) \neq 0$  für  $x \neq 0$  kann nun ein das System (lokal) in der Ruhelage stabilisierender Regler bestimmt werden, indem dafür gesorgt wird, dass

$$DV(x) \cdot (R(x, z) \cdot z) + z^T (u - D\alpha(x) \cdot f(x, w))$$

negativ definit wird. Man kann beispielsweise fordern, dass

$$\dot{\tilde{V}} = DV(x) \cdot f(x, \alpha(x)) - z^T P(x, w) \cdot z$$

gelten soll, also

$$\begin{aligned} DV(x) \cdot (R(x, z) \cdot z) + z^T (u - D\alpha(x) \cdot f(x, w)) \\ = -z^T P(x, w) \cdot z \end{aligned}$$

für eine beliebige Matrixfunktion  $P$ , deren Wert außerhalb  $0$  positiv ist. Auflösen nach  $u$  liefert

$$\begin{aligned} u &= D\alpha(x) \cdot f(x, w) - P(x, w) \cdot (w - \alpha(x)) \\ &\quad - (DV(x) \cdot R(x, w - \alpha(x)))^T. \end{aligned}$$

### 4.2 Rekursiver Entwurf für differentiell flache Systeme

Sei nun ein flaches System mit einem Eingang  $u$  und mit einem (beliebigen) flachen Ausgang  $y$  gegeben, und sei  $x$  ein zugehöriger Brunovský-Zustand. Die Komponenten des flachen Ausgangs seien wieder wie in Abschnitt 3.3 nummeriert; außerdem gelten erneut die dort eingeführten Notationen, wie beispielsweise  $\tilde{y}^k$ . Diejenigen Komponenten von  $\tilde{y}^k$ , die nicht  $\tilde{y}^{k+1}$  angehören, werden in  $v^k$  zusammengefasst. Dann entspricht die Vereinigung der Komponenten aller  $v^k$  offensichtlich gerade dem in Abschnitt 3.4 verwendeten neuen Eingang  $v$ . Man kann dann die  $k$ -te Zeitableitung  $y^{(k)}$  des flachen Ausgangs aufteilen in

$$y^{(k)} = \left( \tilde{y}^k, v^k, \dot{v}^{k-1}, \ddot{v}^{k-2}, \dots, \frac{d^k}{dt^k} v^0 \right).$$

Es soll nun eine rekursive Entwurfsmethode angegeben werden, die gestattet, die durch  $y^{(k)} = 0, k \geq 0$  definierte Gleichgewichtslage unter Verwendung des Eingangs  $u$  als Stellgröße lokal zu stabilisieren.

Es gibt  $\bar{m}$  unabhängige Komponenten von  $y$ , die nicht  $\tilde{y}^0$  angehören, nämlich  $v^0$ . Um eine einheitliche Darstellung aller Entwurfsschritte zu erreichen, sei außerdem  $x^0 = \tilde{y}^0$ . Für eine Stabilisierung der Ruhelage  $y = 0$  ergibt sich  $v^0 = 0$ .

In Schritt 0 wird eine in einer Umgebung von  $x^0 = 0$  (lokal) positiv definite Funktion  $V_0$  gewählt, beispielsweise

$$V_0(x^0) = \frac{1}{2} (x^0)^T x^0.$$

Die Zeitableitung von  $V_0$  entlang der Lösung lautet dann

$$\dot{V}_0 = DV_0(x^0) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{y}^1 \\ v^1 \end{pmatrix} = (x^0)^T \begin{pmatrix} \tilde{y}^1 \\ v^1 \end{pmatrix}.$$

Durch Wahl (beispielsweise<sup>8</sup>) von

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}^1 \\ v^1 \end{pmatrix} = (a_0(x^0), b_0(x^0)) \cdot x^0 = \begin{pmatrix} \alpha_0(x^0) \\ \beta_0(x^0) \end{pmatrix}, \quad (16)$$

wobei  $P_0 = (a_0, b_0)$  eine positiv definite (reellwertige) Matrixfunktion ist, wird dann

$$\dot{V}_0 = (x^0)^T \begin{pmatrix} \alpha_0(x^0) \\ \beta_0(x^0) \end{pmatrix} = - (x^0)^T P_0(x^0) \cdot x^0$$

entlang den Trajektorien negativ definit. Durch diese Wahl wird eine Rückführung  $v^1 = \beta_0(x^0)$  definiert.

Wählt man  $a_0$  und  $b_0$  konstant, so ergibt sich eine lineare Fehlerdynamik. Je nach der Natur des Systems können aber andere Ansätze für  $V_0$  und eine alternative Wahl der Zeitableitung von  $V_0$  sinnvoll sein.

In Schritt<sup>9</sup> 1 sei der Übersichtlichkeit halber  $x^1 = (\tilde{y}^0, \tilde{y}^1)$ . Man beachte, dass das im vorigen Schritt eingeführte Regelgesetz  $v^1 = \beta_0(x^0)$  realisiert wird, das fiktive Regelgesetz  $\tilde{y}^1 = \alpha_0(x^0)$  dagegen nur asymptotisch erreicht. Deshalb wird – wie in Abschnitt 4.1 und unter Beibehaltung der Notation – das Maß  $z^1 = \tilde{y}^1 - \alpha_0(x^0)$  für den Fehler eingeführt. Damit kann

$$V_1(x^1) = V_0(x^0) + \frac{1}{2} (\tilde{y}^1 - \alpha_0(x^0))^T (\tilde{y}^1 - \alpha_0(x^0))$$

definiert werden. Die Zeitableitung von  $V_1$  entlang der Lösung des Teilsystems mit dem verallgemeinerten Zustand  $x^1$  (mit dem Fehler  $z^1$ !) genügt

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= DV_0(x^0) \cdot \begin{pmatrix} \tilde{y}^1 \\ v^1 \end{pmatrix} \\ &+ (\tilde{y}^1 - \alpha_0(x^0))^T \left( \begin{pmatrix} \tilde{y}^2 \\ v^2 \end{pmatrix} - D\alpha_0(x^0) \cdot \dot{x}^0 \right) \\ &= DV_0(x^0) \cdot (z^1 + \alpha_0(x^0), v^1)^T \\ &+ (z^1)^T \left( \begin{pmatrix} \tilde{y}^2 \\ v^2 \end{pmatrix} - D\alpha_0(x^0) \cdot \dot{x}^0 \right) \\ &= DV_0(x^0) \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0(x^0) \\ \beta_0(x^0) \end{pmatrix} + DV_0(x^0) \cdot \begin{pmatrix} z^1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ (z^1)^T \left( \begin{pmatrix} \tilde{y}^2 \\ v^2 \end{pmatrix} - D\alpha_0(x^0) \cdot \dot{x}^0 \right). \end{aligned}$$

Nun kann eine (für  $\tilde{y}^2$  fiktive) Zustandsrückführung definiert werden, die dafür sorgt, dass  $\dot{V}_1$  negativ definit wird. Der erste Summand der letzten rechten Gleichungsseite ist aber aufgrund des Entwurfs aus Schritt 0 negativ ( $x^0 = \tilde{y}^0$ ). Analog zu oben (in (16)) sei deshalb jetzt

$$\begin{aligned} \left[ DV_0(x^0) \cdot \begin{pmatrix} z^1 \\ 0 \end{pmatrix} + (z^1)^T \left( \begin{pmatrix} \tilde{y}^2 \\ v^2 \end{pmatrix} - D\alpha_0(x^0) \cdot \dot{x}^0 \right) \right] = \\ - (z^1)^T P_1(x^1) \cdot z^1, \end{aligned}$$

<sup>8</sup> Man kann entsprechend mit einer beliebigen, positiv definiten, von  $x^0$  abhängigen Funktion  $V_0$  für die Ableitung  $\dot{V}_0 = -DV_0(x^0) \cdot P_0(x^0) \cdot DV_0^T(x^0)$  wählen, und analog können auch in den folgenden Schritten Verallgemeinerungen vorgenommen werden.

<sup>9</sup> Im Prinzip könnte gleich der allgemeine Schritt  $k > 0$  angegeben werden, eine detaillierte Erörterung der Schritte 1 und 2 dient aber der Verständlichkeit.

wobei  $P_1$  eine positiv definite (reellwertige) Matrixfunktion ist. Nach Aufspalten von  $DV_0$  in seine ersten  $r_1$  und die verbleibenden  $r_0 - r_1$  Komponenten gemäß

$$DV_0 = ((DV_0)_1, (DV_0)_2)$$

kann nach  $(\tilde{y}^2, v^2)$  aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{y}^2 \\ v^2 \end{pmatrix} &= -(DV_0)_1^T(x^0) - P_1(x^1) \cdot (\tilde{y}^1 - \alpha_0(x^0)) \\ &+ D\alpha_0(x^0) \cdot \dot{x}^0 = \begin{pmatrix} \alpha_1(x^1) \\ \beta_1(x^1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

In Schritt 2 wird das Maß  $z^2 = \tilde{y}^2 - \alpha_1(x^1)$  für den Fehler bei der (asymptotischen) Realisierung des fiktiven Teils des Regelgesetzes verwendet. Es wird  $x^1 = (\tilde{y}_z^0, \tilde{y}_z^1, \tilde{y}_v^0, \tilde{y}_v^1)$  definiert, sowie  $\dot{x}^1 = (\tilde{y}^1, \tilde{y}^2, v^1, v^2)^T$ . Damit kann

$$V_2(x^2) = V_1(x^1) + \frac{1}{2} (\tilde{y}^2 - \alpha_1(x^1))^T (\tilde{y}^2 - \alpha_1(x^1))$$

definiert werden, und man erhält

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= DV_1(x^1) \cdot \dot{x}^1 \\ &+ (\tilde{y}^2 - \alpha_1(x^1))^T \left( \begin{pmatrix} \tilde{y}^3 \\ v^3 \end{pmatrix} - D\alpha_1(x^1) \cdot \dot{x}^1 \right) \\ &= DV_1(x^1) \cdot (z^1 + \alpha_0(x^0), z^2 + \alpha_1(x^1), v^1, v^2)^T \\ &+ (z^2)^T \left( \begin{pmatrix} \tilde{y}^3 \\ v^3 \end{pmatrix} - D\alpha_1(x^1) \cdot \dot{x}^1 \right) \\ &= DV_1(x^1) \cdot (\tilde{y}^1, \alpha_1(x^1), \beta_0(x^0), \beta_1(x^1))^T \\ &+ DV_1(x^1) \cdot (0, z^2, 0, 0)^T \\ &+ (z^2)^T \left( \begin{pmatrix} \tilde{y}^3 \\ v^3 \end{pmatrix} - D\alpha_1(x^1) \cdot \dot{x}^1 \right). \end{aligned}$$

Erneut kann eine (für  $\tilde{y}^2$  fiktive) Zustandsrückführung definiert werden, die dafür sorgt, dass  $\dot{V}_2$  negativ definit wird. Der erste Summand der letzten rechten Gleichungsseite ist auch hier aufgrund des vorangegangenen Entwurfsschritts negativ. Man kann deshalb

$$\begin{aligned} \left[ DV_1(x^1) \cdot (0, z^2, 0, 0)^T + (z^2)^T \left( \begin{pmatrix} \tilde{y}^3 \\ v^3 \end{pmatrix} - D\alpha_1(x^1) \cdot \dot{x}^1 \right) \right] \\ = - (z^2)^T P_2(x^2) \cdot z^2, \end{aligned}$$

mit  $x^2 = (\tilde{y}_z^0, \tilde{y}_z^1, \tilde{y}_z^2, \tilde{y}_v^0, \tilde{y}_v^1, \tilde{y}_v^2)$  und mit einer positiven (reellwertigen) Matrixfunktion  $P_2$  wählen, um dafür zu sorgen, dass die Ableitung von  $V_2$  negativ definit wird. Nach Aufspalten von  $DV_1$  in drei Teile der Längen  $r_1, r_2$  und  $r_0 - r_2$  entsprechend

$$DV_1 = ((DV_1)_1, (DV_1)_2, (DV_1)_3)$$

kann nach  $(\tilde{y}^3, v^3)$  aufgelöst werden:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{y}^3 \\ v^3 \end{pmatrix} &= -(DV_1)_2^T(x^1) + D\alpha_1(x^1) \cdot \dot{x}^1 \\ &- P_2(x^2) \cdot (\tilde{y}^2 - \alpha_1(x^1)) = \begin{pmatrix} \alpha_2(x^2) \\ \beta_2(x^2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun wird der allgemeine Schritt  $k > 2$  betrachtet. Für eine übersichtliche Darstellung lohnt es sich dabei  $\tilde{y}^k$  aufzuteilen: in einen Teil  $\tilde{y}_z^k$ , der  $r_{k+1}$  Komponenten enthält, deren Zeitableitungen gleich  $\tilde{y}^{k+1}$  sind, und in einen zweiten Teil  $\tilde{y}_v^k$  mit den restlichen  $r_k - r_{k+1}$  Komponenten, deren Zeitableitungen die neuen Eingangsgrößen  $v^{k+1}$  sind. Damit seien dann

$$x^k = (\tilde{y}_z^0, \dots, \tilde{y}_z^k, \tilde{y}_v^0, \dots, \tilde{y}_v^k)$$

$$\dot{x}^k = (\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{k+1}, v^1, \dots, v^{k+1})^T,$$

und

$$z^k = \tilde{y}^k - \alpha_{k-1}(x^{k-1})$$

sei das Maß für den Fehler bei der (asymptotischen) Realisierung des fiktiven Teils des Regelgesetzes.

Die Funktion  $V_k$  sei durch

$$V_k(x^k) = V_{k-1}(x^{k-1}) + \frac{1}{2}(\tilde{y}^k - \alpha_{k-1}(x^{k-1}))^T (\tilde{y}^k - \alpha_{k-1}(x^{k-1}))$$

definiert.

Damit ergibt sich für die Zeitableitung entlang den Trajektorien des Teilsystems<sup>10</sup>

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= DV_{k-1} \cdot \dot{x}^{k-1} \\ &+ (\tilde{y}^k - \alpha_{k-1})^T \left( \begin{pmatrix} \tilde{y}^{k+1} \\ v^{k+1} \end{pmatrix} - D\alpha_{k-1} \cdot \dot{x}^{k-1} \right) \\ &= DV_{k-1} \cdot (z^1 + \alpha_0, \dots, z^k + \alpha_{k-1}, v^1, \dots, v^k)^T \\ &+ (z^k)^T \left( \begin{pmatrix} \tilde{y}^{k+1} \\ v^{k+1} \end{pmatrix} - D\alpha_{k-1} \cdot \dot{x}^{k-1} \right) \\ &= DV_{k-1} \cdot (\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^{k-1}, \alpha_{k-1}, \beta_0, \dots, \beta_{k-1})^T \\ &+ DV_{k-1} \cdot (0, \dots, 0, z^k, 0, \dots, 0)^T \\ &+ (z^k)^T \left( \begin{pmatrix} \tilde{y}^{k+1} \\ v^{k+1} \end{pmatrix} - D\alpha_{k-1} \cdot \dot{x}^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Wieder ist der erste Summand der letzten rechten Gleichungsseite aufgrund des vorangegangenen Entwurfschritts negativ. Also kann erneut eine (für  $\tilde{y}^k$  fiktive) Zustandsrückführung definiert werden, die dafür sorgt, dass  $\dot{V}_k$  negativ wird. Sei dazu

$$\begin{aligned} &\left[ DV_{k-1} \cdot (0, \dots, 0, z^k, 0, \dots, 0)^T \right. \\ &\left. + (z^k)^T \left( \begin{pmatrix} \tilde{y}^{k+1} \\ v^{k+1} \end{pmatrix} - D\alpha_{k-1} \cdot \dot{x}^{k-1} \right) \right] = \\ &- (z^k)^T P_k(x^k) \cdot z^k, \end{aligned}$$

mit einer positiven (reellwertigen) Matrixfunktion  $P_k$ . Nach Aufspalten von  $DV_{k-1}$  in drei Teile der Längen  $r_1 + r_2 + \dots + r_{k-1}$ ,  $r_k$  und  $r_0 - r_k$  gemäß

$$DV_{k-1} = ((DV_{k-1})_1, (DV_{k-1})_2, (DV_{k-1})_3)$$

kann nach  $(\tilde{y}^{k+1}, v^{k+1})$  aufgelöst werden:

<sup>10</sup> Um die Lesbarkeit aufrechtzuerhalten, wird auf das Angeben der Argumente der involvierten Funktionen verzichtet.

$$\begin{pmatrix} \tilde{y}^{k+1} \\ v^{k+1} \end{pmatrix} = -(DV_{k-1})_2^T + D\alpha_{k-1} \cdot \dot{x}^{k-1} - P_k \cdot (\tilde{y}^k - \alpha_{k-1}) = \begin{pmatrix} \alpha_k(x^k) \\ \beta_k(x^k) \end{pmatrix}.$$

Im letzten Schritt ( $k_*$ ) sind  $\tilde{y}_z^{k_*}$  und  $\tilde{y}_v^{k_*+1}$  leer, d. h. es wird kein fiktiver Teil des Regelgesetzes mehr eingeführt, und  $x^{k_*} = x$ .

Die Definition des für den (neuen) Eingang  $v$  eingeführten Rückführgesetzes kann nun zusammengefasst werden:

$$v = (v^0, v^1, \dots, v^{k_*+1}) = (0, \beta_0(x^0), \dots, \beta_{k_*}(x^{k_*})).$$

Für diesen Eingang gilt völlig analog zu jenem in Abschnitt 3.4:  $v_j = y_j^{(k_j)}$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Folglich kann man auch eine Gleichung für das Regelgesetz in der Form (13) jederzeit bestimmen. Darin werden die Zeitableitungen von  $v$  durch Funktionen von  $x$  ersetzt, und es resultiert schließlich eine (konventionelle) statische Rückführung des Zustands des geschlossenen Regelkreises der Form  $u = \alpha(x)$ .

Anstelle eines Brunovský-Zustands kann man auch einen wie in (11) über eine (beliebige) klassische Zustandstransformation mit Dreieck-Struktur definierten (verallgemeinerten) Zustand  $\xi$  verwenden. In Schritt  $k$  kann man damit  $x^k = (\xi_z^0, \dots, \xi_z^k, \xi_v^0, \dots, \xi_v^k)$  und

$$\dot{x}^k = \begin{pmatrix} \varphi^1(x^0, \xi^1) \\ \vdots \\ \varphi^{k+1}(x^k, \xi^{k+1}) \\ \psi^1(x^0, \tilde{v}^1) \\ \vdots \\ \psi^{k+1}(x^k, \tilde{v}^{k+1}, \tilde{v}^k, \tilde{v}^k, \dots, \tilde{v}^1, \dots, (\tilde{v}^1)^{(k)}) \end{pmatrix}$$

definieren, wobei für die sich in Schritt  $k$  aus den Ableitungen ergebenden Funktionen  $\varphi^{k+1}$  und  $\psi^{k+1}$  jeweils  $D_2\varphi^{k+1}$  und  $D_2\psi^{k+1}$  regulär sind. Dabei hat man eine gewisse Freiheit bei der Definition von  $\tilde{v}^k$ .

Außerdem führt man dann für  $k > 0$

$$z^k = \xi^k - \alpha_{k-1}(x^{k-1})$$

ein. Damit ergibt sich für die Zeitableitung entlang den Trajektorien des Teilsystems ( $k > 0$ )

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= DV_{k-1} \cdot \dot{x}^{k-1} \\ &+ (\xi^k - \alpha_{k-1})^T \left( \begin{pmatrix} \varphi^{k+1} \\ \psi^{k+1} \end{pmatrix} - D\alpha_{k-1} \cdot \dot{x}^{k-1} \right) \\ &= DV_{k-1} \cdot (\varphi^1(x^0, \xi^1), \dots, \varphi^{k-1}(x^{k-2}, \xi^{k-1}), \\ &\quad \varphi^k(x^{k-1}, \alpha_{k-1}), \beta_0, \dots, \beta_{k-1})^T \\ &+ DV_{k-1} \cdot (0, \dots, 0, R^k(x^{k-1}, z^k) \cdot z^k, 0, \dots, 0)^T \\ &+ (z^k)^T \left( \begin{pmatrix} \varphi^{k+1}(x^k, \xi^{k+1}) \\ \psi^{k+1}(\dots, \tilde{v}^{k+1}, \dots) \end{pmatrix} - D\alpha_{k-1} \cdot \dot{x}^{k-1} \right). \end{aligned}$$

Da bei der Umrechnung von  $DV_{k-1} \cdot \dot{x}^{k-1}$  die Funktionen  $\varphi^k$  nicht unbedingt affin in den fiktiven Stellgrößen  $\xi^k$  sind,



wird hier zur Bestimmung von  $R^k$  im Allgemeinen die Formel (15) benötigt. Wie zuvor wird durch die Wahl einer negativ definiten Funktion für  $\dot{V}_k$  das Verhalten des Regelkreises festgelegt. Am Ende kann nach  $u$  als Funktion von  $\xi$ , sowie  $\dot{v}$  und dessen Zeitableitungen aufgelöst werden, denn (11) definiert eine klassische Zustandstransformation.

Insgesamt werden durch die Wahl des Brunovský-Zustands oder des Zustands  $\xi$  zwar die „Teilsystemdimensionen“ festgelegt, aber bei der Wahl der Funktionen  $V_k$  und deren Ableitungen bleibt die volle Freiheit des Entwurfs.

### 5 Beispiel Brückenkran

Als illustratives Beispiel möge der in Bild 1 dargestellte Kran dienen [8;9], wobei zur Vereinfachung nur die Bewegung in einer vertikalen Ebene betrachtet wird.

Die Laufkatze hat die Masse  $M$ , und ihre Position auf der Horizontalen ( $X$ -Richtung) ist  $D_x$ ; sie wird durch die horizontal wirkende Stellkraft  $F$  bewegt. Die Last wird als Punktmasse  $m$  modelliert. Sie ist an einem Kabel der variablen Länge  $R$  befestigt, das mit der Vertikalen ( $Y$ -Richtung) den Winkel  $\theta$  bildet. Es wird angenommen, das Kabel sei stets gespannt (d.h. die Kraft  $T$  im Seil ist stets positiv) und von vernachlässigbar geringer Masse; seine Dehnung und Verbiegung seien ebenfalls vernachlässigbar. Dieses Kabel wird auf einer Trommel mit dem Trägheitsmoment  $J$  und dem Radius  $\rho$  aufgerollt. Der Trommelmotor erzeugt das Stellmoment  $C$ , wodurch sich die Trommel mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  dreht. Schließlich bezeichnen  $g$  die Erdbeschleunigung und  $(X, Y)$  die Position der Last in den kartesischen Koordinaten.

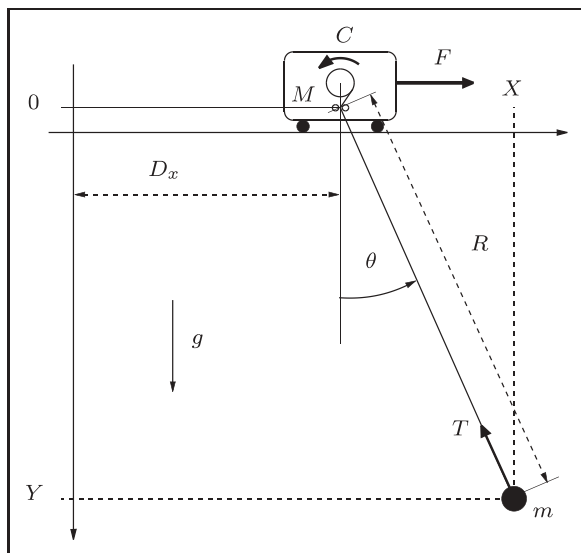


Bild 1: Verladekran in einer vertikalen Ebene.

#### 5.1 Mathematisches Modell

Unter diesen Annahmen kann man bei Verwendung der Systemgrößen  $X, Y, D_x, R, \theta$  und  $\omega$  folgende Modellgleichungen ableiten:

$$m\ddot{X} = -T \sin \theta \tag{17a}$$

$$m\ddot{Y} = -T \cos \theta + mg \tag{17b}$$

$$X = R \sin \theta + D_x \tag{17c}$$

$$Y = R \cos \theta \tag{17d}$$

$$M\ddot{D}_x = F + T \sin \theta - c_d \dot{D}_x \tag{17e}$$

$$J\dot{\omega} = C - \rho T - c_r \omega \tag{17f}$$

$$\dot{R} = -\rho \omega. \tag{17g}$$

Die Gln. (17a)–(17d) beschreiben die Pendelbewegung der Last, die übrigen die Dynamik von Katze und Trommel.

Durch Elimination der Kraft  $T$  und des Winkels  $\theta$  aus (17a)–(17d) erhält man das äquivalente, implizite Modell des „Pendel-Teilsystems“:

$$(\ddot{Y} - g)(X - D_x) = \ddot{X}Y \tag{18a}$$

$$(X - D_x)^2 + Y^2 = R^2. \tag{18b}$$

#### 5.2 Differentielle Flachheit

Man kann nun leicht einen flachen Ausgang des Pendel-Teilsystems (18) erkennen: die Position der Last  $(X, Y)$ . Tatsächlich können sämtliche Systemgrößen durch  $(X, Y)$  ausgedrückt werden. Für  $D_x$  ergibt sich unmittelbar aus (18a):

$$D_x = X - \frac{\ddot{X}Y}{\ddot{Y} - g} \tag{19}$$

und damit aus der Kreisgleichung (18b)

$$R^2 = Y^2 + \left( \frac{\ddot{X}Y}{\ddot{Y} - g} \right)^2. \tag{20}$$

Dasselbe gilt für das Gesamtsystem (17), denn für die Größen  $\theta, \omega$  und  $T$  gilt

$$\theta = \arcsin \left( \frac{X - D_x}{R} \right), \quad \omega = \frac{\dot{R}}{\rho}, \quad T = \frac{mR(g - \ddot{Y})}{Y}.$$

Diese Beziehungen kann man in (17e) und (17f) einsetzen und nach der Kraft  $F$  bzw. dem Moment  $C$  auflösen.

Das System (18) besteht aus zwei (unabhängigen<sup>11</sup>) Dgln. in vier Unbekannten. Daraus folgt, dass ein flacher Ausgang dieses Systems (sofern ein solcher existiert) aus zwei Komponenten bestehen muss. Folglich stellen die Koordinaten  $y = (X, Y)$  der Last einen flachen Ausgang dar.

#### 5.3 Brunovský-Zustand

Für das durch Gl. (18) beschriebene Pendel-Teilsystem des Brückenkrans sieht man unmittelbar, dass  $u = (R, D_x)$  einen Eingang im Sinne von Abschnitt 3.1 darstellt: Ist  $u = (R, D_x)$  bekannt, so sind die übrigen Größen  $X$  und  $Y$  durch die Dgln. (18) bestimmt.

<sup>11</sup>D.h. es kann nicht die eine der Gln. aus der anderen abgeleitet werden. Dies ist unmittelbar klar, denn  $R$  tritt nur in Gl. (18b) auf.

Gleichzeitig ist damit  $u$  differentiell unabhängig, denn es hat zwei Komponenten. Man kann tatsächlich – wie in der Bedingung (III) für einen Eingang gefordert – jeweils eine Dgl. nur in  $X$  und  $u$  bzw. nur in  $Y$  und  $u$  ableiten, worauf hier aber verzichtet wird. Für das Gesamtsystem stellt entsprechend  $(F, C)$  einen Eingang dar.

Für das Teilsystem (18) kann bei Verwendung des Eingangs  $u = (D_x, R)$  ein (verallgemeinerter) Zustand der Dimension 2 eingeführt werden. Er kann wegen der Beziehung (18b) nicht beide Komponenten des flachen Ausgangs enthalten. Eine mögliche Wahl für einen Brunovský-Zustand (entsprechend (10)) ist damit  $x = (X, \dot{X})$ , eine andere  $\bar{x} = (Y, \dot{Y})$ . Die Herleitung der dazugehörigen verallgemeinerten Regelungsform ist aufwendig – und unnötig.

Für das Gesamtsystem mit dem Eingang  $(F, C)$  ergibt sich ein Brunovský-Zustand  $(X, \dot{X}, \ddot{X}, X^{(3)}, Y, \dot{Y})$  – hier kann der flache Ausgang  $y$  im Zustand enthalten sein, denn es wird ein anderer Eingang betrachtet!

## 5.4 Stabilisierung und Folgeregelung

Es soll nun dem in Abschnitt 4.2 beschriebenen Vorgehen entsprechend ein Reglerentwurf für den Brückenkran durchgeführt werden, wobei vom flachen Ausgang  $y = (X, Y)$  ausgegangen wird. Allerdings ist es hier nicht sinnvoll, das System in  $y = 0$  zu stabilisieren; es wird daher der alternative flache Ausgang  $\bar{y} = (X - X_r, Y - Y_r)$  mit der Referenztrajektorie  $t \mapsto y_r(t) = (X_r(t), Y_r(t)) \in \mathbb{R}^2$  zugrundegelegt. Offensichtlich kann man  $\bar{y}$  als Folgefehler interpretieren<sup>12</sup>.

Im Schritt 0 wird ein neuer Eingang  $v^0 = Y - Y_r$  eingeführt<sup>13</sup>, außerdem  $x^0 = X - X_r$  und  $V_0 = (X - X_r)^2/2$ . Man kann

$$\dot{V}_0 = (X - X_r) (\dot{X} - \dot{X}_r) = -p_0(X - X_r)^2$$

mit  $p_0 > 0$  wählen. Da  $\bar{y}^1 = \dot{X} - \dot{X}_r$  Teil des Brunovský-Zustands bezüglich  $u$  ist, wird so nur eine fiktive Rückführung  $\bar{y}^1 = \alpha_0(x^0) = -p_0(X - X_r)$  definiert.

Für Schritt 1 wird nun der Fehler

$$z^1 = \bar{y}^1 - \alpha_0(x^0) = (\dot{X} - \dot{X}_r) + p_0(X - X_r)$$

eingeführt. Sei zudem  $V_1 = V_0 + (z^1)^2/2$ , dann lautet die Ableitung

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= (X - X_r) (\dot{X} - \dot{X}_r) + z^1 \dot{z}^1 \\ &= (X - X_r) (z^1 - p_0(X - X_r)) \\ &\quad + z^1 \left[ (\ddot{X} - \ddot{X}_r) + p_0(\dot{X} - \dot{X}_r) \right] \\ &= -p_0(X - X_r)^2 \\ &\quad + z^1 \left[ (X - X_r) + p_0(\dot{X} - \dot{X}_r) + (\ddot{X} - \ddot{X}_r) \right]. \end{aligned}$$

<sup>12</sup> Als ein Beispiel für eine alternative Definition des Folgefehlers sei auf die Verwendung eines bewegten Koordinatensystems in [18] für den in einer zusätzlichen horizontalen Richtung bewegten Kran hingewiesen.

<sup>13</sup> Man könnte hier auch  $v^0 = X - X_r$  einführen. Dass dies weniger sinnvoll ist, zeigt sich, wenn man eine zusätzliche horizontale Bewegungsrichtung für die Katze einführt (vergleiche [4; 18]).

Setzt man diese gleich

$$-p_0(X - X_r)^2 - p_1(z^1)^2$$

mit  $p_1 > 0$ , so kann man nach der neuen Eingangsgröße  $v^2 = (\ddot{X} - \ddot{X}_r)$  auflösen:

$$v^2 = -(p_1 + p_0) (\ddot{X} - \ddot{X}_r) - (p_1 p_0 + 1)(X - X_r). \quad (21)$$

Diese Gleichung kann nun zusammen mit  $v^0 = Y - Y_r$  als Definition einer quasi-statischen Rückführung des verallgemeinerten Zustands  $(X - X_r, \dot{X} - \dot{X}_r)$  aufgefasst werden. Das Regelgesetz für den Eingang  $u = (D_x, R)$  ergibt sich damit aus den Gleichungen (19) und (20), indem man darin  $Y$  durch  $v^0 + Y_r$ , entsprechend  $\ddot{Y}$  durch  $\ddot{v}^0 + \ddot{Y}_r$ , sowie  $\ddot{X}$  durch  $v^2 + \ddot{X}_r$  ersetzt:

$$D_x = X - \frac{(v^2 + \ddot{X}_r)(v^0 + Y_r)}{(\ddot{v}^0 + \ddot{Y}_r) - g} \quad (22a)$$

$$R = \left[ (v^0 + Y_r)^2 + \left( \frac{(v^2 + \ddot{X}_r)(v^0 + Y_r)}{(\ddot{v}^0 + \ddot{Y}_r) - g} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (22b)$$

Da der Entwurf für den Folgefehler  $\bar{y}$  durchgeführt wurde, ergibt sich die stabilisierende Folgeregelung hier direkt durch die Wahl von  $(v^0, v^2) = (0, 0)$ . Wegen der Wahl quadratischer Formen für die Lyapunov-Funktionen und ihre Ableitungen erhält man eine lineare Fehlerdynamik – man vergleiche diese Herleitung mit jener in [4].

Die so berechneten Trajektorien für  $D_x$  und  $R$  können als Führungsgrößen auf die Regler für die Katze und die Kalebeltrommel aufgeschaltet werden, wodurch sich eine Kaskadenstruktur mit Vorsteuerung ergibt [8; 9; 17].

Alternativ kann der Entwurf durch weitere Berücksichtigung von Integratoren fortgesetzt werden. Als Beispiel sei dazu hier  $(D_x, C)$  als Eingang betrachtet. Nun kann die im Schritt 0 entworfene Rückführung  $v^0$  nicht mehr realisiert werden, und entsprechend muss  $x^0$  um  $Y - Y_r$  ergänzt werden. Mit  $\tilde{V}_0 = V_0 + (Y - Y_r)^2/2$  kann man beispielsweise

$$\dot{\tilde{V}}_0 = -p_0(X - X_r)^2 - q_0(Y - Y_r)^2$$

mit  $p_0, q_0 > 0$  wählen. Im nächsten Schritt muss jetzt  $z^1$  um ein Maß  $\tilde{z}^1 = (\dot{Y} - \dot{Y}_r) + q_0(Y - Y_r)$  für den bei der Realisierung der fiktiven Rückführung entstehenden Fehler ergänzt werden. In Erweiterung des obigen Entwurfs können hier einfach

$$\tilde{V}_1 = V_1 + (\tilde{z}^1)^2/2$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{V}}_1 &= \dot{V}_1 + \tilde{z}^1 \left[ (\ddot{Y} - \ddot{Y}_r) + q_0(\dot{Y} - \dot{Y}_r) \right] \\ &= -p_0(X - X_r)^2 - p_1(z^1)^2 - q_0(Y - Y_r)^2 - q_1(\tilde{z}^1)^2 \end{aligned}$$

gewählt werden, was auf eine Entkopplung der Regelkreise für  $X$  und  $Y$  führt. Man kann nun  $\tilde{v}^2 = \ddot{Y} - \ddot{Y}_r$  einführen

und erhält in Ergänzung des Regelgesetzes (21) (und diesem völlig entsprechend)

$$\dot{v}^2 = -(q_1 + q_0) (\dot{Y} - \dot{Y}_r) - (q_1 q_0 + 1)(Y - Y_r).$$

Nun kann man in (22)  $v^0$  durch  $Y - Y_r$ , sowie  $\dot{v}^0$  durch  $\dot{v}^2$  ersetzen. Nach zweimaliger Ableitung von (22b) und konsequentem Ersetzen von  $v^0$  durch  $Y - Y_r$ ,  $\dot{v}^0$  durch  $\dot{Y} - \dot{Y}_r$ , sowie  $\ddot{v}^0$  durch  $\ddot{v}^2$ ,  $(v^0)^{(3)}$  durch  $\dot{v}^2$  und  $(v^0)^{(4)}$  durch  $\ddot{v}^2$ , erhält man schließlich die Gleichung für  $C$  aus (17g), (17f) und  $T = mR(g - \ddot{v}^2 - \ddot{Y}_r)/Y$ . Dazu berechnet man die Ableitungen rekursiv:

$$\dot{\ddot{v}}^2 = -(q_1 + q_0)\ddot{v}^2 - (q_1 q_0 + 1) (\dot{Y} - \dot{Y}_r)$$

$$\ddot{\ddot{v}}^2 = -(q_1 + q_0)\dot{\ddot{v}}^2 - (q_1 q_0 + 1)\ddot{v}^2.$$

Die Erweiterung um zwei zusätzliche Integratoren mit den Zustandsgrößen  $\dot{X}$  und  $X^{(3)}$  bei Verwendung des Eingangs  $(F, C)$  kann ganz entsprechend vorgenommen werden.

## 6 Schlussfolgerung

Für differentiell flache Systeme kann der rekursive Entwurf stabiler Regelkreise systematisiert werden, indem quasi-statische Rückführungen von verallgemeinerten Zuständen verwendet werden. Dies klärt die (dimensionelle) Struktur der Regelkreise, lässt aber zugleich die volle Freiheit (und „die Qual“) der Wahl der Fehlerdynamik. Beim hier diskutierten Verfahren auf der Basis der sukzessiven Berücksichtigung von Integratoren bedeutet das die Wahl der verwendeten Lyapunov-Funktionen und ihrer Ableitungen. Das Ergebnis des Entwurfs sind auch im Fall mehrerer Eingangsgrößen stets Regelkreise deren Zustandsdimension mit der des Regelstreckenmodells übereinstimmt. Am Beispiel des Brückenkrans wird deutlich wie auch implizite Systeme behandelt werden können, wie die Methode zum Entwurf einer Folgeregelung verwendet werden kann und wie Regler für „äußere Regelkreise“ einer Kaskadenstruktur „nach innen“ erweitert werden können.

## Literatur

- [1] *Delaleau, E.* und *M. Fliess*: An algebraic interpretation of the structure algorithm with an application to feedback decoupling. In *Fliess, M.* (Hg.): Nonlinear Control Systems Design 1992, Selected papers from the 2nd IFAC symposium, S. 179–184. Pergamon Press, Oxford, 1993.
- [2] *Delaleau, E.* und *W. Respondek*: Lowering the orders of derivatives of controls in generalized state space systems. *J. Math. Systems Estim. Control*, 5:1–27, 1995. (Summary: 375–378).
- [3] *Delaleau, E.* und *J. Rudolph*: Decoupling and Linearization by Quasi-Static Feedback of Generalized States. In Proc. 3rd European Control Conference, S. 1069–1074, 1995.
- [4] *Delaleau, E.* und *J. Rudolph*: Control of Flat Systems by Quasi-Static Feedback of Generalized States. *Internat. J. Control*, 71:745–765, 1998.
- [5] *Delaleau, E.* und *P. S. Pereira da Silva*: Filtrations in feedback synthesis: Part I – Systems and feedbacks. *Forum Math.*, 10:147–174, 1998.
- [6] *Fliess, M.*: Automatique et corps différentiels. *Forum Math.*, 1:227–238, 1989.
- [7] *Fliess, M.*: Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics. *IEEE Trans. Automat. Control*, AC-35:994–1001, 1990.
- [8] *Fliess, M., J. Lévine, Ph. Martin* und *P. Rouchon*: Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *Internat. J. Control*, 61:1327–1361, 1995.
- [9] *Fliess, M., J. Lévine* und *P. Rouchon*: Generalized state variable representation for a simplified crane description. *Internat. J. Control*, 58:277–283, 1993.
- [10] *Hagenmeyer, V.* und *E. Delaleau*: Robustness analysis of exact feedforward linearization based on differential flatness. *Automatica J. IFAC*, 39:1941–1946, 2003.
- [11] *Krstić, M., I. Kannellakopoulos* und *P. Kokotović*: Nonlinear and adaptive control. John Wiley & Sons, New York, 1995.
- [12] *Martin, P., R. M. Murray* und *P. Rouchon*: Flat systems. In *Bastin, G.* und *M. Gevers* (Hg.): Plenary Lectures and Mini-Courses, 4th European Control Conference, Brussels, Belgium, S. 211–264. 1997.
- [13] *Martin, Ph., P. Rouchon* und *J. Rudolph*: Invariant Tracking. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 3:1–13, 2004.
- [14] *Rothfuss, R., J. Rudolph* und *M. Zeitz*: Flatness Based Control of a Nonlinear Chemical Reactor Model. *Automatica J. IFAC*, 32:1433–1439, 1996.
- [15] *Rothfuß, R., J. Rudolph* und *M. Zeitz*: Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme. at – Automatisierungstechnik, 45:517–525, 1997.
- [16] *Rouchon, P.* und *J. Rudolph*: Invariant tracking and stabilization. In *Aeyels, D., F. Lamnabhi-Lagarigue* und *A. van der Schaft* (Hg.): Stability and Stabilization of Nonlinear Systems, Bd. 246 der Reihe Lecture Notes in Control and Inform. Sci., Kap. 14, S. 261–273. Springer-Verlag, 1999.
- [17] *Rudolph, J.*: Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension. Shaker Verlag, 2003.
- [18] *Rudolph, J.*: Examples for the use of invariant errors in nonlinear control. In Proc. 48. Wissenschaftliches Kolloquium, Technische Universität Ilmenau. 2003. (CDROM).
- [19] *Rudolph, J.* und *E. Delaleau*: Some examples and remarks on quasi-static feedback of generalized states. *Automatica J. IFAC*, 34:993–999, 1998.
- [20] *Schwartz, B., A. Isidori* und *T.J. Tarn*: Global normal forms for MIMO nonlinear systems, with applications to stabilization and disturbance attenuation. *Math. Control Signals Systems*, 12:121–142, 1999.

Manuskripteingang: 13. Januar 2004.



**PD Dr.-Ing. habil. Joachim Rudolph** ist am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie (Prof. K. Reinschke) der TU Dresden tätig. Hauptarbeitsgebiete: Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Regelstrecken, algebraische Methoden, lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme; Anwendungen in der Mechatronik und der Verfahrenstechnik.

Adresse: Technische Universität Dresden, Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, 01062 Dresden, E-Mail: rudolph@erss11.et.tu-dresden.de