

Zur Regelung einer elektromagnetisch gelagerten Spindel

On the Control of an Electromagnetically Levitated Spindle

Joachim Rudolph, Frank Woittennek, Johannes von Löwis, Technische Universität Dresden

Für ein Starrkörpermodell einer elektromagnetisch gelagerten Spindel wird eine nichtlineare Regelung vorgeschlagen. Für die Bewegung der Spindel auf einer vorgeschriebenen Bahn erweist sich eine stabilisierende Folgeregelung auf der Basis der Flachheit des Systems als eine interessante Alternative zum klassischen Zugang der Linearisierung um einen Arbeitspunkt. Ein Beobachter gestattet die Adaptation an konstante und an harmonische Störungen, wie sie als Folge der Restunwucht auftreten. Für eine Realisierung auf einem Digitalrechner können mit einer geeigneten Diskretisierung von Regler und Beobachter auch bei relativ langen Abtastzeiten gute Ergebnisse erzielt werden.

For an electromagnetically levitated spindle a nonlinear control design is proposed. A flatness-based stabilizing tracking controller turns out to be an interesting alternative to classical linear operating point designs. An observer can be used for adaptation to constant or to harmonic perturbations, as they are induced by rotor unbalance. For digital implementation an appropriate discretization of both the controller and the observer allows to achieve good results even with rather slow sampling.

1 Aufgabenstellung

Der Einsatz elektromagnetischer Lager als Alternative zu mechanischen Lagern ist heutzutage in diversen Anwendungsbereichen Stand der Technik. Neue Anwendungsgebiete ergeben sich durch die Möglichkeit zur freien Positionierung des gelagerten Körpers im zur Verfügung stehenden Arbeitsbereich. So soll hier die Bewegungsplanung und stabilisierende Folgeregelung für eine elektromagnetisch gelagerte Spindel vorgestellt werden, wie sie in Bild 1 dargestellt ist.

Die Spindel wird als ein starrer Körper betrachtet, der sich – in einem geringen Bereich – frei bewegen kann. Für fünf der sechs mechanischen Freiheitsgrade werden aktive elektromagnetische Lager eingesetzt, der sechste Freiheitsgrad entspricht der Drehung der Spindel um ihre Längsachse. Dafür wird ein Asynchronmotor verwendet. Die Magnetlager zur radialen Positionierung sind beim hier untersuchten Aufbau in der klassischen Weise in zwei zur Längsachse orthogonalen Lagerebenen installiert, jeweils paarweise einander gegenüberstehend in zwei zueinander orthogonalen Richtungen – hinsichtlich Alternativen s. [5]. Für die Dynamik des mechanischen Systems wird ein Starrkörpermodell angegeben. Dieses Teilsystem ist durch

die Kreiselkräfte nichtlinear. Die auf den Körper einwirkenden magnetischen Stellkräfte sind proportional zum Quadrat des Stromes durch die Wicklungen der Elektromagnete und umgekehrt proportional zum Quadrat der Weite des wirksamen Luftspalts: Dies spiegelt die wohlbekannte Tatsache wider, dass nur anziehende Kräfte erzeugt werden können. Diese Beziehung zwischen Kraft und Strom bzw.

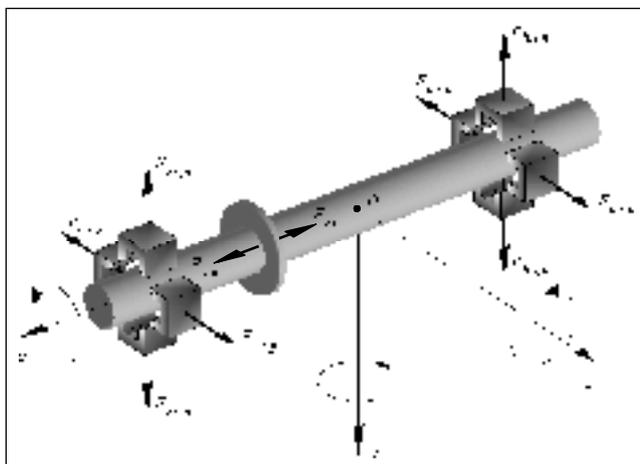


Bild 1: Die magnetisch gelagerte Spindel.

Position im Luftspalt ist einer der wesentlichen nichtlinearen Zusammenhänge im mathematischen Modell der Spindel. Eine weitere Nichtlinearität ergibt sich im elektrischen Kreis: Die Induktivität ist umgekehrt proportional zur Weite des effektiven Luftspalts. Die Beziehungen zwischen Positionen, Längen und Winkeln können aufgrund des geringen Bewegungsraums linearisiert werden.

Wie man leicht einsieht, ist das unregulierte System instabil, eine Stabilisierung durch eine Regelung ist daher zwingend. Das kann anhand einer Überlegung zur Positionierung eines Stahlkörpers in einer Ebene zwischen zwei einander gegenüberliegenden Elektromagneten nachvollzogen werden. In der Ruhelage ist die resultierende Kraft, die sich durch Addition der beiden Magnetkräfte und der Schwerkraft ergibt, gleich Null. Bei einer Auslenkung in die Richtung eines der Magneten nimmt die durch diesen Magneten erzeugte Kraft zu, während jene des gegenüberliegenden Magneten abnimmt. Die resultierende Kraft wirkt also in der Richtung der Auslenkung aus der Gleichgewichtslage.

Obwohl die Luftspalte klein sind, interessiert hier neben der Rotation um eine vorgegebene Achse (d.h. eine Richtung im raumfesten Koordinatensystem oder alternativ im körperfesten System) auch die Bewegung entlang einer vorgegebenen Bahn – Anwendungsgebiete dieser Betriebsweise liegen insbesondere im Bereich der Unrundbearbeitung.

Wird im Gegensatz zum Betrieb an einem Arbeitspunkt eine zeitlich veränderliche Positionierung in einem weiteren Bereich angestrebt, wird eine Betrachtung des linearisierten Modells und ein darauf basierender Entwurf linearer Regler (s. hierzu [7]) nicht ausreichen. Ein weiterer Vorteil eines nichtlinearen Entwurfs kann in der in [3] vorgeschlagenen Vermeidung der für lineare Regler erforderlichen Arbeitspunktströme gesehen werden.

Es gilt also, eine stabilisierende Folgeregelung für ein nichtlineares System zu entwerfen. Ein effizienter Zugang zur Lösung dieser Aufgabe ist die flachheitsbasierte Bewegungsplanung und Regelung, wie sie in dem Übersichtsaufsatz [6] vorgestellt wurde – s. außerdem [1]. Tatsächlich wurde dieses Konzept von J. Lévine, J. Lottin und J.-Ch. Ponsart in Annecy (Frankreich) schon für eine ähnliche Aufgabe erfolgreich eingesetzt – s. insbesondere [3] und die Dissertation von J.-Ch. Ponsart [5]. Bei diesen Untersuchungen wurde in axialer Richtung ein passives Lager eingesetzt. Wir leiten weitgehend analoge Ergebnisse ab. Insbesondere greifen wir die in [3] vorgeschlagene Methode zur Vermeidung von Arbeitspunktströmen auf, die bei einer linearen Regelung erforderlich sind. Die Erweiterungen gegenüber den Untersuchungen in Annecy im Bereich der Theorie betreffen neben der Einbeziehung eines aktiven Lagers in axialer Richtung die Berücksichtigung von periodischen Störungen, die insbesondere durch Unwuchten hervorgerufen werden, sowie eine Diskussion der Diskretisierung des Regelgesetzes einschließlich des Beobachters zur Implementierung in einem Mikroprozessor.

2 Mathematisches Modell

Das mathematische Modell für die Dynamik der starren Spindel ergibt sich aus den Impulsbilanzen:

$$m \ddot{X} = \underbrace{F_{x,p} - F_{x,n}}_{F_x} + m g_x \quad (1a)$$

$$m \ddot{Y} = \underbrace{F_{v,y,p} - F_{v,y,n}}_{F_{v,y}} + \underbrace{F_{h,y,p} - F_{h,y,n}}_{F_{h,y}} + m g_y \quad (1b)$$

$$m \ddot{Z} = \underbrace{F_{v,z,p} - F_{v,z,n}}_{F_{v,z}} + \underbrace{F_{h,z,p} - F_{h,z,n}}_{F_{h,z}} + m g_z \quad (1c)$$

$$\Theta_2 \ddot{\psi} = -(l_{f,v} - X)F_{v,z} + (l_{f,h} + X)F_{h,z} - \Theta_1 \dot{\phi} \dot{\theta} \quad (1d)$$

$$\Theta_2 \ddot{\theta} = (l_{f,v} - X)F_{v,y} - (l_{f,h} + X)F_{h,y} + \Theta_1 \dot{\phi} \dot{\psi} \quad (1e)$$

$$\Theta_1 \ddot{\phi} = D_\phi \quad (1f)$$

Darin sind X , Y und Z die Koordinaten des Massenmittelpunktes G in einem in der (magnetischen) Mittellage fixierten raumfesten System mit den Achsen x , y und z entsprechend Bild 1. Die Kardanwinkel ϕ , ψ und θ beschreiben die Winkelpositionen der Achsen eines im Massenmittelpunkt G fixierten körperfesten Koordinatensystems. Dabei ist ψ der Winkel einer Drehung aus dem (x, y, z) -System um die y -Achse, θ der Winkel einer anschließenden Drehung um das Bild der z -Achse und ϕ der Winkel einer abschließenden Rotation um das Bild der x -Achse. Mit F_\bullet und D_\bullet sind Kräfte und Drehmomente bezeichnet.

Bei der Berechnung der durch die Radiallager erzeugten Drehmomente ist berücksichtigt, dass die Winkel ψ und θ konstruktionsbedingt klein sind ($< 10^{-2}$ rad). Die Wirkrichtung des Schwerfeldes ist beliebig, aber bekannt, ihre Komponenten im Inertialsystem sind g_x , g_y und g_z . In diesem Modell sind zusätzlich auftretende, schwer zu modellierende Kräfte und Momente nicht berücksichtigt, die z.B. aus einer exzentrischen Lage des Rotors der Asynchronmaschine oder aus Kopplungen zwischen den radialen und axialen Lagern herrühren. Die Trägheitsmomente um beliebige Achsen senkrecht zur Spindel-Längsachse können aufgrund der symmetrischen Konstruktion als gleich angenommen werden: Wir bezeichnen sie mit Θ_2 . Das Trägheitsmoment um die Längsachse ist Θ_1 , und m ist die Masse.

Die durch die Elektromagnete der Lager erzeugten Kräfte sind proportional zum Quadrat des (verketteten) magnetischen Flusses. Die Flussverkettungen¹ sind proportional zu den Strömen und umgekehrt proportional zum wirksamen Luftspalt im entsprechenden Lager. Damit ergibt sich für die Kräfte²

¹ Es scheint sinnvoll, eine Verkopplung der Flüsse im Axiallager zu berücksichtigen. Zur Vereinfachung der Darstellung wird hier darauf verzichtet. Die Berücksichtigung dieser Kopplung bereitet keine prinzipiellen Schwierigkeiten. (Der Zusammenhang zwischen Flüssen und Strömen wird durch ein lineares Gleichungssystem beschrieben.)

² Für das Symbol \bullet sind die gleichen, jeweils nicht angegebenen Indizes einzusetzen – z.B. hier $F_{v,z,p} = k_{v,z,p} i_{v,z,p}^2 / (\sigma_{v,z,p} - s_{v,z,p})^2$.

$$F_{\bullet} = k_{\bullet} \frac{i_{\bullet}^2}{(\sigma_{\bullet} - s_{\bullet})^2}. \quad (2)$$

Die Parameter σ_{\bullet} und k_{\bullet} sind von der Geometrie des Aufbaus und von den magnetischen Eigenschaften des Materials abhängig. In den Lagerebenen (bei $x = l_{f,v}$ und $x = -l_{f,h}$) erhält man für die Abweichungen s_{\bullet} der Spindelposition von der magnetischen Mittellage

$$\begin{aligned} s_{v,y,\bullet} &= \pm(Y + l_{f,v}\theta), & s_{h,y,\bullet} &= \pm(Y - l_{f,h}\theta) \\ s_{v,z,\bullet} &= \pm(Z - l_{f,v}\psi), & s_{h,z,\bullet} &= \pm(Z + l_{f,h}\psi) \\ s_{x,p} &= -s_{x,n} = X. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Messungen der Positionen erfolgen in zwei zur Längsachse des Aufbaus (x -Achse) orthogonalen Ebenen bei $x = l_{m,v}$ und $x = -l_{m,h}$. Für die gemessenen Positionen der Schnittpunkte der Spindel-Längsachse mit den Messebenen gilt folglich

$$\begin{aligned} Y_{m,v} &= Y + l_{m,v}\theta, & Y_{m,h} &= Y - l_{m,h}\theta \\ Z_{m,v} &= Z - l_{m,v}\psi, & Z_{m,h} &= Z + l_{m,h}\psi. \end{aligned} \quad (4)$$

Diese Gleichungen werden beim Entwurf des Beobachters benötigt.

Die Linearität der Beziehungen (3) und (4) folgt daraus, daß die Winkel θ und ψ klein sind.

3 Reglerentwurf bei Stromsteuerung

Alle Positionen, Winkel und die zugehörigen Geschwindigkeiten werden in diesem Abschnitt als gemessen angenommen. Die Ströme werden als Stellgrößen aufgefasst. Das kann durch unterlagerte Stromregelkreise mit Pulsweitenmodulation realisiert werden, was der derzeitigen Praxis entspricht.

3.1 Klassischer Zugang: Linearisierung um einen Arbeitspunkt

Betrachten wir die Gln. (1c) und (1d) für die Bewegung in z -Richtung bzw. um die y -Achse und nehmen an, diese Richtung sei horizontal orientiert: $g_z = 0$. Die Parameter σ und k der Radiallager seien identisch. Bei der klassischen Differenzstrom-Ansteuerung [7] mit einem Arbeitspunktstrom i_0 genügen die Kräfte in z -Richtung

$$\begin{aligned} F_{v,z} &= k \left(\frac{(i_0 + \Delta i_v)^2}{(\sigma - Z + l_{f,v}\psi)^2} - \frac{(i_0 - \Delta i_v)^2}{(\sigma + Z - l_{f,v}\psi)^2} \right) \\ F_{h,z} &= k \left(\frac{(i_0 + \Delta i_h)^2}{(\sigma - Z - l_{f,h}\psi)^2} - \frac{(i_0 - \Delta i_h)^2}{(\sigma + Z + l_{f,h}\psi)^2} \right). \end{aligned}$$

Die Linearisierung der Bewegungsgleichungen (1c) und (1d) um eine Ruhelage mit $Z = 0$, $\psi = 0$, $X = 0$ und $i_v = i_h = i_0$ führt auf

$$m \Delta \ddot{Z} = \frac{4i_0 k}{\sigma^2} \left(\frac{2i_0}{\sigma} \Delta Z + \frac{i_0 (l_{f,h} - l_{f,v})}{\sigma} \Delta \psi + \Delta i_v + \Delta i_h \right)$$

$$\Theta_2 \Delta \ddot{\psi} = \frac{4i_0 k}{\sigma^2} \left(\frac{i_0 (l_{f,h} - l_{f,v})}{\sigma} \Delta Z + \frac{i_0 (l_{f,h}^2 + l_{f,v}^2)}{\sigma} \Delta \psi - l_{f,v} \Delta i_v + l_{f,h} \Delta i_h \right).$$

Für $i_0 = 0$ reduzieren sich diese Gleichungen auf $\Delta \ddot{Z} = 0$ und $\Delta \ddot{\psi} = 0$. Ein Reglerentwurf auf der Basis der linearisierten Gleichungen erfordert also Arbeitspunktströme $i_0 \neq 0$. Diese bewirken sich gegenseitig kompensierende Kräfte, die in den Bewegungsgleichungen nicht wirksam werden.

3.2 Eine Alternative: Linearisierung der Folgefehlerdynamik mittels statischer Zustandsrückführung

Betrachten wir nun die Bewegungsgleichung in der Form (1) und führen Hilfsgrößen für die Beschleunigungen a_x , a_y , a_z , α_ψ , α_θ , α_ϕ ein, mit

$$\begin{aligned} m a_x &= F_x + m g_x \\ m a_y &= F_{v,y} + F_{h,y} + m g_y \\ m a_z &= F_{v,z} + F_{h,z} + m g_z \\ \Theta_2 \alpha_\psi &= -(l_{f,v} - X)F_{v,z} + (l_{f,h} + X)F_{h,z} - \Theta_1 \dot{\phi} \dot{\theta} \\ \Theta_2 \alpha_\theta &= (l_{f,v} - X)F_{v,y} - (l_{f,h} + X)F_{h,y} + \Theta_1 \dot{\phi} \dot{\psi} \\ \Theta_1 \alpha_\phi &= D_\phi. \end{aligned} \quad (5)$$

Damit gilt

$$\ddot{X} = a_x, \quad \ddot{Y} = a_y, \quad \ddot{Z} = a_z, \quad \ddot{\psi} = \alpha_\psi, \quad \ddot{\theta} = \alpha_\theta, \quad \ddot{\phi} = \alpha_\phi.$$

Für jedes dieser sechs ungekoppelten Teilsysteme kann ein stabilisierender Regler leicht entworfen werden, beispielsweise für die Position X mit

$$a_x = \ddot{X}_{\text{soll}} + (\lambda_{x,1} + \lambda_{x,2})(\dot{X} - \dot{X}_{\text{soll}}) - \lambda_{x,1}\lambda_{x,2}(X - X_{\text{soll}}) \quad (6)$$

und mit den Eigenwerten $\lambda_{x,1}$, $\lambda_{x,2}$ symmetrisch zur reellen Achse in der linken komplexen Halbebene.

Dabei bezeichnet X_{soll} eine noch zu entwerfende zweimal differenzierbare Solltrajektorie für X , und die Abweichung vom Sollwert $e_x := X - X_{\text{soll}}$ genügt der Dgl.

$$\ddot{e}_x - (\lambda_{x,1} + \lambda_{x,2})\dot{e}_x + \lambda_{x,1}\lambda_{x,2}e_x = 0. \quad (7)$$

Durch die Beziehungen der Form (6), die eine Rückführung der (verallgemeinerten) Positionen und Geschwindigkeiten und die Aufschaltung der Solltrajektorien umfasst, werden die als Hilfsgrößen eingeführten Beschleunigungen a_x, \dots, α_ϕ berechnet. Aus diesen und den Winkelgeschwindigkeiten können durch Lösen des inhomogenen linearen Gleichungssystems (5) die fünf Kräfte und das Moment D_ϕ bestimmt werden.

Offensichtlich kann dabei in jedem Magnetpaar eine der Kräfte ($F_{\bullet,p}$, $F_{\bullet,n}$) frei vorgegeben werden. Dazu kann für jedes dieser Magnetpaare die resultierende Kraft F_{\bullet} als Lösung des linearen Gleichungssystems (5) berechnet werden. Anhand des Vorzeichens dieser Resultierenden kann dann jeweils derjenige Magnet ausgewählt werden, der

eine Kraft in der erforderlichen Richtung erzeugt. Die jeweils andere Kraft wird zu Null gewählt.

Schließlich können aus den Kräften und den aktuellen Positionen gemäß (2) die erforderlichen Ströme, also die eigentlichen Stellgrößen, berechnet werden:

$$i_{\bullet} = \sqrt{\frac{F_{\bullet}}{k_{\bullet}}}(\sigma_{\bullet} - s_{\bullet}). \tag{8}$$

Im Gegensatz zur klassischen linearen Lösung werden so die Arbeitspunktströme vermieden und die thermischen Verluste reduziert.

3.3 Flachheit und Trajektorienplanung

Für die Koordinaten (X, Y, Z) des Massenmittelpunktes und die Winkel θ, ψ und ϕ können Trajektorien voneinander unabhängig vorgegeben werden. Dadurch werden die Zeitverläufe sämtlicher Systemgrößen vollständig bestimmt: Bei verschwindender Regelabweichung sind die als Hilfsgrößen eingeführten Beschleunigungen $a_x, \dots, \alpha_{\phi}$ durch die Solltrajektorien $X_{\text{soll}}, \dots, \phi_{\text{soll}}$ definiert. Die Lösung des linearen Gleichungssystems (5) beschreibt die dazugehörigen Lagerkräfte³ $F_{x,\text{soll}}, \dots, F_{h,z,\text{soll}}$ und das Moment $D_{\phi,\text{soll}}$. Mit (8) erhält man die Stellströme $i_{x,\text{soll}}, \dots, i_{h,z,n,\text{soll}}$, die (nominell) die Bewegung entlang der gewählten Solltrajektorie bewirken. Diese Möglichkeit der vollständigen Parametrierung der Lösung mittels einer endlichen Anzahl a priori frei wählbarer Trajektorien entspricht der *Flachheit* des Systems. Die Positionen und Winkel, für die hier die Trajektorien gewählt werden können, bilden einen sogenannten *flachen Ausgang* [1; 6]. Die Flachheit bildet die Grundlage des vorgestellten Reglerentwurfs. Die Einschränkung bei der Wahl der Solltrajektorien für den flachen Ausgang betrifft einzig die Differenzierbarkeitsanforderung zum Erreichen beschränkter und stetiger Ströme und die Beschränkung der Wertebereiche.

Neben der Möglichkeit eines einfachen Reglerentwurfes liegt hier ein weiterer Vorteil der flachheitsbasierten Regelung: Die geplanten Trajektorien können sehr leicht hinsichtlich ihrer Realisierbarkeit geprüft werden, denn sämtliche Systemgrößen lassen sich aus ihnen (bereits bei der Trajektorienplanung) berechnen. Dazu müssen die Systemdifferentialgleichungen nicht integriert werden.

³ Diese Berechnung der Kräfte und die im vorigen Abschnitt vorgeschlagene Stabilisierung entspricht der „Methode der berechneten Momente“, s. z.B. [6].

Es sei die Aufgabe betrachtet, die radiale Position des Massenmittelpunktes der Spindel aus der Mittellage auf eine elliptische Bahn um die Mittellage zu verfahren. Mit den Solltrajektorien

$$\begin{aligned} Y_{\text{soll}}(t) &= r_y(t) \cos \Omega t \\ Z_{\text{soll}}(t) &= r_z(t) \sin \Omega t \\ X_{\text{soll}}(t) &= \psi_{\text{soll}}(t) = \theta_{\text{soll}}(t) = 0 \\ \phi_{\text{soll}}(t) &= \omega_0 t + \phi_0 \quad (\omega_{\text{soll}} = \omega_0 = \text{const.}) \end{aligned}$$

für den flachen Ausgang $(X, Y, Z, \phi, \psi, \theta)$ kann diese Aufgabe gelöst werden.

Damit die Hilfsgrößen a_y, a_z , usw. im Regler (6) (und den dazu analogen Beziehungen für die anderen Koordinaten) beschränkt bleiben, müssen $r_y(t)$ und $r_z(t)$ genügend oft differenzierbar sein, denn die Zeitableitungen \dot{r}_y, \ddot{r}_y und \dot{r}_z, \ddot{r}_z gehen in

$$\begin{aligned} \dot{Y}_{\text{soll}} &= \dot{r}_y \cos \Omega t - \Omega r_y \sin \Omega t \\ \dot{Z}_{\text{soll}} &= \dot{r}_z \sin \Omega t + \Omega r_z \cos \Omega t \\ \ddot{Y}_{\text{soll}} &= (\ddot{r}_y - r_y \Omega^2) \cos \Omega t - 2\Omega \dot{r}_y \sin \Omega t \\ \ddot{Z}_{\text{soll}} &= (\ddot{r}_z - r_z \Omega^2) \sin \Omega t + 2\Omega \dot{r}_z \cos \Omega t \end{aligned}$$

ein und damit unmittelbar in die Berechnung der von den Lagern aufzubringenden Kräfte und der dafür erforderlichen Ströme.

In der Zeit von $t = 0$ bis $t = t^*$ soll die Spindel aus der Mittellage auf eine elliptische Bahn mit den Halbachsenlängen r_y^* und r_z^* gebracht werden. Dafür müssen zweimal differenzierbare Trajektorien $r_y(t)$ und $r_z(t)$ vorgegeben werden, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} r_y(0) &= \dot{r}_y(0) = \ddot{r}_y(0) = 0 \\ r_z(0) &= \dot{r}_z(0) = \ddot{r}_z(0) = 0 \\ r_y(t^*) &= r_y^*, \quad \dot{r}_y(t^*) = \ddot{r}_y(t^*) = 0 \\ r_z(t^*) &= r_z^*, \quad \dot{r}_z(t^*) = \ddot{r}_z(t^*) = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Dadurch wird gewährleistet, dass sämtliche Systemgrößen zu Beginn ($t = 0$) und am Ende ($t = t^*$) des Übergangs beschränkt bleiben⁴. Dies ist mit

$$r_y(t) = r_y^* p(t), \quad r_z(t) = r_z^* p(t) \tag{10}$$

⁴ Sollen die Eingangsgrößen i_{\bullet} nicht nur beschränkt, sondern auch stetig sein, so wird man sich für $r_y(t)$ und $r_z(t)$ zweimal stetig differenzierbare Zeitfunktionen vorgeben, für die zusätzlich $r_y^{(3)}(t^*) = r_y^{(3)}(0) = r_z^{(3)}(t^*) = r_z^{(3)}(0) = 0$ gilt.

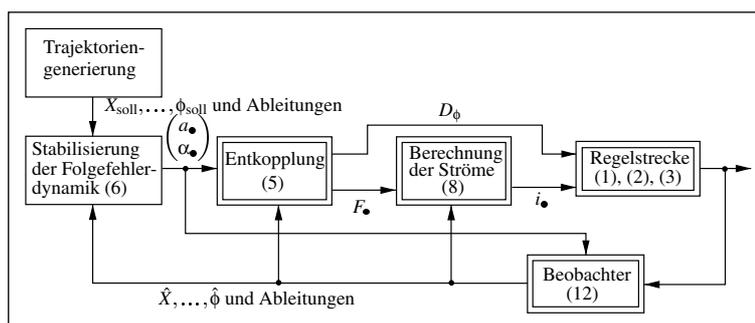


Bild 2: Struktur des flachheitsbasierten Folgeregelkreises.

und

$$p(t) = 10\left(\frac{t}{t^*}\right)^3 - 15\left(\frac{t}{t^*}\right)^4 + 6\left(\frac{t}{t^*}\right)^5$$

möglich.

4 Beobachter mit Adaptation

4.1 Reduzierter Beobachter zur Schätzung der Geschwindigkeiten und konstanter Störungen

Zur Realisierung des in Abschnitt 3.3 berechneten Reglers, der auf einer Zustandsrückführung basiert, ist die Schätzung der nicht gemessenen Geschwindigkeiten erforderlich. Alternativ zu einer numerischen Differentiation der gemessenen Positionssignale kann ein Beobachter verwendet werden.

Der Beobachterentwurf kann getrennt für vier Teilsysteme a–d durchgeführt werden, die folgende Koordinaten betreffen:

- die radiale Lage (Y , Z) des Massenmittelpunktes G nach Gleichung (1b) und (1c),
- die Neigung der Welle mit den Lagewinkeln ψ und θ gemäß Gleichung (1d) und (1e),
- die axiale Position X des Massenmittelpunktes mit Gleichung (1a) und
- die Winkelposition ϕ nach Gleichung (1f).

Wichtig ist dabei, dass aus den gestellten (oder gemessenen) Strömen und den gemessenen Positionen die durch die Elektromagnete erzeugten Kräfte berechnet werden können. (Die verwendeten Lagekoordinaten können durch Inversion der linearen Messgleichungen (4) direkt berechnet werden.) Damit ergeben sich für die ersten drei der aufgeführten Teilsysteme *lineare zeitinvariante* Modelle. Das interessanteste Teilsystem ist das verbleibende vierte, das die Neigung der Welle beschreibt. In ihm tritt die Drehgeschwindigkeit $\omega := \dot{\phi}$ auf, die wir ebenfalls als gemessen annehmen wollen.

Konstante Störkräfte und -momente β_y , β_z und β_ψ , β_θ können vom Beobachter geschätzt und so durch Berücksichtigung im Regler kompensiert werden. Eine solche Adaptation an konstante Störungen entspricht in ihrer Wirkung einem Integralanteil im Regler. Zur Vereinfachung des Beobachterentwurfs für die Teilsysteme a und b ist es hilfreich, komplexe Größen einzuführen, indem jeweils der y -Richtung (bzw. ψ) der reelle, der z -Richtung (bzw. θ) der imaginäre Teil zugeordnet wird, also (mit $j = \sqrt{-1}$)

$$\underline{x}^a = \begin{pmatrix} \beta_y + j\beta_z \\ \dot{y} + j\dot{z} \\ y + jz \end{pmatrix}, \quad \underline{x}^b = \begin{pmatrix} \beta_\psi + j\beta_\theta \\ \dot{\psi} + j\dot{\theta} \\ \psi + j\theta \end{pmatrix}.$$

Für das Teilsystem b mit dem komplexwertigen Zustand \underline{x}^b ergibt sich so:

$$\dot{\underline{x}}^b = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \varphi(t) & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x}^b + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_\psi + j\alpha_\theta \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$\underline{y}^b = \psi + j\theta = \underline{x}_3^b$$

mit $\varphi(t) = j\omega(t)\Theta_1/\Theta_2$.

Ein reduzierter Beobachter für dieses Teilsystem basiert auf der Verwendung von

$$\underline{z}_1^b = \underline{x}_1^b + L_1^b \underline{y}^b, \quad \underline{z}_2^b = \underline{x}_2^b + L_2^b(t) \underline{y}^b.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}}_1^b &= L_1^b (\underline{z}_2^b - L_2^b(t) \underline{y}^b) \\ \dot{\underline{z}}_2^b &= \underline{z}_1^b + (\varphi(t) + L_2^b(t)) \underline{z}_2^b - \\ &\quad \left(L_1^b - L_2^b(t) + L_2^b(t) (\varphi(t) + L_2^b(t)) \right) \underline{y}^b + \underline{u}^b, \end{aligned}$$

mit $\underline{u}^b(t) = \alpha_\psi(t) + j\alpha_\theta(t)$, und der Beobachter kann in der Form

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}}_1^b &= L_1^b (\underline{z}_2^b - L_2^b(t) \underline{y}^b) \\ \dot{\underline{z}}_2^b &= \underline{z}_1^b + (\varphi(t) + L_2^b(t)) \underline{z}_2^b - \\ &\quad \left(L_1^b - L_2^b(t) + L_2^b(t) (\varphi(t) + L_2^b(t)) \right) \underline{y}^b + \underline{u}^b \end{aligned} \quad (12)$$

angesetzt werden. Durch Subtraktion der Differentialgleichungen erhält man das System für den Schätzfehler $(\underline{z}_1^b, \underline{z}_2^b) = (\underline{z}_1^b - \hat{\underline{z}}_1^b, \underline{z}_2^b - \hat{\underline{z}}_2^b)$:

$$\begin{aligned} \dot{\underline{z}}_1^b &= L_1^b \underline{z}_2^b \\ \dot{\underline{z}}_2^b &= \underline{z}_1^b + (\varphi(t) + L_2^b(t)) \underline{z}_2^b, \end{aligned}$$

das mit $L_1^b = -\gamma_1$ und $L_2^b = -\gamma_2 - \varphi(t)$ zeitinvariant und durch geeignete Wahl der Parameter γ_1 und γ_2 exponentiell stabil wird. (Dabei müssen die Eigenwerte der Schätzfehlerdynamik nicht unbedingt konjugiert komplex sein, denn die Zustandsgrößen sind komplexwertig.) Die im Beobachter in $L_2^b(t)$ benötigte Winkelbeschleunigung $\dot{\omega}(t)$ kann durch das Motormoment $D_\phi(t)$ oder die Solltrajektorie $\dot{\omega}_{\text{soll}}(t)$ ersetzt werden.

4.2 Erweiterung des Beobachters zur Adaptation an harmonische Störungen

Harmonische Störungen mit der veränderlichen Drehfrequenz $\omega(t)$ werden vor allem durch die Restunwucht der Spindel hervorgerufen. Werden diese ebenfalls vom Beobachter geschätzt, können durch Freistellung der Spindel harmonische Lagerkräfte – und damit Vibrationen des Aufbaus – reduziert werden. Alternativ können harmonische Störungen der Lage kompensiert und so eine präzisere Positionierung erreicht werden.

Zur Beschreibung der harmonischen Störungen können komplexe Variablen

$$\underline{\xi}^a = \tilde{Y} + j\tilde{Z}, \quad \text{und} \quad \underline{\xi}^b = \tilde{\psi} + j\tilde{\theta}$$

eingeführt werden, mit

$$\dot{\underline{\xi}}^a = j\omega \underline{\xi}^a \quad \text{und} \quad \dot{\underline{\xi}}^b = j\omega \underline{\xi}^b. \quad (13)$$

Diese Störungen überlagern sich den Koordinaten, die dem Massenmittelpunkt und der Längsachse der unwuchtfreien Spindel entsprechen, also an die Geometrie des Körpers gebunden sind. Letztere werden mit (4) aus den Positions-

messungen berechnet und übernehmen die Rolle der Messgrößen; wir bezeichnen sie mit $\underline{\eta}^a$ und $\underline{\eta}^b$. Damit gilt $\underline{x}_3^a = \underline{\eta}^a + \underline{\xi}^a$ und $\underline{x}_3^b = \underline{\eta}^b + \underline{\xi}^b$.

Wir beschränken uns auch hier auf das Teilsystem b, wobei $\omega \neq 0$ vorausgesetzt wird. Der Beobachterentwurf für das im Gegensatz zum vorigen Abschnitt nun ebenfalls zeitvariante Teilsystem a erfolgt analog.

Aus (11) und (13) erhält man eine zeitvariante Zustandsdarstellung:

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}}^b &= F^b \underline{x}^b + \underline{u}^b + \varepsilon(\underline{x}^b, \underline{u}^b) \\ \dot{\underline{\eta}}^b &= h^b \underline{x}^b + d^b \underline{\eta}^b\end{aligned}$$

mit $h^b = (0, 1, -j\omega(t))$ und $d^b = j\omega(t)$. Dabei ist die durch die Restunwucht bedingte kleine Störung $\varepsilon(\underline{x}^b, \underline{u}^b)$ linear in \underline{x}^b und \underline{u}^b .

Diese Darstellung kann durch eine zeitabhängige Zustandstransformation $\underline{z}^b = S^b(t)\underline{x}^b$ in die Form

$$\begin{aligned}\dot{\underline{z}}^b &= A^b \underline{z}^b + S^b \underline{u}^b + \varepsilon(\underline{z}^b, \underline{u}^b) \\ \dot{\underline{\eta}}^b &= c^b \underline{z}^b + d^b \underline{\eta}^b\end{aligned}$$

transformiert werden, wobei das Paar A^b, c^b in der zeitvarianten Beobachterform vorliegt (analog zum Beobachter im vorigen Abschnitt). Führt man $\underline{z}^b := \underline{z}^b + l^b \underline{\eta}^b$ und $E^b := -(A^b + l^b c^b) l^b + l^b d^b + \dot{l}^b$ ein, kann ein reduzierter Beobachter der Form

$$\dot{\underline{z}}^b = (A^b + l^b c^b) \underline{z}^b + E^b \underline{\eta}^b + S^b \underline{u}^b \quad (14)$$

$$\underline{x}^b = (S^b)^{-1} (\underline{z}^b - l^b \underline{\eta}^b) \quad (15)$$

angegeben werden. Der Schätzfehler $\tilde{\underline{z}}^b = \underline{z}^b - \hat{\underline{z}}^b$ genügt

$$\dot{\tilde{\underline{z}}}^b = (A^b + l^b c^b) \tilde{\underline{z}}^b + \varepsilon(\tilde{\underline{z}}^b, \underline{u}^b).$$

Für das Paar (A^b, c^b) in Beobachterform kann eine von ω und seinen Zeitableitungen abhängige Matrix l^b derart gefunden werden, dass $A^b + l^b c^b$ zeitinvariant ist mit einem beliebigen Spektrum in der linken Halbebene der komplexen Ebene [2]. Das Prinzip entspricht dem des zweidimensionalen Beobachters in Abschnitt 4.1. Es sei hervorgehoben, dass die Magnetkräfte – und damit \underline{u}^a bzw. \underline{u}^b – aus den Messungen der Ströme sowie $\underline{\eta}^a$ und $\underline{\eta}^b$ berechnet werden können.

5 Diskretisierung

Eine sehr einfache Diskretisierung des Reglers erhält man, indem man zu jedem Abtastzeitpunkt t_k mit den Gleichungen des kontinuierlichen Reglers die Steuerströme $i_{\bullet}(t_k)$ berechnet, wobei für die dazu benötigten Zustandsgrößen die aktuellen Mess- und Schätzwerte verwendet werden. Hier soll eine Alternative vorgeschlagen werden.

5.1 Ausnutzung der Flachheit zur Diskretisierung des Reglers

Zum Zeitpunkt $t_{k-1} + \tau_1$ ($\tau_1 < T_a$, $t_k = t_{k-1} + T_a$) sind die Messgrößen sowie die am Ende der letzten Abtastperiode

für die Zeit $[t_{k-1}, t_k)$ ausgegebenen Stellgrößen $i_{\bullet}(t_{k-1})$ bekannt. Mit einem Beobachter kann aus dem Zustand zum Zeitpunkt t_{k-1} und der Stellgröße $i_{\bullet}(t_{k-1})$ eine Schätzung des Systemzustandes zum Zeitpunkt t_k bestimmt werden. Bei der Bestimmung der Steuerströme für $[t_k, t_{k+1})$ kann man die Flachheit des Systems ausnutzen. Dazu werden die Differentialgleichungen der Folgefehler entsprechend (7) ausgewertet. Ziel der Diskretisierung des Reglers ist es, eine gute (konstante) Näherung für denjenigen Stellsignalverlauf $u^*(\tau) = u(t_k + \tau)$, $\tau \in [0, T_a)$ zu bestimmen, den der kontinuierliche Regler verwenden würde. Eine gute Näherung ist der Mittelwert (vgl. [4]).

$$u(t_k) = \frac{1}{T_a} \int_0^{T_a} u^*(\tau) d\tau,$$

der mit

$$u(t_k) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u^*(\tau_i) \quad (16)$$

und endlich vielen Zeitpunkten $0 \leq \tau_1 < \dots < \tau_n \leq T_a$ innerhalb der Abtastperiode angenähert wird.

Die Berechnung der Stellgrößenwerte $u^*(\tau_i)$, die der kontinuierliche Regler zu den Zeitpunkten τ_i erzeugen würde, soll nun anhand der Regelung für die axiale Position (X) demonstriert werden.

Für verschieden gewählte Eigenwerte $\lambda_{x,1} \neq \lambda_{x,2}$ hat (7) die Lösung

$$\begin{aligned}e_x(t_k + \tau) &= c_1(t_k) e^{\lambda_{x,1}\tau} + c_2(t_k) e^{\lambda_{x,2}\tau} \\ \dot{e}_x(t_k + \tau) &= \lambda_{x,1} c_1(t_k) e^{\lambda_{x,1}\tau} + \lambda_{x,2} c_2(t_k) e^{\lambda_{x,2}\tau} \\ \ddot{e}_x(t_k + \tau) &= \lambda_{x,1}^2 c_1(t_k) e^{\lambda_{x,1}\tau} + \lambda_{x,2}^2 c_2(t_k) e^{\lambda_{x,2}\tau}.\end{aligned}$$

Die Koeffizienten $c_1(t_k)$ und $c_2(t_k)$ werden aus dem Fehler ($e_x(t_k), \dot{e}_x(t_k)$) zum Zeitpunkt t_k berechnet:

$$\begin{pmatrix} c_1(t_k) \\ c_2(t_k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_{x,1} & \lambda_{x,2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e_x(t_k) \\ \dot{e}_x(t_k) \end{pmatrix}.$$

Ersetzt man in Gl. (7) $e_x(t)$ durch $X^*(\tau) - X_{\text{soll}}(t_k + \tau)$, so folgt der Verlauf von $X^*(\tau)$ bei kontinuierlicher Regelung in der nächsten Abtastperiode

$$\begin{aligned}X^*(\tau) &= X_{\text{soll}}(t_k + \tau) + c_1(t_k) e^{\lambda_{x,1}\tau} + c_2(t_k) e^{\lambda_{x,2}\tau} \\ \dot{X}^*(\tau) &= \dot{X}_{\text{soll}}(t_k + \tau) + \lambda_{x,1} c_1(t_k) e^{\lambda_{x,1}\tau} + \lambda_{x,2} c_2(t_k) e^{\lambda_{x,2}\tau} \\ \ddot{X}^*(\tau) &= \ddot{X}_{\text{soll}}(t_k + \tau) + \lambda_{x,1}^2 c_1(t_k) e^{\lambda_{x,1}\tau} + \lambda_{x,2}^2 c_2(t_k) e^{\lambda_{x,2}\tau}.\end{aligned}$$

Setzt man $X^*, \dot{X}^*, \ddot{X}^*$ in (5) und (6) ein, erhält man eine Zeitfunktion für F_x^* , aus der mit (8) die Zeitverläufe der Ströme $i_{x,p}^*$ und $i_{x,n}^*$ berechnet werden können, deren Mittelung (Gleichung (16)) $i_{x,p}(t_k)$ und $i_{x,n}(t_k)$ ergibt.

5.2 Diskretisierung des Beobachters

Die Matrix $(A^b + l^b c^b)$ ist konstant. Das kann zur Diskretisierung des Beobachters ausgenutzt werden – s. auch [5] für den Fall ohne Unwucht. Für den Eingang $\underline{u}^b(t)$ und für $E^b(t)$ wird angenommen, sie ändern sich innerhalb der Abtastperiode $[t_k, t_{k+1})$ kaum. Damit erhält man durch die Integration von (14) den diskreten Beobachter

$$\hat{\underline{z}}^b(t_{k+1}) = e^{(A^b+l^b c^b)T_a} \hat{\underline{z}}^b(t_k) + (A^b + l^b c^b)^{-1} (e^{(A^b+l^b c^b)T_a} - I) (E^b \hat{\underline{\eta}}^b(t_k) + S^b \underline{u}^b(t_k))$$

$$\hat{\underline{\eta}}^b(t_{k+1}) = (1 + T_a(d^b - c^b l^b)) \hat{\underline{\eta}}^b(t_k) + c^b T_a \hat{\underline{z}}^b(t_k)$$

$$\hat{\underline{x}}^b(t_{k+1}) = (S^b(t_{k+1}))^{-1} (\hat{\underline{z}}^b(t_{k+1}) - l^b(t_{k+1}) \hat{\underline{\eta}}^b(t_{k+1})),$$

wobei E^b , S^b , d^b , c^b und l^b in den ersten beiden Gleichungen jeweils zur Zeit t_k ausgewertet werden. Zur Berechnung der Matrizen $S^b(t_{k+1})$ und $l^b(t_{k+1})$ kann der Wert der Solltrajektorie, $\omega_{\text{sol}}(t_{k+1})$, verwendet werden. Desweiteren kann es sinnvoll sein, die Exponentialfunktion durch ihre Approximation erster Ordnung zu ersetzen.

Eine interessante Alternative im Fall konstanter Solldrehzahl ω_{sol} ist der Entwurf eines diskreten Beobachters durch Diskretisierung des Schätzfehlersystems und Vorgabe der Eigenwerte für das diskretisierte System.

6 Simulationsergebnisse

In diesem Abschnitt werden einige Simulationsergebnisse gezeigt, die die Wirkungsweise der vorgeschlagenen Kompensation der Störkräfte illustrieren mögen: einerseits im Hinblick auf eine bessere Lageregelung, andererseits mit dem Ziel einer Freistellung der Spindel zur Reduktion der periodischen Lagerkräfte. In diesen Simulationen wurden die diskretisierten Regler und Beobachter verwendet, im Beobachter die Approximation erster Ordnung und ein normalverteilt verrauschtes Messsignal. Die Abtastzeit entspricht dem technologisch erreichbaren Wert von 0,15 ms. Die Spindel hat eine Masse von etwa 7 kg, eine Länge von circa 50 cm und eine Restunwucht.

Zunächst wird das in Abschnitt 3.3 erörterte Führen der Längsachse der Spindel auf eine elliptische Bahn betrachtet (Bild 3). Der zugehörige Folgefehler ist in Bild 4 zu sehen. Die für den Übergang benötigten Kräfte werden durch die Ströme in Bild 5 erzeugt: Man beachte das Um-

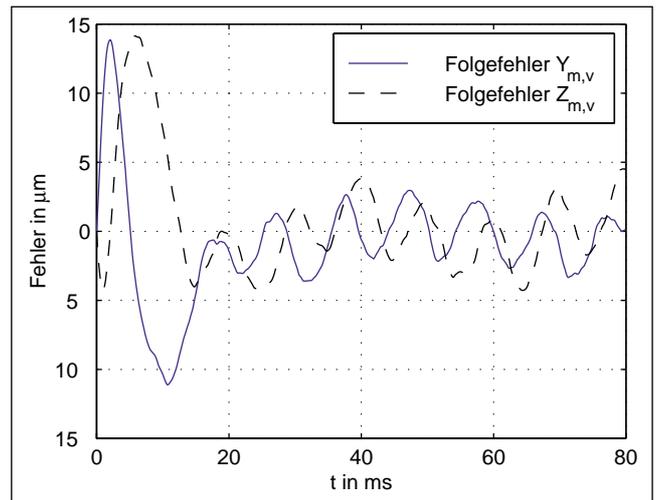


Bild 4: Folgefehler der Position ($Y_{m,v}$, $Z_{m,v}$) bei dem in Bild 3 dargestellten Übergang.

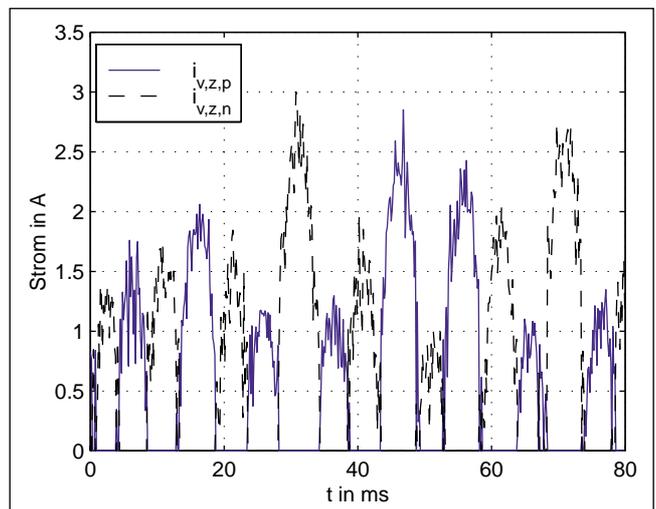


Bild 5: Ströme im horizontalen Lager vorn bei dem Übergang aus Bild 3.

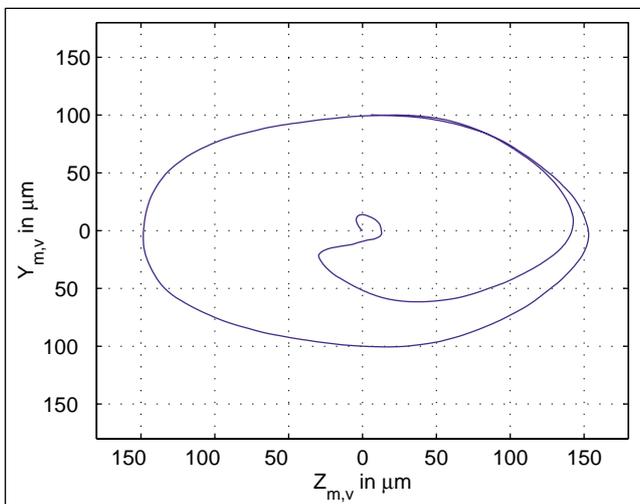


Bild 3: Position ($Y_{m,v}$, $Z_{m,v}$) (gemäß Gl. (4)) in der vorderen Messebene beim Übergang auf eine elliptische Bahn (ein Umlauf).

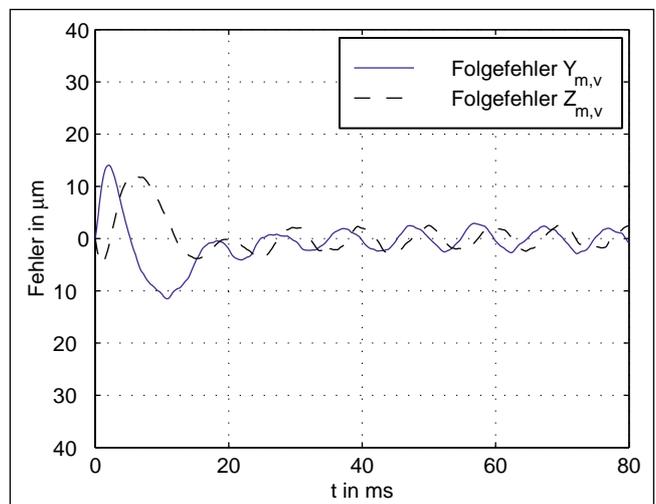


Bild 6: Fehler der Position bei Positionierung in $(X, Y, Z, \psi, \theta) = (0,0,0,0,0)$.

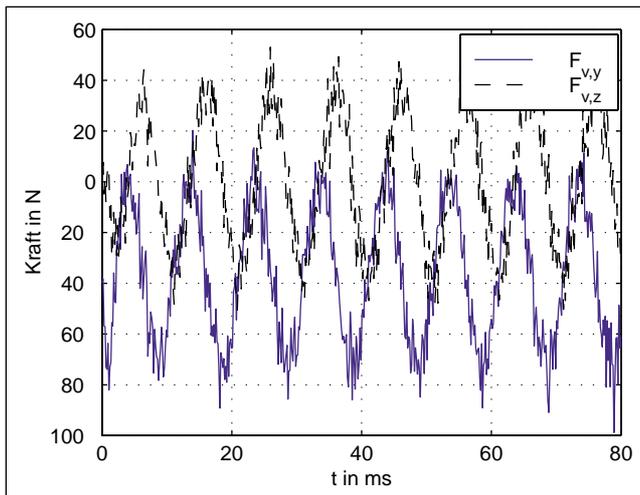


Bild 7: Kräfte in den vorderen Magnetlagern bei Positionierung in $(X, Y, Z, \psi, \theta) = (0, 0, 0, 0, 0)$.

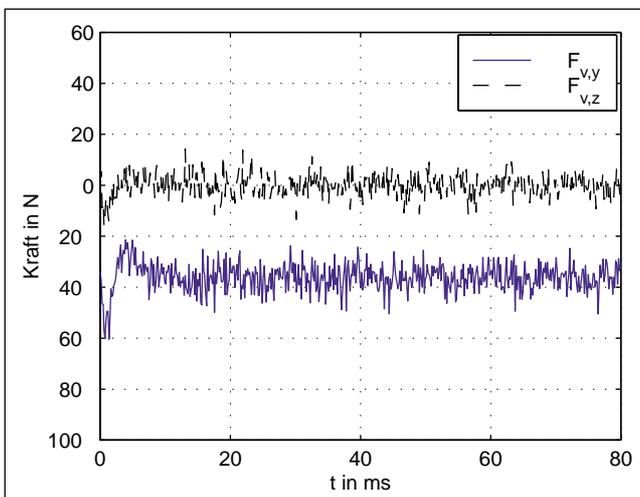


Bild 8: Kräfte in den vorderen Magnetlagern bei Freistellung, d.h. Positionierung der Hauptträgheitsachse.

schalten der Ströme entsprechend dem Vorzeichen der erforderlichen Kraft.

Der bei Kompensation der Restunwucht erreichte Positionfehler bei einer Positionierung in $(X, Y, Z, \psi, \theta) = (0, 0, 0, 0, 0)$ ist in Bild 6 dargestellt, die dazu erforderlichen Kräfte im vorderen Lager in Bild 7.

Betrachten wir schließlich den Fall der Freistellung der Spindel. Hier wird die Schätzung der aus der Unwucht resultierenden Bewegung des Massenmittelpunktes und der Hauptachsen in der Regelung verwendet, um die periodischen Kräfte – und damit die Vibrationen des Aufbaus – zu reduzieren; siehe den Unterschied zwischen Bild 7 und Bild 8.

7 Zusammenfassung

Für den Entwurf nichtlinearer zeitdiskreter Regler und Beobachter für die magnetisch gelagerte Spindel kann die Flachheitseigenschaft des Modells ausgenutzt werden. Er-

ste eigene Experimente mit auf den vorgestellten Entwürfen aufbauenden Reglern und Beobachtern bestätigen ebenso den Wert der vorgestellten Verfahren wie auf ähnlichen Ansätzen beruhende Experimente in Frankreich [3; 5].

Danksagung

Die Arbeit entstand im Rahmen eines Forschungsprojekts mit der Firma Axomat G.m.b.H. in Berggießhübel, Sachsen. Das der Arbeit zugrundeliegende Vorhaben wurde aus EFRE-Mitteln der EU und aus Mitteln des Freistaates Sachsen (P-Nr. 5051) gefördert.

Literatur

- [1] *Fliess, M., J. Lévine, P. Martin und P. Rouchon:* Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples. *Int. J. Control*, 61(6):1327–1361, 1995.
- [2] *Freund, E.:* Zeitvariable Mehrgrößensysteme. Springer Verlag, Berlin, 1970.
- [3] *Lévine, J., J. Lottin und J.-C. Ponsart:* A Nonlinear Approach to the Control of Magnetic Bearings. *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 4 (5): 524–544, 1996.
- [4] *Martin, P. und P. Rouchon:* Flatness and sampling control of induction motors. In: *Proc. 13th IFAC-World Congress*, San Francisco, USA, 1996.
- [5] *Ponsart, J.-Ch.:* Asservissements numériques de paliers magnétiques. Application aux pompes à vide. Dissertation, Université de Savoie, Annecy, Frankreich, 1996.
- [6] *Rothfuß, R., J. Rudolph und M. Zeitz:* Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme. *Automatisierungstechnik*, 45 (11): 517–525, 1997.
- [7] *Schweitzer, G., A. Traxler und H. Bleuler:* Magnetlager. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.

Manuskripteingang: 27. August 1999.



Dr. Joachim Rudolph ist als Stipendiat im Habilitandenprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie der TU Dresden bei Prof. K. Reinschke tätig. Hauptarbeitsfelder: Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Regelstrecken, algebraische Methoden, lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme.

Adresse: Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, Technische Universität Dresden, Mommsenstr. 13, D-01062 Dresden,
E-Mail: rudolph@erss11.et.tu-dresden.de



Dipl.-Ing. Frank Woittennek studierte Elektrotechnik an der Technischen Universität Dresden und schloß sein Studium mit einer Diplomarbeit am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie ab.

Adresse: Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, Technische Universität Dresden, Mommsenstr. 13, D-01062 Dresden,
E-Mail: woittenn@eatns1.et.tu-dresden.de



Dipl.-Ing. Johannes von Löwis ist Stipendiat der sächsischen Landesgraduiertenförderung am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie der Technischen Universität Dresden bei Prof. K. Reinschke. Hauptarbeitsfeld: Nichtlineare Regelung elektromechanischer Systeme.

Adresse: Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, Technische Universität Dresden, Mommsenstr. 13, D-01062 Dresden,
E-Mail: loewis@erss11.et.tu-dresden.de