

# Flachheitsbasierte Randsteuerung von elastischen Balken mit Piezoaktuatoren

## Flatness based Boundary Control of Piezoelectric Benders

Joachim Rudolph und Frank Woittennek

---

Für elastische Balken mit Piezoaktuatoren werden flachheitsbasierte Randsteuerungen entworfen, die eine Positionierung in endlicher Einstellzeit gestatten. Dabei werden sowohl Euler-Bernoulli-Balken als auch Timoshenko-Balken untersucht. Steuerungen für Balken mit mehreren Piezoaktuatoren werden durch Superposition berechnet. Die Methoden werden durch die Ergebnisse von Simulationen und eines Experiments illustriert.

A flatness based approach to the boundary control of piezoelectric benders is presented. Both, the Euler-Bernoulli beam model and the Timoshenko beam model are considered. With the proposed method finite time transitions between two steady states can be achieved. For beams with more than one piezoelectric actuator the control can be calculated by superposing single actuator case solutions. Results from simulations and an experiment are presented.

---

### 1 Einleitung

Piezoaktuatoren auf elastischen Strukturen können außer zur Schwingungsdämpfung auch zur gezielten Positionierung eingesetzt werden. Dann stehen die Bewegungsplanung anhand von Referenztrajektorien und die Berechnung einer Vorsteuerung im Vordergrund. Zur Lösung dieser Steuerungsaufgabe eignet sich das ursprünglich im Rahmen des modultheoretischen Zugangs zu linearen Totzeitsystemen [5] eingeführte Konzept der  $\pi$ -Freiheit, das ähnlich wie der flachheitsbasierte Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme mit konzentrierten Parametern [3; 21] die Parametrierbarkeit sämtlicher Systemtrajektorien durch die Trajektorie für einen so genannten flachen Ausgang ausnutzt und so eine effiziente Bewegungsplanung ermöglicht [6; 7; 18; 19].

Die Anwendung des Operatorenkalküls von Mikusiński [16; 17], siehe auch [22], und die daraus resultierende Verallgemeinerung der  $\pi$ -Freiheit eröffnen Möglichkeiten zum Entwurf von Steuerungen für weitere Systeme mit verteilten Parametern. Die Lösungen parabolischer Differentialgleichungen, wie sie zum Beispiel bei der Beschreibung von Wärmeleitungsvorgängen [13] und chemischen Rohrreaktoren [9; 14; 15] auftreten, sind durch konvergente Reihen darstellbar, in denen Zeitableitungen beliebiger Ordnung des flachen Ausgangs auftreten. Im Gegensatz dazu führen hyperbolische Systeme, wie Wärmetauschermodelle [22], die allgemeine Telegraphengleichung [4] oder die Bewegungsgleichungen von schweren Seilen [20] auf Faltungs-

integrale mit kompaktem Kern und sind als Systeme mit verteilten Totzeiten und Prädiktionen interpretierbar.

Zur Beschreibung des Verhaltens elastischer Balken stehen verschiedene Modelle zur Verfügung. Verwendet man die biharmonische Euler-Bernoulli-Differentialgleichung, auf deren Grundlage bereits flachheitsbasierte Steuerungen für elastische Roboterarme [2; 8; 12] aber auch für die in dieser Arbeit untersuchten Balken mit Piezoaktuatoren [11] entworfen wurden, erhält man eine Reihendarstellung wie bei parabolischen Systemen. Das die Schubdeformation berücksichtigende, durch zwei gekoppelte hyperbolische Differentialgleichungen repräsentierte Timoshenko-Modell führt dagegen auf eine Darstellung mit verteilten Totzeiten und Prädiktionen [23].

Im folgenden Abschnitt wird für eine einfache Aktuator-konstellation eine Steuerung auf Basis des Timoshenko-Balkenmodells entworfen und mit Simulationsergebnissen unterlegt. Von den Ergebnissen des zweiten Abschnitts ausgehend, wird in Abschnitt 3 eine Steuerung für einen Euler-Bernoulli-Balken berechnet, deren Nutzen durch das Ergebnis eines Experiments bestätigt wird. Der vierte Abschnitt behandelt Euler-Bernoulli-Balken mit allgemeinerer Aktuatorkonstellation. Zunächst werden Balken untersucht, die nur partiell als Aktuator ausgebildet sind. Unter Verwendung der dabei abgeleiteten Ergebnisse wird anhand eines einfachen Beispiels demonstriert, wie durch Superposition der Steuerungsentwurf für Balken mit mehreren Aktuatoren erfolgen kann. Auch dieses Beispiel wird mit dem Ergebnis einer Simulation illustriert.

## 2 Timoshenko-Balken

### 2.1 Bewegungsgleichungen

Ein einseitig eingespannter Balken der Länge  $l$  mit rechteckigem Querschnitt der Breite  $b$  und Dicke  $d$  besteht aus zwei piezoelektrischen Laminaten (siehe Bild 1). Seine Oberfläche wird beidseitig vollständig und gleichmäßig von Elektroden bedeckt, an die die als Stellgrößen verwendeten Spannungen  $V$  angelegt werden. Am freien Ende des Balkens ist eine als Punktmasse  $\tilde{m}$  modellierte Last befestigt. Die Bewegungsgleichungen für den Timoshenko-Balken lauten

$$\begin{aligned} 0 &= (A\rho) \tilde{w}_t(\tilde{x}, t) - (GA_s) (\tilde{\varphi}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, t) + \tilde{w}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}, t)) \\ 0 &= (I\rho) \tilde{\varphi}_t(\tilde{x}, t) - (EI) \tilde{\varphi}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tilde{x}, t) \\ &\quad + (GA_s) (\tilde{\varphi}(\tilde{x}, t) + \tilde{w}_{\tilde{x}}(\tilde{x}, t)) \end{aligned} \quad (1)$$

mit  $0 \leq \tilde{x} \leq l$  und  $t \geq 0$ . Hier bezeichnen  $\tilde{\varphi}$  die Verdrehung der Querschnittsflächen und  $\tilde{w}$  die Auslenkung der Flächenschwerpunkte. Beide sind sowohl von der Zeit  $t$  als auch von der Ortskoordinate  $\tilde{x}$  abhängig. Die konstanten Parameter  $(A\rho)$ ,  $(I\rho)$ ,  $(EI)$  und  $(GA_s)$  werden mit

$$\begin{aligned} (A\rho) &= b \int_{-d/2}^{d/2} \rho(\tilde{z}) d\tilde{z}, & (I\rho) &= b \int_{-d/2}^{d/2} \tilde{z}^2 \rho(\tilde{z}) d\tilde{z}, \\ (EI) &= b \int_{-d/2}^{d/2} \tilde{z}^2 E(\tilde{z}) d\tilde{z}, & (GA_s) &= bk \int_{-d/2}^{d/2} G(\tilde{z}) d\tilde{z} \end{aligned}$$

berechnet, wobei die Dichte  $\rho$ , der Elastizitätsmodul  $E$  und der Schubmodul  $G$  von der  $\tilde{z}$ -Koordinate abhängig sein können, da der Balken aus einem Laminat verschiedener Materialien besteht. Mit  $k$  wird ein querschnittsabhängiger Korrekturfaktor bezeichnet. Die Randbedingungen sind durch

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(0, t) &= \tilde{w}(0, t) = 0 \\ (EI) \tilde{\varphi}_x(l, t) &= M(t) \\ (GA_s) (\tilde{w}_x(l, t) + \tilde{\varphi}(l, t)) &+ \tilde{m} \tilde{w}_t(l, t) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

gegeben. Der Zusammenhang zwischen dem Moment  $M$  und der an den Elektroden angelegten Spannung  $V$  ist linear:

$$M(t) = cV(t).$$

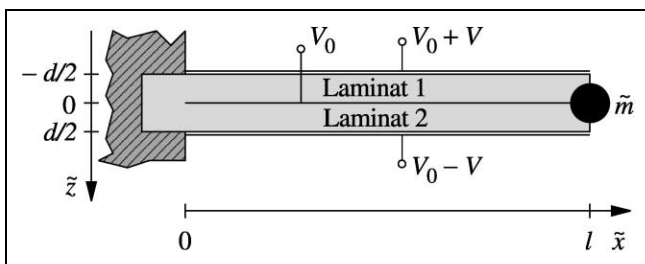


Bild 1: Piezoaktuator.

Dabei hängt die Konstante  $c$  von den Abmessungen des Balkens, von den piezoelektrischen und elastischen Eigenschaften der Aktuator-schichten und der Art der Ansteuerung der einzelnen Schichten ab. Ausführlichere Darstellungen zur Modellierung sind beispielsweise in [1; 10; 11] zu finden.

Die Anfangsbedingungen seien durch die Ruhelage  $\tilde{w}(x, 0) = \tilde{\varphi}(x, 0) = 0$  gegeben<sup>1</sup> (d. h.  $\tilde{w}_t(x, 0) = \tilde{\varphi}_t(x, 0) = 0$ ).

Mithilfe der Skalierungen

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^+ \ni \tau &= \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{(EI)}{(A\rho)}} t, & [0, 1] \ni x &= \frac{\tilde{x}}{l} \\ u(\tau) &= l^2 \frac{M(t)}{(EI)}, & \varphi(x, \tau) &= I \tilde{\varphi}(\tilde{x}, t), & w(x, \tau) &= \tilde{w}(\tilde{x}, t) \end{aligned}$$

geht das Modell (1, 2) nach Einführen der neuen Parameter

$$\begin{aligned} \mu_p &= \frac{1}{2l^2} \left( \frac{(I\rho)}{(A\rho)} + \frac{(EI)}{(GA_s)} \right), \\ \mu_n &= \frac{1}{2l^2} \left( \frac{(I\rho)}{(A\rho)} - \frac{(EI)}{(GA_s)} \right), & m &= \frac{1}{lA\rho} \tilde{m} \end{aligned}$$

in

$$0 = (\mu_p - \mu_n) \ddot{w} - (\varphi' + w'') \quad (3a)$$

$$0 = (\mu_p^2 - \mu_n^2) \ddot{\varphi} - (\mu_p - \mu_n) \varphi'' + (\varphi + w') \quad (3b)$$

mit den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \varphi(0, \tau) &= w(0, \tau) = 0 \\ \varphi'(1, \tau) &= u(\tau) \\ w'(1, \tau) + \varphi(1, \tau) + m(\mu_p - \mu_n) \dot{w}(1, \tau) &= 0 \end{aligned}$$

über<sup>2</sup>. Darin spielt  $u$  die Rolle einer normierten Stellgröße.

Mittels einiger elementarer Umformungen gelangt man zu dem nur noch einseitig gekoppelten partiellen Differentialgleichungssystem

$$\varphi' = (\mu_p - \mu_n) \ddot{w} - w'' \quad (4a)$$

$$0 = (\mu_p^2 - \mu_n^2) w^{(4)} - 2\mu_p \ddot{w}'' + w'' + \ddot{w} \quad (4b)$$

mit den Randbedingungen

$$0 = w(0, \tau) \quad (5a)$$

$$0 = w'(0, \tau) - (\mu_p - \mu_n)^2 \dot{w}'(0, \tau) + (\mu_p - \mu_n) w'''(0, \tau) \quad (5b)$$

<sup>1</sup> Die Lösung eines Rand- und Anfangswertproblems mit beliebigen stationären Anfangsbedingungen erhält man infolge der Linearität des Modells mittels Superposition.

<sup>2</sup> Die Ableitungen nach der normierten Ortskoordinate  $x$  werden nachfolgend als hochgestellte römische Zahlen notiert, während die Ableitungen nach der normierten Zeit  $\tau$  wie üblich durch Punkte (bis zur zweiten Ordnung) bzw. durch hochgestellte geklammerte arabische Zahlen (Ableitungen höherer Ordnung) gekennzeichnet werden.

$$u(\tau) = (\mu_p - \mu_n)\ddot{w}(1, \tau) - w''(1, \tau) \quad (5c)$$

$$0 = 2\mu_p \dot{w}'(1, \tau) - w'''(1, \tau) + m \left( \dot{w}(1, \tau) + (\mu_p^2 - \mu_n^2) w^{(4)}(1, \tau) \right). \quad (5d)$$

## 2.2 Lösung in Operatorform

Führt man für die Ableitung nach der normierten Zeit  $\tau$  den Operator  $s$  ein und bezeichnet mit  $\hat{\varphi}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$  und  $\hat{w}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{M}$  die  $\varphi$  und  $w$  entsprechenden Operatorfunktionen<sup>3</sup>, so geht (4), für die hier angenommenen Anfangsbedingungen, in das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\hat{\varphi}' = (\mu_p - \mu_n)s^2 \hat{w} - \hat{w}'' \quad (6a)$$

$$0 = s^2 \left( 1 + s^2 (\mu_p^2 - \mu_n^2) \right) \hat{w} - 2s^2 \mu_p \hat{w}'' + \hat{w}^{(4)} \quad (6b)$$

über. Die Randbedingungen (5) lauten in Operatorform

$$0 = \hat{w}(0) \quad (7a)$$

$$0 = (1 - s^2(\mu_p - \mu_n)^2) \hat{w}'(0) + (\mu_p - \mu_n) \hat{w}'''(0) \quad (7b)$$

$$\hat{u} = (\mu_p - \mu_n)s^2 \hat{w}(1) - \hat{w}''(1) \quad (7c)$$

$$0 = 2\mu_p s^2 \hat{w}'(1) - \hat{w}'''(1) + m s^2 \left( 1 + s^2 (\mu_p^2 - \mu_n^2) \right) \hat{w}(1). \quad (7d)$$

Die charakteristische Gleichung von (6b) hat die Wurzeln  $\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_4$  mit  $\hat{p}_3 = -\hat{p}_1$ ,  $\hat{p}_4 = -\hat{p}_2$  sowie

$$\hat{p}_1 = s\sqrt{\mu_p + \sqrt{\mu_n^2 - s^{-2}}}, \quad \hat{p}_2 = s\sqrt{\mu_p - \sqrt{\mu_n^2 - s^{-2}}}.$$

Somit kann die allgemeine Lösung von (6b) in der Form

$$\hat{w}(x) = \hat{K}_1 \hat{C}_1(x) + \hat{K}_2 \hat{S}_1(x) + \hat{K}_3 \hat{C}_2(x) + \hat{K}_4 \hat{S}_2(x) \quad (8)$$

geschrieben werden, wobei die Operatorfunktionen  $\hat{C}_1$ ,  $\hat{C}_2$ ,  $\hat{S}_1$  und  $\hat{S}_2$  wie folgt definiert sind<sup>4</sup>:

$$\hat{C}_1(x) = \frac{1}{2} (\cosh(x p_1) + \cosh(x p_2)) \quad (9a)$$

$$\hat{C}_2(x) = \frac{1}{p_1^2 - p_2^2} (\cosh(x p_1) - \cosh(x p_2)) \quad (9b)$$

$$\hat{S}_1(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sinh(x p_1)}{p_1} + \frac{\sinh(x p_2)}{p_2} \right) \quad (9c)$$

<sup>3</sup> Dies soll hier im Sinne von Mikusiński's Operatoralkül verstanden werden. Die Menge der stückweise stetigen Funktionen  $[0, \infty) \mapsto \mathbb{C}$ , ausgestattet mit der Addition und dem Faltungsprodukt, bildet einen kommutativen Ring  $\mathcal{C}$ , der, nach dem Satz von Titchmarsh, nullteilerfrei ist. Der Quotientenkörper  $\mathcal{M}$  von  $\mathcal{C}$  heißt Mikusiński-Körper, seine Elemente Operatoren. Wird eine Funktion  $f \in \mathcal{C}$  als Operator aus  $\mathcal{M}$  aufgefasst, so wird sie im Folgenden in der Form  $\hat{f}$  notiert. Der Operator  $s$  ist als inverses Element des der Heaviside-Funktion entsprechenden Operators  $l$  definiert. Die Rechenregeln entsprechen im Wesentlichen denen der Laplacetransformation [16; 17; 22].

<sup>4</sup> Die hier verwendeten Operatorfunktionen sind offensichtlich Linearkombinationen der die Differentialgleichung lösenden Exponentialfunktionen solcher Art, dass sie linear unabhängig sind und somit ein Fundamentalsystem von Lösungen bilden.

$$\hat{S}_2(x) = \frac{1}{p_1^2 - p_2^2} \left( \frac{\sinh(x p_1)}{p_1} - \frac{\sinh(x p_2)}{p_2} \right). \quad (9d)$$

Aus Gleichung (7a) folgt sofort  $\hat{K}_1 = 0$ . Unter Verwendung von

$$\hat{C}'_1(x) = s^2 \mu_p \hat{S}_1(x) + s^2 (s^2 \mu_n^2 - 1) \hat{S}_2(x), \quad \hat{S}'_1(x) = \hat{C}_1(x)$$

$$\hat{C}'_2(x) = \hat{S}_1(x) + s^2 \mu_p \hat{S}_2(x), \quad \hat{S}'_2(x) = \hat{C}_2(x)$$

erhält man aus (7b)

$$\hat{K}_4(\mu_p - \mu_n) = - (1 + s^2(\mu_p - \mu_n)\mu_n) \hat{K}_2.$$

Mit den Abkürzungen

$$\hat{C}_p(x) = \hat{C}_1(x) + \mu_n s^2 \hat{C}_2(x), \quad \hat{S}_p(x) = \hat{S}_1(x) + \mu_p s^2 \hat{S}_2(x)$$

$$\hat{C}_n(x) = \hat{C}_1(x) - \mu_n s^2 \hat{C}_2(x), \quad \hat{S}_n(x) = \hat{S}_1(x) - \mu_n s^2 \hat{S}_2(x)$$

folgt schließlich aus den beiden verbleibenden Randbedingungen (7c) und (7d)

$$\hat{u} = \frac{\hat{K}_2}{\mu_p - \mu_n} \hat{S}_p(1) - \hat{K}_3 \hat{C}_p(1) \quad (10a)$$

$$0 = \hat{K}_2 \left( \hat{C}_n(1) + m s^2 \left( (\mu_p - \mu_n) \hat{S}_n(1) - \hat{S}_2(1) \right) \right) + \hat{K}_3 s^2 (\mu_p - \mu_n) \left( m \hat{C}_2(1) + \hat{S}_2(1) \right). \quad (10b)$$

Es wird nun mittels

$$\hat{K}_2 = -(\mu_p - \mu_n) s^2 \left( m \hat{C}_2(1) + \hat{S}_2(1) \right) \hat{y}$$

$$\hat{K}_3 = \left( \hat{C}_n(1) + m s^2 \left( (\mu_p - \mu_n) \hat{S}_n(1) - \hat{S}_2(1) \right) \right) \hat{y}$$

eine neue Größe  $\hat{y}$  definiert. Gleichung (10b) ist damit erfüllt, während die normierte Stellgröße  $\hat{u}$  aus Gleichung (10a) berechnet werden kann:

$$\hat{u} = (\hat{D}_0 + m s^2 \hat{D}_m) \hat{y}$$

mit

$$\hat{D}_0 = -\hat{C}_p(1) \hat{C}_n(1) - s^2 \hat{S}_2(1) \hat{S}_p(1) \quad (11)$$

$$\hat{D}_m = -(\mu_p - \mu_n) \hat{C}_p(1) \hat{S}_n(1) - \hat{C}_2(1) \hat{S}_p(1) + \hat{C}_p(1) \hat{S}_2(1).$$

Aus dem Ansatz (8) erhält man nach Einsetzen der berechneten Koeffizienten  $\hat{K}_1, \dots, \hat{K}_4$  außerdem

$$\hat{w}(x) = \left( \hat{N}_{1,0}(x) + m s^2 \hat{N}_{1,m}(x) \right) \hat{y}$$

mit

$$\hat{N}_{1,0}(x) = \hat{C}_2(x) \hat{C}_n(1) + s^2 \hat{S}_2(1) \left( \hat{S}_2(x) - (\mu_p - \mu_n) \hat{S}_n(x) \right)$$

$$\hat{N}_{1,m}(x) = \hat{C}_2(1) \left( \hat{S}_2(x) - (\mu_p - \mu_n) \hat{S}_n(x) \right) -$$

$$\hat{C}_2(x) \left( \hat{S}_2(1) - (\mu_p - \mu_n) \hat{S}_n(1) \right). \quad (12)$$

Offensichtlich können die Größen  $\hat{u}$ ,  $\hat{w}$  und  $\hat{\varphi}$  aus  $\hat{y}$  berechnet werden. In Anlehnung an die Theorie der nichtlinearen

örtlich konzentrierten Systeme [3; 21] wird  $\hat{y}$  deshalb als flacher Ausgang<sup>5</sup> bezeichnet.

### 2.3 Berechnung der Steuerung

Für die Berechnung einer Lösung von (4, 5) im Zeitbereich werden zunächst die den, zu diesem Zweck als Summe von Exponentialfunktionen geschriebenen, Operatorfunktionen (9) entsprechenden Zeitfunktionen bestimmt. Zum Beispiel gilt<sup>6</sup>

$$\hat{S}_1(x) = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \hat{F}_{S_1} \left( x; (-1)^j \left| \frac{\mu_n}{\mu_p} \right|, (-1)^k \sqrt{\mu_p} \right)$$

mit der durch die Skalare  $\alpha \in \{\mu_n/\mu_p, -\mu_n/\mu_p\}$  und  $\gamma \in \{-\sqrt{\mu_p}, \sqrt{\mu_p}\}$  parametrisierten „elementaren Operatorfunktion“

$$\hat{F}_{S_1}(x; \alpha, \gamma) = \frac{\exp \left( x \gamma s \sqrt{1 + \alpha \sqrt{1 + \beta s^{-2}}} \right)}{s \gamma \sqrt{1 + \alpha \sqrt{1 + \beta s^{-2}}}} \quad (13)$$

und der Konstanten  $\beta = -\mu_n^{-2}$ . Die der Operatorfunktion  $\hat{F}_{S_1}$  entsprechende Zeitfunktion lautet<sup>7,8</sup>

$$F_{S_1}(x, \tau; \alpha, \gamma) = h(\tau + x\psi(1)) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!(2k)!} \frac{d^k}{d\zeta^k} \left[ \frac{(x\psi(\zeta) + \tau)^{2k}}{\psi(\zeta)} \right]_{\zeta=1}$$

mit

$$\psi(\zeta) = \gamma \sqrt{1 + \alpha \sqrt{\zeta}}$$

Diese Reihe konvergiert für alle  $(x, \tau) \in \mathbb{R}^2$  (siehe [23]).

Die zu den Operatorfunktionen (9) gehörenden Zeitfunktionen  $S_1, S_2, C_1$  und  $C_2$  besitzen kompakte Träger, ihre Funktionswerte verschwinden also außerhalb des Intervalls  $[-x\psi(1), x\psi(1)]$  (siehe [23]).

Damit haben auch die durch Faltung und Addition aus  $S_1, S_2, C_1, C_2$  gebildeten, den Operatoren (11) und Operatorfunktionen (12) entsprechenden Zeitfunktionen  $D_0, D_m, N_{1,0}$  und  $N_{1,m}$  kompakte Träger. Die Lösung des Randwertproblems kann deshalb mithilfe des flachen Ausgangs  $y$  als Faltungsintegral mit kompaktem Integralkern dargestellt werden<sup>9</sup>:

<sup>5</sup> Im Rahmen des modultheoretischen Zugangs in [5; 8; 22] spielt der flache Ausgang die Rolle einer Basis eines geeignet gewählten freien Moduls.

<sup>6</sup> Die folgenden Überlegungen beziehen sich zwar lediglich auf die Operatorfunktion  $\hat{S}_1$ , sind aber in gleicher Weise auf die übrigen Operatorfunktionen übertragbar.

<sup>7</sup> Mit  $\mathbb{R} \ni \tau \mapsto h(\tau) \in \{0, 1\}$  wird die Heaviside-Sprungfunktion bezeichnet.

<sup>8</sup> Die zur Auswertung des Ausdrucks benötigten Ableitungen können rekursiv exakt berechnet werden.

<sup>9</sup> Eine ähnliche Darstellung der Lösung eines hyperbolischen Systems wurde bereits in [22] bei der Untersuchung der Randsteuerung von Wärmetauschern diskutiert.

$$w(x, \tau) =$$

$$\int_{-(x+1)\psi(1)}^{(x+1)\psi(1)} (N_{1,0}(x, \xi)y(\tau - \xi) + m\dot{N}_{1,m}(x, \xi)\dot{y}(\tau - \xi)) d\xi \quad (14a)$$

$$u(\tau) = \int_{-2\psi(1)}^{2\psi(1)} (D_0(\xi)y(\tau - \xi) + m\dot{D}_m(\xi)\dot{y}(\tau - \xi)) d\xi. \quad (14b)$$

Die Funktionen  $N_{1,0}$  und  $\dot{N}_{1,m}$  sind stückweise stetig. Das Integral (14a) kann deshalb als verteilte Totzeit und Prädiktion interpretiert werden. In  $D_0$  und  $\dot{D}_m$  treten außerdem Ableitungen der Heaviside-Funktion auf, die Dirac-Distributionen im Sinne der Theorie von L. Schwartz entsprechen. Das Integral (14b) enthält folglich auch konzentrierte Totzeiten und Prädiktionen.

Die Trajektorie für den flachen Ausgang  $y$  muss differenzierbar sein<sup>10</sup>, kann aber ansonsten frei gewählt werden. Alle anderen Systemtrajektorien sind dadurch festgelegt und können mit den Gleichungen (14) berechnet werden.

Der Übergang zwischen zwei stationären Lösungen in der normierten Zeit  $\tau^*$  kann beispielsweise mit der  $(n+1)$ -mal ( $n \in \mathbb{N}$ ) differenzierbaren polynomialen Trajektorie

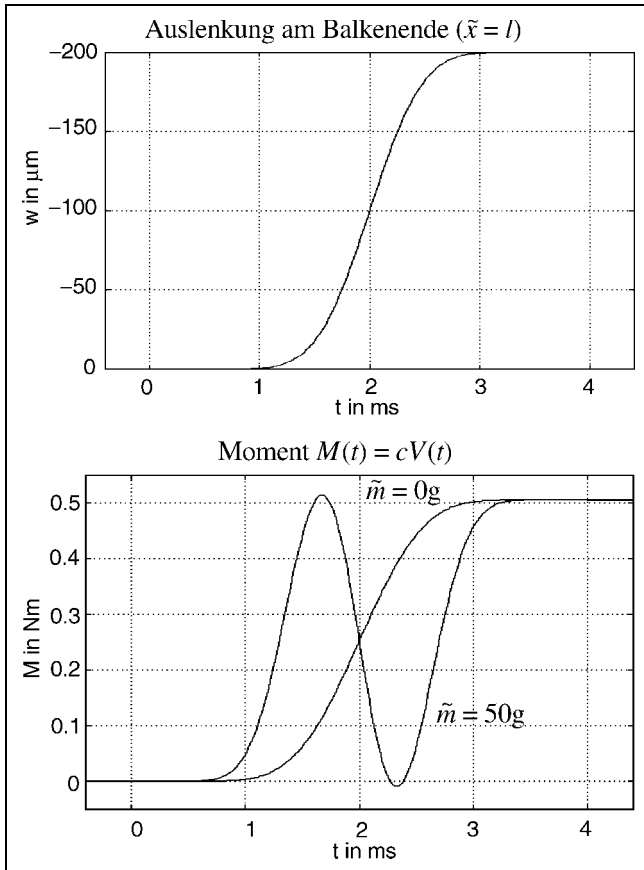
$$y(\tau) = y^* \frac{(2n+1)!}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(n-k)!k!(k+n+1)} \left( \frac{\tau}{\tau^*} \right)^{k+n+1}$$

parametriert werden. Dabei kann der Endwert  $y^*$  anhand der anzufahrenden stationären Lösung der Differentialgleichung, beispielsweise aus der Endposition des Balkenendes  $w^*$ , berechnet werden, die man als Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung (6, 7) mit  $s = 0$  und folglich durch Einsetzen von  $s = 0$  in (12) erhält.

### 2.4 Simulationsergebnis

Bild 2 zeigt die Ergebnisse der Simulation der Biegung eines Timoshenko-Balkens. Die Übergangszeit  $t^*$  beträgt  $4 \times 10^{-3}$  s. Die für die Simulation verwendeten Parameter sind aus Tabelle 1 zu entnehmen. Um ein möglichst gleichmäßiges Übergangsverhalten zu erzielen, wurde der Übergang durch eine polynomiale Trajektorie vom Grad 31 für den flachen Ausgang parametrisiert. Die Simulation wurde sowohl für den Fall ohne Last, als auch für eine punktuelle Last von  $\hat{m} = 50$  g am Balkenende durchgeführt. Während die Auslenkung des Balkenendes, wie aus Gleichung (12) ersichtlich, wegen  $\hat{N}_{1,m}(1) = 0$  davon nicht beeinflusst wird, erkennt man an den Trajektorien der zu den Stellgrößen  $V$  proportionalen Drehmomente deutlich die zur Beschleunigung und zum Abbremsen der Last notwendigen größeren Amplituden.

<sup>10</sup> Im Fall  $m = 0$  werden keinerlei Differenzierbarkeitsanforderungen an die Trajektorie für den flachen Ausgang gestellt.



**Bild 2:** Simulationsergebnis für den Timoshenko-Balken.

**Tabelle 1:** Modellparameter.

Parameter	Wert
Länge $l$	3,5 cm
Dicke $d$	0,7 mm (Euler-Bernoulli)
	3 mm (Timoshenko)
Breite $b$	1,25 cm
Elastizitätsmodul $E$	55 GN/m <sup>2</sup>
Schubmodul $G$	21 GN/m <sup>2</sup>
Korrekturfaktor $k$	1,2
Dichte $\rho$	7900 kg/m <sup>3</sup>
Koeffizient $c$	$3,6 \times 10^{-4}$ Nm/V

### 3 Euler-Bernoulli-Balken

#### 3.1 Vereinfachungen in Modell und Lösung

Wird der Balken als schubstarr angenommen ( $(GA_s) \approx \infty$ ) und die Rotationsträgheit vernachlässigt ( $(I\rho) \approx 0$ ), so gelangt man vom Timoshenko-Balkenmodell zum Euler-Bernoulli-Balkenmodell. In normierten Koordinaten folgt dann<sup>11</sup>  $\mu_p = \mu_n = 0$ . Aus der Definition der Parameter  $\mu_p$  und  $\mu_n$  ist direkt ersichtlich, dass mit diesen An-

<sup>11</sup> Nimmt man den Balken als schubstarr an, berücksichtigt aber die Rotationsträgheit, so gelangt man mit  $\mu_p = \mu_n \neq 0$  zum in dieser Arbeit nicht behandelten Modell des Rayleigh-Balkens.

nahmen vor allem das Verhalten langer dünner Balken gut approximiert wird. Aus Gleichung (3a) folgt damit  $\varphi + w_x = 0$  und (4b) vereinfacht sich zur Euler-Bernoulli-Differentialgleichung

$$0 = w^{IV} + \ddot{w}. \tag{15}$$

Aus den Randbedingungen (5) folgt

$$w(0, \tau) = w'(0, \tau) = 0$$

$$u(\tau) + w''(1, \tau) = w'''(1, \tau) - m\dot{w}(1, \tau) = 0.$$

Die Operatorform der Lösung dieses Randwertproblems erhält man direkt aus (12) und (11) zu

$$\hat{u} = \hat{D}^* \hat{y} \quad \text{und} \quad \hat{w}(x) = \hat{N}_1^*(x) \hat{y},$$

wobei  $\hat{D}^*$  und  $\hat{N}_1^*$  durch Einsetzen von  $\mu_p = \mu_n = 0$  aus  $\hat{D}_0 + ms^2 \hat{D}_m$  und  $\hat{N}_{1,0} + ms^2 \hat{N}_{1,m}$  hervorgehen:

$$\begin{aligned} \hat{D}^* &= -\hat{C}_1^*(1)^2 - s^2 \hat{S}_2^*(1) \hat{S}_1^*(1) \\ &ms^2 \left( \hat{C}_1^*(1) \hat{S}_2^*(1) - \hat{C}_2^*(1) \hat{S}_1^*(1) \right) \end{aligned} \tag{16a}$$

$$\begin{aligned} \hat{N}_1^*(x) &= \hat{C}_2^*(x) \hat{C}_1^*(1) + s^2 \hat{S}_2^*(1) \hat{S}_2^*(x) \\ &+ ms^2 \left( \hat{C}_2^*(1) \hat{S}_2^*(x) - \hat{C}_2^*(x) \hat{S}_2^*(1) \right). \end{aligned} \tag{16b}$$

Analog erhält man die Operatorfunktionen  $\hat{C}_1^*, \dots, \hat{S}_2^*$  durch Auswerten der Definitionsgleichungen (9):

$$\hat{S}_1^*(x) = \frac{\sinh(\sqrt{is}x) + \sin(\sqrt{is}x)}{2\sqrt{is}} \tag{17a}$$

$$\hat{S}_2^*(x) = \frac{\sinh(\sqrt{is}x) - \sin(\sqrt{is}x)}{2(is)^{3/2}} \tag{17b}$$

$$\hat{C}_1^*(x) = \frac{\cosh(\sqrt{is}x) + \cos(\sqrt{is}x)}{2} \tag{17c}$$

$$\hat{C}_2^*(x) = \frac{\cosh(\sqrt{is}x) - \cos(\sqrt{is}x)}{2is}. \tag{17d}$$

Durch Anwenden von Additionstheoremen folgt aus (16)

$$\begin{aligned} \hat{N}_1^*(x) &= \\ &\frac{1}{4} \left[ 2\hat{C}_2^*(x-1) + (1+i)\hat{C}_2^*(x-i) + (1-i)\hat{C}_2^*(x+i) + \right. \\ &\quad \left. m \left( 2\hat{S}_1^*(1-x) + (1-i)\hat{S}_1^*(x-i) + (1+i)\hat{S}_1^*(x+i) \right) \right] \\ \hat{D}^* &= \frac{1}{2} \left( ms^2(1+i)\hat{S}_2^*(1+i) - 1 - \hat{C}_1^*(1+i) \right). \end{aligned} \tag{18}$$

### 3.2 Berechnung der Steuerung

Die Operatorfunktionen in (17) können in Potenzreihen entwickelt werden:

$$\hat{C}_1^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n}}{(4n)!} s^{2n}, \quad \hat{S}_1^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(4n+1)!} s^{2n}, \quad (19)$$

$$\hat{C}_2^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+2}}{(4n+2)!} s^{2n}, \quad \hat{S}_2^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(4n+3)!} s^{2n}.$$

Der Übergang in den Zeitbereich erfolgt anschließend durch Ersetzen der Potenzen des Operators  $s$  durch die entsprechenden Zeitableitungen. Man erhält mit der Abkürzung  $\xi = 1 + ix$  aus (18)

$$w(x, \tau) =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{((1-x)^{4n+2} + \Re\{\xi^{4n+2}\} + \Im\{\xi^{4n+2}\})}{(4n+2)!} y^{(2n)} + \frac{m}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{((1-x)^{4n+1} + \Re\{\xi^{4n+1}\} - \Im\{\xi^{4n+1}\})}{(4n+1)!} y^{(2n)} \quad (20a)$$

$$u(\tau) = -\frac{1}{2} \left( y + \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{4^n}{4n!} y^{(2n)} + \frac{m 4^{n+1}}{(4n+3)!} y^{(2n+2)} \right) \right). \quad (20b)$$

Die Trajektorie für den flachen Ausgang muss im Gegensatz zum Timoshenko-Modell unendlich oft differenzierbar sein. Da eine analytische Trajektorie schon durch die Anfangsbedingungen  $y^{(n)}(0)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  eindeutig bestimmt wäre, muss als Trajektorie für den flachen Ausgang eine nicht-analytische Funktion gewählt werden. Um andererseits die Konvergenz der Reihen sicherzustellen, wird an die gewählte Trajektorie außerdem die Forderung

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}^+} |y^{(k)}(\tau)| \leq m \frac{(n!)^\alpha}{\gamma^k} \quad \text{mit } \alpha < 2, \quad k \geq 0$$

gestellt, wobei  $\alpha$  als Gevrey-Klasse bezeichnet wird (siehe [14]).

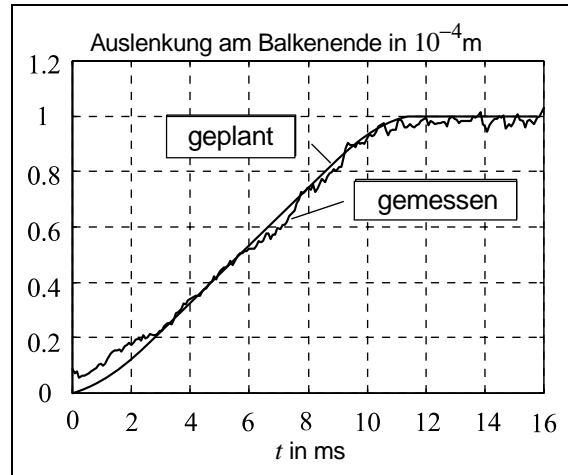
Die Funktion

$$\vartheta(\xi; \sigma) = \frac{1}{2} \left( 1 + \tanh \left( \frac{2(2\xi - 1)}{(4\xi(1 - \xi))^\sigma} \right) \right) \quad (21)$$

ist eine Funktion der Gevrey-Klasse  $\alpha = 1 + \sigma^{-1}$ . Außerdem verschwinden alle ihre Ableitungen bei  $\xi = 0$  und  $\xi = 1$ . Die Trajektorie

$$y(\tau) = y^* \vartheta \left( \frac{\tau}{\tau^*}; \sigma \right), \quad \sigma > 1$$

für den flachen Ausgang eignet sich deshalb zur Parametrierung eines Übergangs zwischen zwei stationären Lösungen in der Zeit  $\tau^*$ .



**Bild 3:** Steuerung eines als Euler-Bernoulli-Balken modellierten Piezo-Biegers [11].

### 3.3 Experiment

Bild 3 zeigt das Ergebnis eines am Institut für Regelungstechnik und elektrische Antriebe der Johannes Kepler Universität Linz durchgeführten Experiments. Die Parameter des verwendeten Versuchsaufbaus entsprechen denen in Tabelle 1. Aufgrund der im Verhältnis zur Länge sehr geringen Dicke des Balkens ist das Euler-Bernoulli-Modell zur Berechnung der Steuerung sehr gut geeignet. Es befand sich keine Last am freien Ende ( $\tilde{m} = 0$  g). Die Übergangszeit  $t^*$  beträgt 12 ms. Die Reihenentwicklung (19) wurde nach 5 Termen abgebrochen. Bild 3 zeigt eine sehr gute Übereinstimmung zwischen der gemessenen und der geplanten Trajektorie der Auslenkung des Balkenendes.

## 4 Allgemeinere Aktuatoranordnungen

### 4.1 Partiiell als Piezoaktor ausgebildeter Balken

In diesem Abschnitt wird eine Steuerung für den in Bild 4 skizzierten Balken berechnet. Die normierte Stellgröße  $u$  greift hier nicht mehr am rechten Rand des Balkens an, sondern am Rand des Aktuators bei  $x = a$ . Als Modell dient der schubstarre Euler-Bernoulli-Balken, wobei die im zweiten Abschnitt eingeführten Normierungen verwendet werden.

Zerlegt man den Balken in zwei Abschnitte<sup>12</sup>

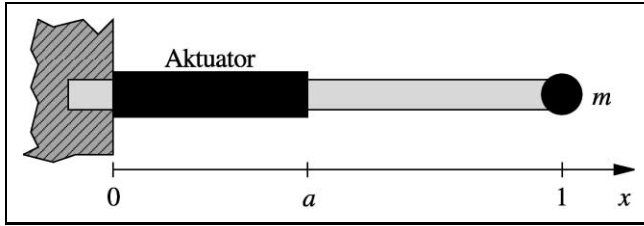
$$w(x, \tau) = (h(0) - h(a))w_1(x, \tau) + (h(a) - h(1))w_2(x, \tau),$$

so muss die Euler-Bernoulli-Differentialgleichung in beiden Abschnitten erfüllt sein:

$$w_1^{IV}(x, \tau) + \ddot{w}_1(x, \tau) = 0, \quad x \in [0, a]$$

$$w_2^{IV}(x, \tau) + \ddot{w}_2(x, \tau) = 0, \quad x \in [a, 1].$$

<sup>12</sup> Auch hier wird mit  $h$  die Heaviside-Funktion bezeichnet.



**Bild 4:** Balken mit Aktuator im Abschnitt  $[0, a]$  und Last am freien Ende.

Die Randbedingungen sind durch

$$w_1(0, \tau) = w_1'(0, \tau) = 0 \quad (22a)$$

$$w_2'''(1, \tau) - m\ddot{w}_2(1, \tau) = w_2''(1, \tau) = 0 \quad (22b)$$

gegeben. Außerdem sind die beiden Teillösungen  $w_1$  und  $w_2$  über die Anschlussbedingungen

$$\begin{aligned} w_1(a, \tau) &= w_2(a, \tau), & w_1'(a, \tau) &= w_2'(a, \tau) \\ w_1''(a, \tau) + u(\tau) &= w_2''(a, \tau), & w_1'''(a, \tau) &= w_2'''(a, \tau) \end{aligned} \quad (22c)$$

verknüpft.

Die Lösung der zugeordneten Randwertaufgabe in Operatorform kann mit  $\zeta = x - a$  als

$$\hat{w}_1(x) = \hat{K}_1 \hat{C}_1^*(x) + \hat{K}_2 \hat{S}_1^*(x) + \hat{K}_3 \hat{C}_2^*(x) + \hat{K}_4 \hat{S}_2^*(x) \quad (23)$$

$$\hat{w}_2(x) = \hat{K}_5 \hat{C}_1^*(\zeta) + \hat{K}_6 \hat{S}_1^*(\zeta) + \hat{K}_7 \hat{C}_2^*(\zeta) + \hat{K}_8 \hat{S}_2^*(\zeta)$$

angesetzt werden, wobei die Operatoren  $\hat{C}_1^*, \dots, \hat{S}_2^*$  denen aus dem vorangegangenen Abschnitt entsprechen. Aus den ersten beiden Randbedingungen (22a) folgt  $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 0$ .

Damit erhält man aus den Anschlussbedingungen (22c)

$$\begin{aligned} \hat{K}_5 &= \hat{K}_3 \hat{C}_2^*(a) + \hat{K}_4 \hat{S}_2^*(a) \\ \hat{K}_6 &= \hat{K}_4 \hat{C}_2^*(a) + \hat{K}_3 \hat{S}_2^*(a) \\ \hat{K}_7 &= \hat{u} + \hat{K}_3 \hat{C}_1^*(a) + \hat{K}_4 \hat{S}_1^*(a) \\ \hat{K}_8 &= \hat{K}_4 \hat{C}_1^*(a) - \hat{K}_3 s^2 \hat{S}_2^*(a). \end{aligned} \quad (24)$$

Die verbleibenden Randbedingungen (22b) liefern nach Einsetzen von  $\hat{K}_5, \dots, \hat{K}_8$  schließlich

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{C}_1^*(1) \hat{K}_3 + \hat{S}_1^*(1) \hat{K}_4 + \hat{C}_1^*(a-1) \hat{u} \\ 0 &= -s^2 (m \hat{C}_2^*(1) + \hat{S}_2^*(1)) \hat{K}_3 + (\hat{C}_1^*(1) - m s^2 \hat{S}_2^*(1)) \hat{K}_4 \\ &\quad + s^2 (S_2(a-1) + m \hat{C}_2^*(1-a)) \hat{u}. \end{aligned}$$

Ein flacher Ausgang  $\hat{y}$  kann mittels

$$\begin{aligned} \hat{u} &= - \left[ \hat{C}_1^*(1) \left( \hat{C}_1^*(1) - m s^2 \hat{S}_2^*(1) \right) \right. \\ &\quad \left. + s^2 \hat{S}_1^*(1) \left( m \hat{C}_2^*(1) + \hat{S}_2^*(1) \right) \right] \hat{y} \end{aligned}$$

eingeführt werden. Damit erhält man für die Koeffizienten  $\hat{K}_3$  und  $\hat{K}_4$

$$\begin{aligned} \hat{K}_3 &= \left[ \left( \hat{C}_1^*(1) - m s^2 \hat{S}_2^*(1) \right) \hat{C}_1^*(a-1) - \right. \\ &\quad \left. \hat{S}_1^*(1) s^2 \left( S_2(a-1) + m \hat{C}_2^*(1-a) \right) \right] \hat{y} \\ \hat{K}_4 &= \left[ s^2 \left( m \hat{C}_2^*(1) + \hat{S}_2^*(1) \right) \hat{C}_1^*(a-1) + \right. \\ &\quad \left. \hat{C}_1^*(1) s^2 \left( S_2(a-1) + m \hat{C}_2^*(1-a) \right) \right] \hat{y}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{N}_a^-(x) &= \frac{1}{8} \left[ 2 \hat{C}_2^*(x-a) + \hat{C}_2^*(x+1-a-i) + \hat{C}_2^*(x+1-a+i) + (1+i) \hat{C}_2^*(x-ia) + (1-i) \hat{C}_2^*(x+ia) + \right. \\ &\quad \left. (1-i) \hat{C}_2^*(x-1-i+ia) + (1+i) \hat{C}_2^*(x-1+i-ia) + i \hat{C}_2^*(x-1+a-i) - i \hat{C}_2^*(x-1+a+i) \right] + \\ &\quad \frac{m}{8} \left[ 2 \hat{S}_1^*(x-1+i-ia) + 2 \hat{S}_1^*(x-1-i+ia) - (1-i) \hat{S}_1^*(x+1-a-i) - (1+i) \hat{S}_1^*(x+1-a+i) - \right. \\ &\quad \left. (1-i) \hat{S}_1^*(x-1-i+a) - (1+i) \hat{S}_1^*(x-1+i+a) \right] \\ \hat{N}_a^+(x) &= - \frac{1}{8} \left[ 2 \hat{C}_2^*(x-a) + \hat{C}_2^*(x-1-a-i) + \hat{C}_2^*(x-1-a+i) - (1+i) \hat{C}_2^*(x-ia) + (i-1) \hat{C}_2^*(x+ia) + \right. \\ &\quad \left. (i-1) \hat{C}_2^*(x-1-i+ia) - (1+i) \hat{C}_2^*(x-1+i-ia) - i \hat{C}_2^*(x-1-i+a) + i \hat{C}_2^*(x-1+i+a) \right] - \\ &\quad \frac{m}{8} \left[ (1+i) \hat{S}_1^*(x-1-a-i) + (1-i) \hat{S}_1^*(x-1-a+i) - 2 \hat{S}_1^*(x-1+i(1-a)) - 2 \hat{S}_1^*(x-1-i(1-a)) + \right. \\ &\quad \left. (1-i) \hat{S}_1^*(x-1+a-i) + (1+i) \hat{S}_1^*(x-1+a+i) \right] \end{aligned}$$

**Bild 5:** Operatorfunktionen für den Balken mit freiem Ende.

Die übrigen Koeffizienten können nun mit den Gleichungen (24) bestimmt und in den Ansatz (23) eingesetzt werden. Nach mehrmaligem Anwenden von Additionstheoremen erhält man so

$$\hat{u} = \hat{D}^* \hat{y} \tag{25a}$$

$$\hat{w} = \underbrace{[(h(0) - h(a))\hat{N}_a^-(x) + (h(a) - h(1))\hat{N}_a^+(x)]}_{\hat{N}_a^*(x)} \hat{y} \tag{25b}$$

mit den Operatorfunktionen  $\hat{N}_a^\pm$  entsprechend Bild 5. Interessant ist dabei die Tatsache, dass der den Zusammenhang zwischen dem flachen Ausgang  $\hat{y}$  und der normierten Stellgröße  $\hat{u}$  beschreibende Operator  $\hat{D}^*$  unabhängig von der Länge  $a$  des Aktuators ist.

Sowohl die Berechnung der zeitabhängigen Lösung als auch die Wahl der Trajektorie für den flachen Ausgang erfolgt unter Verwendung der Reihenentwicklungen (19) analog Abschnitt 3.

### 4.2 Balken mit mehreren Aktuatoren

Unter Verwendung der Ergebnisse des vorangegangenen Abschnitts können mittels Superposition Steuerungen für beliebige Akutorkonstellationen berechnet und zur Einstellung von stationären Lösungen der Randwertaufgabe genutzt werden. Dies wird im Folgenden anhand eines Beispiels mit zwei Stellgrößen demonstriert. Auf einem Euler-Bernoulli-Balken sind zwei Piezoaktuatoren entsprechend Bild 6 angeordnet. Die Biegelinie dieses abschnittsweise ansteuerbaren Balkens wird zur mathematischen Formulierung der Aufgabenstellung zunächst in fünf Abschnitte unterteilt:

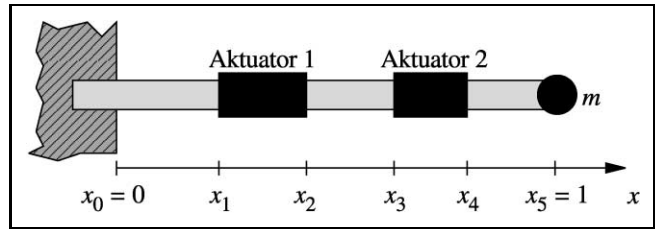
$$w(x, \tau) = \sum_{k=1}^5 (h(x - x_{k-1}) - h(x - x_k)) w_k(x, \tau).$$

Die Lösung soll auch hier der Euler-Bernoulli-Differentialgleichung genügen:

$$w_k^{IV} + \ddot{w}_k = 0, \quad (x, \tau) \in [x_{k-1}, x_k] \times \mathbb{R}^+, \quad k \in \{1, \dots, 5\}. \tag{26}$$

Die Rand- und Anschlussbedingungen lauten

$$\begin{aligned} w_1(0, \tau) &= w_1^I(0, \tau) = 0, & k \in \{1, \dots, 4\} \\ w_k(x_k, \tau) &= w_{k+1}(x_k, \tau), & k \in \{1, \dots, 4\} \\ w_k^I(x_k) &= w_{k+1}^I(x_k), & k \in \{1, \dots, 4\} \\ w_k^{III}(x_k, \tau) &= w_{k+1}^{III}(x_k, \tau), & k \in \{1, \dots, 4\} \\ w_{2k-1}^{II}(x_{2k-1}, \tau) &= w_{2k}^{II}(x_{2k-1}, \tau) + u_k(\tau), & k \in \{1, 2\} \\ w_{2k}^{II}(x_{2k}, \tau) &= w_{2k+1}^{II}(x_{2k}, \tau) - u_k(\tau), & k \in \{1, 2\} \\ w_5^{II}(1, \tau) &= 0, \quad w_5^{III}(1, \tau) = m\ddot{w}_5(1, \tau). \end{aligned}$$



**Bild 6:** Balken mit zwei Aktuatoren.

Schreibt man die Lösung dieser Randwertaufgabe in der Form

$$w_k(x, \tau) = \sum_{k=1}^4 (-1)^k v_k(x, \tau),$$

so müssen die auch hier abschnittsweise definierten Summanden

$$v_k(x, \tau) = (h(0) - h(x_k))v_{k,1}(x, \tau) + (h(x_k) - h(1))v_{k,2}(x, \tau)$$

in jedem Abschnitt der Euler-Bernoulli-Differentialgleichung sowie den folgenden Rand- und Anschlussbedingungen genügen:

$$\begin{aligned} v_{k,1}(0, \tau) &= v_{k,1}^I(0, \tau) = 0, & k \in \{1, \dots, 4\} \\ v_{k,1}(x_k, \tau) &= v_{k,2}(x_k, \tau), & k \in \{1, \dots, 4\} \\ v_{k,1}^I(x_k, \tau) &= v_{k,2}^I(x_k, \tau), & k \in \{1, \dots, 4\} \\ v_{k,1}^{III}(x_k, \tau) &= v_{k,2}^{III}(x_k, \tau), & k \in \{1, \dots, 4\} \\ v_{k,1}^{II}(x_k, \tau) &= v_{k,2}^{II}(x_k, \tau) - (-1)^k u_1(\tau), & k \in \{1, 2\} \\ v_{k,1}^{II}(x_k, \tau) &= v_{k,2}^{II}(x_k, \tau) - (-1)^k u_2(\tau), & k \in \{3, 4\} \\ v_{k,2}^{II}(1, \tau) &= 0, \quad v_{k,2}^{III}(1, \tau) = m\ddot{v}_{k,2}(1, \tau), & k \in \{1, \dots, 4\}. \end{aligned}$$

Da bei dieser Anordnung zwei Stellgrößen zur Verfügung stehen, können zwei Systemtrajektorien frei gewählt werden. Der flache Ausgang  $y$  hat deshalb ebenfalls zwei Komponenten,  $y_1$  und  $y_2$ , die hier mittels der Gleichungen

$$u_1(\tau) = D^* \left( \frac{d}{d\tau} \right) y_1(\tau), \quad u_2(\tau) = D^* \left( \frac{d}{d\tau} \right) y_2(\tau) \tag{27}$$

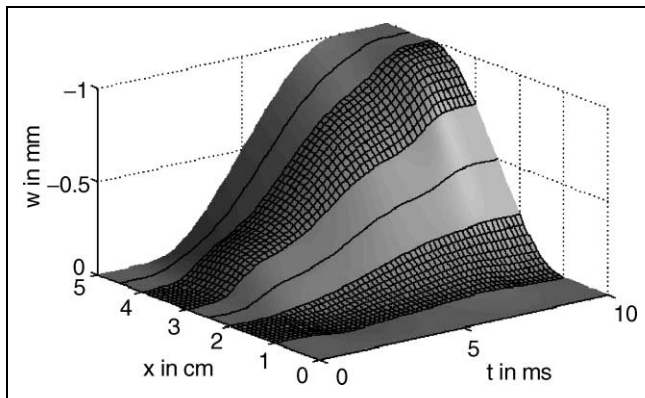
eingeführt werden, wobei  $D^*$  dem Operator  $\hat{D}^*$  aus Gleichung (18) entspricht.

Mithilfe der Ergebnisse aus den vorangegangenen Abschnitten erhält man nun auch die Biegelinie  $w$  in Abhängigkeit der Komponenten des flachen Ausgangs:

$$\begin{aligned} w(x, \tau) &= \left( N_{x_2}^* \left( x, \frac{d}{d\tau} \right) - N_{x_1}^* \left( x, \frac{d}{d\tau} \right) \right) y_1(\tau) \\ &+ \left( N_{x_4}^* \left( x, \frac{d}{d\tau} \right) - N_{x_3}^* \left( x, \frac{d}{d\tau} \right) \right) y_2(\tau). \end{aligned} \tag{28}$$

Hier entsprechen die  $N_{x_k}^*$  den Operatorfunktionen  $\hat{N}_{x_k}^*$  ( $k = 1, \dots, 4$ ) aus Gleichung (25b). Die Gleichungen (28) und (27) führen auf Reihendarstellungen analog (20).





**Bild 7:** Auslenkung  $\tilde{w}$ /mm eines Balkens mit zwei Aktuatoren.

Die Trajektorienplanung kann für beide Komponenten des flachen Ausgangs analog Abschnitt 3 durchgeführt werden, wobei hier die stationären Endwerte zweier Systemgrößen vorgegeben werden können, zum Beispiel der Auslenkungen zweier Punkte.

Für Balken mit mehreren Aktuatoren lassen sich so Steuerungen zur Einstellung beliebiger, der Euler-Bernoulli-Differentialgleichung und den gegebenen Rand- und Anschlussbedingungen genügender, stationärer Lösungen berechnen. Die Biegelinien sind dann aus Geraden- (in den Abschnitten ohne Aktuator) und Parabelstücken (in den Abschnitten mit Aktuator) zusammengesetzt.

In Bild 7 ist das Ergebnis der Simulation eines Übergangs zwischen zwei stationären Lösungen dargestellt. Zur Berechnung der Trajektorien für die beiden Komponenten des flachen Ausgangs wurden die Endauslenkungen von zwei Punkten  $x = 0,51$  und  $x = 0,91$  auf der Balkenachse vorgegeben. Die diesen Punkten zugeordneten Trajektorien, die mit Gleichung (28) aus den Trajektorien der Komponenten des flachen Ausgangs berechnet wurden, sind im Bild durch schwarze Linien gekennzeichnet. Die verwendeten physikalischen Parameter entsprechen bis auf die Länge  $l = 5$  cm denen aus Tabelle 1. Die Aktuatoren befinden sich in den Bereichen  $[0,2l, 0,4l]$  und  $[0,6l, 0,8l]$ . Im Bild entspricht das den durch die Gitter gekennzeichneten Bereichen.

## 5 Zusammenfassung

Die Trajektorien der Systemgrößen von durch Piezoaktuatoren angesteuerten Balken können durch die Trajektorien für einen so genannten flachen Ausgang parametrisiert werden. Dies ermöglicht eine effiziente Planung von Übergangsvorgängen und die Berechnung der dazu benötigten Stellensignale. Die unter Verwendung des Operatorenkalküls von Mikusiński erhaltenen Lösungen im Zeitbereich haben, je nach dem verwendeten Modell, gänzlich unterschiedlichen Charakter. Während das Timoshenko-Modell auf eine Lösung mit verteilten Totzeiten und Prädiktionen führt und somit kaum Differenzierbarkeitsanforderungen an die verwendete Trajektorie für den flachen Ausgang gestellt werden, erfordert die bei Verwendung des Euler-Bernoulli-

Modells erhaltene Reihendarstellung eine unendlich oft differenzierbare (nichtanalytische) Trajektorie für den flachen Ausgang.

Steuerungen für Balken mit mehreren Piezoaktuatoren erhält man durch Zerlegen des Modells in (einfachere) Konstellationen mit je einem Aktuator und anschließende Superposition der Teillösungen.

## Literatur

- [1] O.J. ALDRAIHEM, R.C. WETHERHOLD und T. SINGH: *Distributed Control of Laminated Beams: Timoshenko Theory vs. Euler-Bernoulli Theory*. Journal of Sound and Vibration, 8:149–157, 1997.
- [2] Y. Aoustin, M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph: *Theory and practice in the motion planning and control of a flexible robot arm using Mikusiński operators*. In: *Proc. 5th Symposium on Robot Control*, Seiten 287–293, Nantes, France, 1997.
- [3] M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin und P. Rouchon: *Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples*. Internat. J. Control, 61:1327–1361, 1995.
- [4] M. Fliess, Ph. Martin, N. Petit und P. Rouchon: *Commande de l'équation des télégraphistes et restauration active d'un signal*. Traitement du Signal, 15, Spécial:619–625, 1998.
- [5] M. Fliess und H. Mounier: *Controllability and observability of linear delay systems: an algebraic approach*. COCV (Control, Optimization and Calculus of Variations), 3:301–314, 1998. (URL: <http://www.emath.fr/COCV/>).
- [6] M. Fliess und H. Mounier: *Tracking control and  $\pi$ -freeness of infinite dimensional linear systems*. In: G. Picci und D.S. Gilliam (Herausgeber): *Dynamical Systems, Control, Coding, Computer Vision*, Seiten 45–68. Birkhäuser, 1999.
- [7] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph: *Controllability and motion planning for linear delay systems with an application to a flexible rod*. In: *Proc. 34th IEEE Conference on Decision and Control*, Seiten 2046–2051, New Orleans, 1995.
- [8] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph: *Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d'une poutre flexible*. In: *ESAIM Proc.*, Band 2, Seiten 183–193, 1997. (<http://www.emath.fr/proc>).
- [9] M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon und J. Rudolph: *Controlling the transient of a chemical reactor: a distributed parameter approach*. In: *Proc. Computational Engineering in Systems Application IMACS Multiconference, (CESA'98)*, Hammamet, Tunisia, 1998.
- [10] W. Haas, A. Kugi, K. Schlacher und M. Paster: *Experimental Results of the Control of Structures with Piezoelectric Actuators and Sensors*. In: G. Schweitzer, R. Siegwart und P. Cattin (Herausgeber): *The Fourth International Conference on Motion and Vibration Control*, Band 2, Seiten 393–398, 1998.
- [11] W. Haas und J. Rudolph: *Steering the deflection of a piezoelectric bender*. In: *Proc. 5th European Control Conference*, Karlsruhe, Germany, 1999.
- [12] D. Hisseine, B. Lohmann und A. Kuczyński: *Two control approaches for a flexible-link manipulator*. In: *Proc. IAS-TED Int. Conf. Robotics and Applications, RA'99*, Santa Barbara, CA, 1999.
- [13] B. Laroche, Ph. Martin und P. Rouchon: *Motion planning for the heat equation*. Int. J. Robust Nonlinear Control, 10:629–643, 2000.

- [14] A.F. LYNCH und J. RUDOLPH: *Flachheitsbasierte Randsteuerung parabolischer Systeme mit verteilten Parametern*. at – Automatisierungstechnik, 48:478–486, 2000.
- [15] A.F. LYNCH und J. RUDOLPH: *Flatness-based boundary control of a nonlinear parabolic equation modelling a tubular reactor*. In: A. ISIDORI, F. LAMNABHI-LAGARRIQUE und W. RESPONDEK (Herausgeber): *Nonlinear Control in the Year 2000 (Vol. 2)*, Band 259 der Reihe *Lecture Notes in Control and Inform. Sci.*, Seiten 45–54. Springer-Verlag, 2000.
- [16] J. MIKUSIŃSKI: *Operational Calculus*, Band 1. Pergamon, Oxford & PWN, Warszawa, 1983.
- [17] J. MIKUSIŃSKI und TH.K. BOEHME: *Operational Calculus*, Band 2. Pergamon, Oxford & PWN, Warszawa, 1987.
- [18] H. MOUNIER, J. RUDOLPH, M. FLIESS und P. ROUCHON: *Tracking control of a vibrating string with an interior mass viewed as delay system*. COCV (Control, Optimization and Calculus of Variations), 3:315–321, 1998. (<http://www.emath.fr/cocv/>).
- [19] H. MOUNIER, J. RUDOLPH, M. PETITOT und M. FLIESS: *A flexible rod as a linear delay system*. In: *Proc. 3rd European Control Conference*, Seiten 3676–3681, Rome, Italy, 1995.
- [20] N. PETIT und P. ROUCHON: *Flatness of heavy chain systems*. SIAM J. Control Optim., 40(2):475–495, 2001.
- [21] R. ROTHFUSS, J. RUDOLPH und M. ZEITZ: *Flachheit: Ein neuer Zugang zur Steuerung und Regelung nichtlinearer Systeme*. at – Automatisierungstechnik, 45:517–525, 1997.
- [22] J. RUDOLPH: *Randsteuerung von Wärmetauschern mit örtlich verteilten Parametern: Ein flachheitsbasierter Zugang*. at – Automatisierungstechnik, 48:399–406, 2000.
- [23] J. RUDOLPH und F. WOITTENNEK: *Flachheitsbasierte Steuerung eines Timoshenko-Balkens*. Z. Angew. Math. Mech., 2002. Zur Veröffentlichung angenommen.

Manuskripteingang: 30. Oktober 2001.



**Dr. Joachim Rudolph** ist Oberassistent am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie der TU Dresden (Prof. K. Reinschke).

Hauptarbeitsgebiete: Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Regelstrecken, algebraische Methoden, lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme.

Adresse: Technische Universität Dresden, Fakultät Elektrotechnik, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, D-01062 Dresden.

E-Mail: rudolph@erss11.et.tu-dresden.de



**Dipl.-Ing. Frank Woittennek** ist Stipendiat der sächsischen Landesgraduiertenförderung am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie der TU Dresden (Prof. K. Reinschke).

Hauptarbeitsgebiet: Steuerung und Regelung unendlichdimensionaler Systeme.

Adresse: siehe oben.

E-Mail: woittennek@erss11.et.tu-dresden.de

## UML mit Oldenbourg!

Bernd Oestereich  
**Objektorientierte Softwareentwicklung**  
 Analyse und Design mit der Unified Modeling Language  
 5., völlig überarbeitete Auflage 2001  
 € 44,80  
 DM 87,62  
 ISBN 3-486-25573-8



1. Preis  
 Leserwahl  
 Objekt-Spektrum  
 und  
 Java-Spektrum

Oldenbourg

Oldenbourg Wissenschaftsverlag  
 Rosenheimer Straße 145  
 D-81671 München  
 Telefon 089 / 4 50 51-265  
 Fax 089 / 4 50 51-204

Bestellungen:  
<http://www.oldenbourg-verlag.de>

Oldenbourg



## Sonderpreis für Stellenangebote!

50%  
 Rabatt

auf den regulären Anzeigenpreis  
 für jede Stellenanzeige in den Zeitschriften

**it+ti** – Informationstechnik und Technische Informatik,  
**at** – Automatisierungstechnik oder  
**i-com** – Zeitschrift für interaktive und  
 kooperative Medien



Oldenbourg Wissenschaftsverlag  
 Rosenheimer Straße 145  
 D-81671 München  
 Telefon 089 / 4 50 51-0  
 Fax 089 / 4 50 51-292  
 Mediadaten:  
[www.oldenbourg-verlag.de](http://www.oldenbourg-verlag.de)

Oldenbourg

