

Trajektorienplanung für die Steuerung gewisser linearer Systeme mit verteilten Parametern

Trajectory Planning for the Control of some Linear Distributed Parameter Systems

Joachim Rudolph und Frank Woittennek

Der Entwurf von Steuerungen und die Trajektorienplanung für lineare Systeme mit örtlich verteilten Parametern und konzentrierten Stelleingriffen können in gewissen Fällen auf der Basis von Potenzreihendarstellungen erfolgen. Es wird eine Methode vorgestellt, mit der diese Reihendarstellungen systematisch auch für solche partiellen Differentialgleichungen hergeleitet werden können, deren Koeffizienten von der Ortsvariablen abhängen. Als Anwendungsbeispiel für den Fall ortsabhängiger Koeffizienten wird eine ringförmige, dünne elastische Platte betrachtet, für die eine Steuerung entworfen wird, die der Platte ein umlaufendes Biegeprofil aufprägt.

In some cases, control design and trajectory planning for linear systems with spatially distributed parameters with lumped controls can be based on power series expansions. A systematic method for the calculation of these series representations is proposed, which can be applied in case of spatially varying coefficients of the partial differential equations also. As an application of this latter type, a thin elastic plate ring is considered for which a control is designed that generates a revolving bending profile.

Schlagwörter: Trajektorienplanung, Steuerungsentwurf, Reihenentwicklung, elastische Platte

Keywords: Trajectory planning, feedforward control design, series expansion, elastic plate

1 Einleitung

Eine ringförmige, dünne elastische Platte, die am inneren Rand eingespannt und am äußeren frei beweglich ist, wird mit örtlich geeignet gewichteten, konzentrierten Stellgrößen angesteuert. Wie müssen dann die Zeitverläufe für die Stellgrößen gewählt werden, um aus einer Ruhelage ein Regime zu erreichen, in dem ein Biegeprofil (vgl. Bild 1) mit vorgegebener Winkelgeschwindigkeit umläuft? Die in Abschnitt 5 gegebene Antwort auf diese Frage illustriert den Nutzen der in diesem Beitrag vorgestellten Entwurfsmethode.

Diese weitreichende Methode gestattet es, systematisch Steuerungen für gewisse lineare Systeme mit verteilten Parametern und konzentrierten Stelleingriffen zu entwerfen. Das sind solche Systeme, für deren Lösungen Reihendarstellungen in Abhängigkeit von Zeitableitungen so genann-

ter Basisgrößen möglich sind. Insbesondere können mit der vorgestellten Methode auch solche Probleme gelöst werden, bei denen in den partiellen Differentialgleichungen (pDgl.) ortsabhängige Koeffizienten auftreten. Dazu wird folgendermaßen vorgegangen.

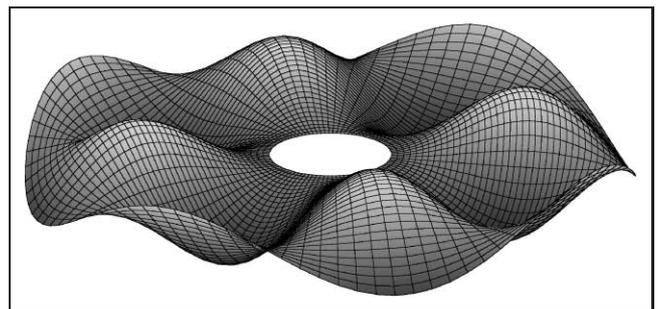


Bild 1: Momentaufnahme eines umlaufenden Biegeprofils einer dünnen elastischen Platte (Simulationsergebnis).

Operatorenrechnung, bei der die Zeitableitung durch den Ableitungsoperator s ersetzt wird, führt auf ein gewöhnliches Randwertproblem für Operatorfunktionen. Aus der allgemeinen Lösung der dazugehörigen gewöhnlichen Dgl. und den Randbedingungen erhält man lineare Gleichungen für die Systemgrößen. Mithilfe einer expliziten Formel können neue Systemgrößen eingeführt werden, die (analog zur Basis eines Vektorraums) als vollständiger Satz freier Parameter interpretiert werden können, und deshalb als *Basisgrößen* bezeichnet werden (vgl. [10]). Zur Parametrierung der Trajektorien beliebiger Systemgrößen reicht es dann aus, für diese Basisgrößen geeignete Trajektorien vorzugeben. So können die Trajektorien der verteilten Systemgrößen und die dazugehörigen Trajektorien der konzentrierten Systemgrößen, also die erforderlichen Zeitverläufe der Stellgrößen, berechnet werden.

Die vorliegende Arbeit setzt eine Reihe von Beiträgen [7; 9; 12; 15] zur Randsteuerung von Systemen mit verteilten Parametern fort, die in den letzten Jahren in dieser Zeitschrift erschienen sind. Eine wichtige Gruppe von Anwendungen betrifft dünne elastische Balken, deren Steuerungsentwurf beispielsweise in [12] behandelt wurde. In [2] wird die Steuerung außerdem durch eine stabilisierende Rückführung ergänzt. Die den genannten Arbeiten zugrunde liegenden Modelle sind stets pDgl. mit konstanten Koeffizienten oder lassen sich durch Transformationen in solche überführen. Eine Balkengleichung mit ortsabhängigen Koeffizienten wird in [13] untersucht. Die in diesem Beitrag vorgeschlagene Methode verallgemeinert den dort verwendeten Zugang. Ein Spezialfall der in Abschnitt 5 untersuchten Plattengleichung wird in [17] betrachtet. Die Lösungen parabolischer Probleme (Diffusion und Wärmeleitung) können ebenfalls in Form von Reihen dargestellt werden. Wird ein Potenzreihenansatz in der Ortskoordinate verwendet, so können auch Dgl. mit analytischen, ortsabhängigen Koeffizienten und nichtlineare Gleichungen behandelt werden (siehe z. B. [4; 6; 10]). Wie für pDgl. bekannt, gibt es wesentliche Unterschiede zwischen parabolischen und hyperbolischen Gleichungen. Die vorgeschlagene Methode ist nicht für hyperbolische Probleme geeignet, für deren Behandlung stattdessen Darstellungen mit Totzeiten und Prädiktionen gebraucht werden (vgl. [10; 16] und die dort angegebene Literatur).

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert. Im folgenden Abschnitt wird die vorgeschlagene Entwurfsmethode am Beispiel der Euler-Bernoulli-Balkengleichung eingeführt, denn diese eignet sich aufgrund ihrer recht einfachen Struktur als überschaubares Beispiel für die später allgemeiner eingeführte Methode. In Abschnitt 3 werden dann für ein allgemeines System die rein algebraischen Rechenschritte erläutert. Dabei wird davon ausgegangen, dass für das Anfangswertproblem zu der nach Einführen des Operators s erhaltenen gewöhnlichen Dgl. die allgemeine (Operator-)Lösung bekannt ist. Es wird gezeigt, wie damit unter Berücksichtigung der Randbedingungen Basisgrößen eingeführt werden können. Abschnitt 4 beschäftigt sich mit der Lösbarkeit der Operator-Anfangswertaufgabe

mittels Potenzreihenansatz im Differentialoperator s . Dazu werden zunächst eine Rekursionsformel für die Koeffizienten formal hergeleitet und anschließend Bedingungen für die Konvergenz der erhaltenen Reihen formuliert. Es wird außerdem in Abschnitt 4.3 gezeigt, inwiefern zur Parametrierung einer Näherungslösung statt der für die Konvergenz der Reihen nötigen Gevrey-Funktionen andere, ausreichend glatte Funktionen verwendet werden können. Im 5. Abschnitt wird als Anwendungsbeispiel das Modell der ringförmigen elastischen Platte untersucht. Um die hier vorgestellte Methode für das örtlich zweidimensionale Modell verwenden zu können, werden Symmetrieeigenschaften ausgenutzt. Wenn diese nicht gegeben sind, wird mit einem örtlich eindimensionalen Ersatzmodell gearbeitet.

2 Beispiel: Euler-Bernoulli-Balkengleichung

Gegenstand dieses einführenden Abschnitts sind die Trajektorienplanung und der Steuerungsentwurf für den in Bild 2 schematisch dargestellten, einseitig eingespannten elastischen Balken, an dessen freiem Ende ein als Stellgröße dienendes Drehmoment eingepreßt wird. Der Balken wird als Euler-Bernoulli-Balken modelliert.

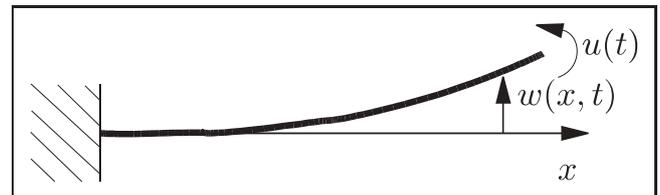


Bild 2: Schematische Darstellung eines einseitig eingespannten Balkens mit Auslenkung $w(x, t)$ und Drehmoment $u(t)$.

Für die Euler-Bernoulli-Balkengleichung mit konstanten Koeffizienten kommen unterschiedliche Methoden zur Lösung der hier untersuchten Aufgabe in Betracht, die auf das gleiche Ergebnis führen. Eine erste Methode wurde bereits in [12] vorgestellt. Dabei wird die allgemeine Lösung der durch Einführen des Operators s erhaltenen gewöhnlichen Dgl. als Linearkombination von Exponentialfunktionen geschrieben (Eulerscher Ansatz). Es kann dann eine Basisgröße derart eingeführt werden, dass die Lösung der Randwertaufgabe als Produkt einer Potenzreihe in s und dieser Basisgröße dargestellt werden kann.

Alternativ kann ein leicht veränderter Ansatz verwendet werden, bei dem die Lösung direkt als Potenzreihe in s angesetzt wird. Für die Koeffizienten dieser Reihen ergeben sich dann Rekursionsbeziehungen in Form von einseitig verkoppelten Differentialgleichungen. Diese können im hier betrachteten Fall des Euler-Bernoulli-Balkens sukzessive symbolisch gelöst werden. Für dieses Beispiel bringt der Ansatz keinen Vorteil, er kann aber, im Gegensatz zum oben verwendeten Vorgehen, direkt auf Dgl. mit ortsabhängigen Koeffizienten übertragen werden.

2.1 Mathematisches Modell

Die Biegung eines homogenen, dünnen elastischen Balkens kann näherungsweise durch die Euler-Bernoulli-Balkengleichung beschrieben werden:

$$EI\partial_x^4 w(x, t) + S\varrho \partial_t^2 w(x, t) = 0, \quad x \in \Omega = [0, \ell], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Werte der örtlich verteilten Größe w entsprechen dabei der Auslenkung des Balkens an der Stelle x zum Zeitpunkt t , und die Parameter ℓ , E , I , S , ϱ bezeichnen in dieser Reihenfolge die Länge, den Elastizitätsmodul, das Flächenträgheitsmoment, die Querschnittsfläche sowie die Massendichte des Balkens. Nimmt man an, der Balken sei bei $x = 0$ eingespannt und bei $x = \ell$ frei beweglich, wobei dort außerdem ein als Stellgröße dienendes Drehmoment $u(t)$ eingepreßt wird, dann lauten die Randbedingungen

$$w(0, t) = 0, \quad EI\partial_x^2 w(\ell, t) = u(t)$$

$$\partial_x w(0, t) = 0, \quad \partial_x^3 w(\ell, t) = 0.$$

Die Anfangsbedingungen werden als homogen angenommen. Ein mögliches Ziel einer Trajektorienplanung besteht in der Berechnung einer Steuerung $u: [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$, welche den Balken in der endlichen Zeit T aus der Anfangsruhelage in eine neue Ruhelage überführt.

2.2 Lösung durch Operatorenrechnung

Aufgrund der Homogenität der Anfangsbedingungen können w als Operatorfunktion $\hat{w}: \Omega \rightarrow \mathcal{M}$ und u als Operator $\hat{u} \in \mathcal{M}$ aufgefasst werden¹, wobei \mathcal{M} den Körper der Mikusiński-Operatoren bezeichnet. Die Ableitungen nach der Zeit können dann durch s ersetzt werden und man erhält die gewöhnliche Dgl.

$$EI\partial_x^4 \hat{w}(x) + S\varrho s^2 \hat{w}(x) = 0 \quad (1a)$$

mit den Randbedingungen

$$\hat{w}(0) = 0, \quad EI(\partial_x^2 \hat{w})(\ell) = \hat{u} \quad (1b)$$

$$(\partial_x \hat{w})(0) = 0, \quad (\partial_x^3 \hat{w})(\ell) = 0.$$

Zur Dgl. (1a) wird ein spezielles Fundamentalsystem $\hat{W}_1, \dots, \hat{W}_4$ linear unabhängiger Lösungen derart konstruiert, dass die Operatorfunktion \hat{W}_4 außer der Dgl. (1a) zusätzlich den Bedingungen

$$\partial_x^j \hat{W}_4(0) = \delta_{3,j}, \quad j = 0, \dots, 3$$

genügt. Darin bezeichnet $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Symbol. Die Funktionen $\hat{W}_1, \hat{W}_2, \hat{W}_3$ werden mittels der Rekursionsbeziehung

$$\hat{W}_i(x) = \partial_x \hat{W}_{i+1}(x), \quad i = 1, 2, 3 \quad (2a)$$

definiert. Sie genügen für $j < i$ den Bedingungen $\partial_x^j \hat{W}_i(0) = \delta_{i-1,j}$. Aus Gleichung (1a) folgt außerdem

$$\partial_x \hat{W}_1(x) = -s^2 \left(\frac{S\varrho}{EI} \right) \hat{W}_4(x). \quad (2b)$$

Wählt man für \hat{W}_4 einen Potenzreihenansatz der Form

$$\hat{W}_4(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(x) s^{2k}, \quad W_k(x) \in \mathbb{C} \quad (3)$$

und setzt diesen Ausdruck in (1a) ein, so erhält man durch Koeffizientenvergleich bezüglich gleicher Potenzen von s eine Folge gewöhnlicher Dgln. in x für die rekursive Bestimmung der Koeffizientenfunktionen W_k , $k \geq 1$ ($i = 0, \dots, 3$):

$$EI\partial_x^4 W_k(x) + S\varrho W_{k-1}(x) = 0, \quad \partial_x^i W_k(0) = 0. \quad (4)$$

Diese Rekursionsbeziehung wird durch die Anfangswertaufgaben

$$EI\partial_x^4 W_0(x) = 0, \quad \partial_x^i W_0(0) = \delta_{i,3}, \quad i = 0, \dots, 3 \quad (5)$$

initialisiert. Die Integration von (5) liefert $W_0(x) = x^3/6$, während man aus (4)

$$W_k(x) = -\frac{S\varrho}{EI} \int_0^x \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \int_0^{x_3} W_{k-1}(x_4) dx_4 dx_3 dx_2 dx_1$$

erhält. Mittels vollständiger Induktion folgt daraus

$$W_k(x) = \left(-\frac{S\varrho}{EI} \right)^k \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!}$$

und somit mit (3) und (2a)

$$\hat{W}_i(x) = \sum_{k=0}^{\infty} s^{2k} \left(-\frac{S\varrho}{EI} \right)^k \frac{x^{4k+i-1}}{(4k+i-1)!}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (6)$$

Die Lösung der Randwertaufgabe (1) kann nun als Linearkombination

$$\hat{w}(x) = \sum_{i=1}^4 \hat{W}_i(x) \hat{c}_i \quad (7)$$

angesetzt werden. Die Randbedingungen (1b) liefern dann $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = 0$ und

$$EI \left(\hat{W}_1(\ell) \hat{c}_3 - \hat{W}_2(\ell) \hat{c}_4 \right) = \hat{u} \quad (8a)$$

$$s^2 \left(\frac{S\varrho}{EI} \right) \hat{W}_4(\ell) \hat{c}_3 - \hat{W}_1(\ell) \hat{c}_4 = 0. \quad (8b)$$

Mittels der Beziehungen

$$\hat{c}_3 = \hat{W}_1(\ell) \hat{b}, \quad \hat{c}_4 = s^2 \left(\frac{S\varrho}{EI} \right) \hat{W}_4(\ell) \hat{b} \quad (9)$$

kann eine neue Größe \hat{b} derart eingeführt werden, dass (8b) stets erfüllt ist. Man beachte, dass so eine Division durch die Operatoren $\hat{W}_1(\ell)$ und $s^2 \hat{W}_4(\ell)$, d. h. ein Invertieren von Potenzreihen, vermieden wird. Setzt man (9) in (8a) sowie in den Ansatz (7) ein und ersetzt die Operatorfunktionen \hat{W}_i durch die Potenzreihen (6), dann erhält man mit Hilfe

¹ Dies entspricht der Einbettung einer Funktion f aus dem nullteilerfreien Faltungsring \mathcal{C} der auf $(-\infty, 0)$ identisch verschwindenden stetigen Funktionen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in den Quotientenkörper \mathcal{M} von \mathcal{C} : $\hat{f} = (f \star g)/g$ für beliebiges $g \in \mathcal{C}$ [8; 10]. Für die formale Rechnung ist es aber unerheblich, ob statt des Mikusiński-Kalküls ein auf der Laplace-Transformation basierendes Operatorenkalkül verwendet wird. Den Operatoren \hat{u} und $\hat{w}(x)$ entsprechen dann die Laplace-Transformierten $\hat{u}, \hat{w}(x): \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ der Zeitfunktionen $t \mapsto u(t)$ und $t \mapsto w(x, t)$.

der Cauchy-Produktformel nach einigen Nebenrechnungen Ausdrücke für die Auslenkung \hat{w} und das Stellmoment \hat{u} (vgl. [12]):

$$\hat{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{S_Q}{EI}\right)^k \left[(x-\ell)^{4k+2} + \text{Im} \left((x+\ell\sqrt{-1})^{4k+2} \right) + \text{Re} \left((x+\ell\sqrt{-1})^{4k+2} \right) \right] \frac{s^{2k}\hat{b}}{2(4k+2)!} \quad (10)$$

$$\hat{u} = \frac{EI}{2} \left(1 + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4S_Q\ell^4}{EI}\right)^k \frac{1}{(4k)!} s^{2k} \right) \hat{b}. \quad (11)$$

Offensichtlich können alle Systemgrößen durch die freie Größe \hat{b} parametrisiert werden, die als *Basisgröße* bezeichnet wird [10].

2.3 Planung von Trajektorien

Zur Berechnung einer Steuerung wird nun eine Trajektorie $t \mapsto b(t)$ für die Basisgröße \hat{b} gewählt. Die Operatoren $s^k, k \geq 0$ werden auf \hat{b} angewandt, woraus eine Parametrierung der Trajektorien sämtlicher Systemgrößen in Abhängigkeit von $t \mapsto b^{(k)}(t), k \geq 0$ folgt.

Um den bis jetzt formalen Reihenentwicklungen einen Sinn zu verleihen, muss eine (glatte) Trajektorie $t \mapsto b(t)$ derart gewählt werden, dass die Reihen (10) konvergieren. Dazu müssen die Ableitungen von b in geeigneter Weise beschränkt sein. Insbesondere erhält man mit dem Konvergenzkriterium von Cauchy-Hadamard die hinreichende Konvergenzbedingung (siehe beispielsweise [10])

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{|b^{(k)}(t)|}{(2k)!} \right)^{\frac{1}{k}} < \frac{EI}{4S_Q\ell^4}.$$

Diese Bedingung kann durch die Wahl einer Trajektorie der Gevrey-Ordnung $\alpha < 2$ für b erfüllt werden, d. h.,

$$\sup_{t \in K \subseteq \mathbb{R}} |b^{(k)}(t)| \leq \frac{m_K}{\gamma_K^k} (k!)^\alpha, \quad m_K, \gamma_K \in \mathbb{R}. \quad (12)$$

Beispielsweise beschreibt $\phi_T : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\phi_T(t) = \phi\left(\frac{t}{T}\right), \quad \phi(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \tanh \left[\frac{2t-1}{(4t(1-t))^\sigma} \right] \right) \quad (13)$$

einen Übergang von 0 nach 1 in der Zeit T und ist von der Gevrey-Ordnung $\alpha = 1 + 1/\sigma$. Eine Überführung aus der homogenen Ruhelage in jene, die durch die gewünschte Auslenkung $w(\ell, T)$ des Balkenendes charakterisiert wird, kann deshalb durch die Vorgabe einer Trajektorie $t \mapsto \bar{b}\phi_T(t)$ mit $\bar{b} = w(\ell, T)/\ell^2$ für die Basisgröße erreicht werden, wobei $\sigma > 1$ zu wählen ist [11].

3 Entwurfsmethode für eine allgemeinere Systemklasse

Für eine allgemeinere Darstellung der Entwurfsmethode ist es günstig, das zu untersuchende Modell als System linea-

rer pDgl. erster Ordnung für die verteilten Größen w zu schreiben:

$$\partial_x w(x, t) = A(x)w(x, t) + B(x)u(t), \quad (14a)$$

mit $w = (w_1, \dots, w_p)^T, u = (u_1, \dots, u_m)^T, t \in \mathbb{R}^+, x \in \Omega = [x_0, x_1], A(x) \in (\mathbb{C}[\partial_t])^{p \times p}, B(x) \in (\mathbb{C}[\partial_t])^{p \times m}$. Die konzentrierten Größen in u sind die Stellgrößen.

Die Randbedingungen sind in der Form

$$C_0 w(x_0, t) + C_1 w(x_1, t) + D u(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}^+, C_0, C_1 \in (\mathbb{C}[\partial_t])^{p \times p}, D \in (\mathbb{C}[\partial_t])^{p \times m} \quad (14b)$$

gegeben. In A, B, C_0, C_1 und D kann der Differentialoperator ∂_t polynomial auftreten. Die Koeffizienten der Einträge der Matrix A in (14a) werden auf Ω als stückweise stetig vorausgesetzt.

Die Anfangsbedingungen werden als homogen angenommen, d. h.

$$\partial_t^k w(x, 0) = 0, \quad \partial_t^k u(0) = 0, \quad k \geq 0, \quad x \in \Omega.$$

Wie in Abschnitt 2.2 erhält man durch Einführen von Operatoren aus (14) ein System gewöhnlicher Dgl.

$$\partial_x \hat{w}(x) = \hat{A}(x) \hat{w}(x) + \hat{B}(x) \hat{u}, \quad x \in \Omega, \quad \hat{A}(x) \in (\mathbb{C}[s])^{p \times p}, \hat{B}(x) \in (\mathbb{C}[s])^{p \times m} \quad (15a)$$

mit den Randbedingungen

$$\hat{C}_0 \hat{w}(x_0) + \hat{C}_1 \hat{w}(x_1) + \hat{D} \hat{u} = 0, \quad \hat{C}_0, \hat{C}_1 \in (\mathbb{C}[s])^{p \times p}, \hat{D} \in (\mathbb{C}[s])^{p \times m}. \quad (15b)$$

Es wird angenommen, dass eine Fundamentalmatrix $\hat{\Phi} : \Omega^2 \rightarrow \mathcal{M}^{p \times p}$ zur Differentialgleichung (15a) existiert. Sie ist als Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe

$$\partial_x \hat{\Phi}(x, \xi) = \hat{A}(x) \hat{\Phi}(x, \xi), \quad \hat{\Phi}(\xi, \xi) = I \quad (16)$$

definiert, wobei I die $(p \times p)$ -Einheitsmatrix bezeichnet. Durch Variation der Konstanten kann eine Partikulärlösung der Dgl. (15a) bestimmt werden, und man erhält die allgemeine Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\partial_x \hat{w}(x) = \hat{A}(x) \hat{w}(x) + \hat{B}(x) \hat{u}, \quad \hat{w}(\xi) = \hat{c} \in \mathcal{M}^p \quad (17)$$

in der Form

$$\hat{w}(x) = \hat{\Phi}(x, \xi) \hat{c} + \hat{\Psi}(x, \xi) \hat{u} \quad (18)$$

mit

$$\hat{\Psi}(x, \xi) = \int_{\xi}^x \hat{\Phi}(x, \zeta) \hat{B}(\zeta) d\zeta. \quad (19)$$

Die Lösung (18) von (17) wird als Ansatz für die Lösung der Randwertaufgabe (15) verwendet². Einsetzen dieses

² An dieser Stelle wird der Parameter ξ fixiert. Man hat also eine gewisse Freiheit bei der Wahl des Ansatzes, die dazu genutzt werden kann, die folgenden Rechenschritte möglichst einfach zu gestalten.

Ansatzes in die Randbedingungen (15b) liefert das Gleichungssystem

$$\hat{Q}\hat{c} + \hat{R}\hat{u} = 0, \quad (20)$$

mit den Koeffizientenmatrizen

$$\begin{aligned} \hat{Q} &= \hat{C}_0\hat{\Phi}(x_0, \xi) + \hat{C}_1\hat{\Phi}(x_1, \xi) \\ \hat{R} &= \hat{D} + \hat{C}_0\hat{\Psi}(x_0, \xi) + \hat{C}_1\hat{\Psi}(x_1, \xi). \end{aligned}$$

Man kann eine *Basisgröße* $\hat{b} \in \mathcal{M}^m$ derart einführen³, dass gilt

$$\hat{c} = (\text{adj } \hat{Q}) \hat{R}\hat{b}, \quad \hat{u} = \hat{U}\hat{b}, \quad \hat{U} = (\det \hat{Q}). \quad (21a)$$

Dabei bezeichnet $\text{adj } \hat{Q}$ die Matrix der Adjunkten von \hat{Q} , d. h. $\hat{Q}\text{adj } \hat{Q} = I \det \hat{Q}$ mit der $(p \times p)$ -Einheitsmatrix I . Diese Wahl von \hat{c} und \hat{u} ist mit dem Gleichungssystem (20) kompatibel,

$$\hat{w}(x) = \hat{W}(x)\hat{b}, \quad \hat{W}(x) = \hat{\Phi}(x, \xi) (\text{adj } \hat{Q}) \hat{R} + (\det \hat{Q}) \hat{\Psi}(x, \xi) \quad (21b)$$

deshalb Lösung der Randwertaufgabe (15).

4 Steuerungsentwurf mittels Reihenansätzen

Um die in Abschnitt 3 angegebene Lösung (21) der Randwertaufgabe (15) zum Entwurf von Steuerungen nutzen zu können, muss die allgemeine Lösung der Anfangswertaufgabe (17), d. h. die Matrizen $\hat{\Phi}(x, \xi)$ und $\hat{\Psi}(x, \xi)$, bekannt sein. Es werden außerdem Rechenregeln benötigt, die es gestatten, Summen und Produkte der Einträge dieser Matrizen zu berechnen. Dazu werden $\hat{\Phi}$ und $\hat{\Psi}$ als Potenzreihen in s angesetzt. Die Koeffizienten dieser Reihen werden aus der Differentialgleichung (15a) bestimmt. Dies ist für beliebige ortsabhängige Koeffizientenmatrizen $\hat{A}(x)$ und $\hat{B}(x)$ in (15a) möglich, deren Einträge für alle $x \in \Omega$ polynomial in s sind. Sind die Koeffizienten dieser Potenzreihen bekannt, dann können mit Hilfe der Cauchy-Produktformel auch Produkte dieser Reihen formal berechnet werden. Dies ermöglicht es, in (21) Reihendarstellungen für $\hat{W}(x)$ und \hat{U} zu verwenden, und man erhält so

$$\hat{u} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k s^k \hat{b}, \quad \hat{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(x) s^k \hat{b}. \quad (22)$$

Die Einträge von U_k und $W_k(x)$ sind dabei reelle Zahlen.

Zur Berechnung einer Steuerung kann nun, wie in Abschnitt 2.3, eine (glatte) Trajektorie $t \mapsto b(t)$ für die Basisgröße \hat{b} gewählt werden. Die Operatoren s^k , $k \geq 0$ werden

auf \hat{b} angewandt, woraus eine Parametrierung der Trajektorien sämtlicher Systemgrößen in Abhängigkeit von $t \mapsto b^{(k)}(t)$, $k \geq 0$ folgt:

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k b^{(k)}(t), \quad w(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(x) b^{(k)}(t). \quad (23)$$

Eine solche Darstellung ist allerdings nur dann sinnvoll, wenn die Trajektorie $t \mapsto b(t)$ so gewählt werden kann, dass die Reihen (23) konvergieren.

4.1 Potenzreihenlösung der Anfangswertaufgabe

Die Spalten der Matrizen $\hat{\Phi}$ und $\hat{\Psi}$, mit denen die Lösung von (17) in der Form (18) geschrieben werden kann, sind sämtlich Lösungen von Anfangswertaufgaben

$$\partial_x \hat{w}(x) = \hat{A}(x)\hat{w}(x) + \hat{B}(x)v, \quad \hat{w}(\xi) = \gamma \in \mathbb{R}^p, \quad v \in \mathbb{R}^m. \quad (24)$$

Deren Lösung wird, ähnlich wie \hat{W}_4 in Gleichung (3), als Potenzreihe

$$\hat{w}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_k(x) s^k, \quad \omega_k(x) \in \mathbb{C}^p \quad (25)$$

in s angesetzt. Sind

$$d_A = \max_{x \in \Omega} \deg \hat{A}(x), \quad d_B = \max_{x \in \Omega} \deg \hat{B}(x)$$

die maximalen Grade von $\hat{A}(x)$ und $\hat{B}(x)$, so können diese Matrizen in der Form

$$\hat{A}(x) = \sum_{i=0}^{d_A} A_i(x) s^i, \quad \hat{B}(x) = \sum_{i=0}^{d_B} B_i(x) s^i$$

notiert werden, mit reellen $A_i(x)$, $i = 0, \dots, d_A$ und $B_i(x)$, $i = 0, \dots, d_B$. Setzt man den Ansatz (25) in (24) ein, so erhält man folglich

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k \partial_x \omega_k = \sum_{j=0}^{d_A} \sum_{l=0}^{\infty} s^{l+j} A_j \omega_l + \sum_{j=0}^{d_B} s^j B_j v. \quad (26)$$

Substituiert man auf der rechten Seite dieser Gleichung l durch $k - j$ und vereinbart $\omega_k(x) = 0$ für $k < 0$, so folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \partial_x \omega_k s^k = \sum_{j=0}^{d_A} \sum_{k=0}^{\infty} s^k A_j \omega_{k-j} + \sum_{j=0}^{d_B} s^j B_j v.$$

Vertauschen der Summationsreihenfolge liefert

$$\sum_{k=0}^{\infty} \partial_x \omega_k s^k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{j=0}^{d_A} A_j \omega_{k-j} + \sum_{k=0}^{d_B} s^k B_k v.$$

Daraus erhält man durch Koeffizientenvergleich bezüglich gleicher Potenzen von s eine Folge gewöhnlicher Dgln. zur rekursiven Bestimmung der Koeffizientenfunktionen ω_k :

$$\partial_x \omega_k(x) = A_0 \omega_k(x) + \sum_{j=1}^{d_A} A_j(x) \omega_{k-j}(x) + B_k(x) v. \quad (27)$$

³ Dies ist zwar immer möglich, muss aber nicht in jedem Fall die günstigste Wahl sein. Tatsächlich reicht es aus, $\hat{u} = \hat{\pi}\hat{b}$ und $\hat{c} = -\hat{Q}^{-1}\hat{R}\hat{\pi}\hat{b}$ zu wählen, wobei die Diagonalelemente von $\hat{\pi} = \text{diag}(\hat{\pi}_1, \dots, \hat{\pi}_m)$ die kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Nenner von $\hat{Q}^{-1}\hat{R}_i$ und \hat{R}_i die i -te Spalte von \hat{R} bezeichnen.

Dabei wird $B_k = 0, k > d_B$ vereinbart. Die zugehörigen Anfangswerte $\omega_0(\xi) = \gamma$ und $\omega_k(\xi) = 0, k > 0$ ergeben sich aus (24) und (25).

Häufig sind diese Anfangswertaufgaben nicht wie in Abschnitt 2.2 geschlossen lösbar. Die Koeffizienten $\omega_k, k \geq 0$ können aber stets durch numerische Integration der Gleichungen (27) berechnet werden. Formal kann die Lösung der Anfangswertaufgaben zu diesen Dgln. in Integralform angegeben werden. Mit $B_k = 0, k > d_B$ erhält man für $k > 0$ die Rekursion

$$\omega_k(x) = \int_{\xi}^x \bar{\Phi}(x, \zeta) \left(\sum_{j=1}^{d_A} A_j(\zeta) \omega_{k-j}(\zeta) + B_k(\zeta) \nu \right) d\zeta, \tag{28a}$$

die durch

$$\omega_0(x) = \bar{\Phi}(x, \xi) \gamma + \int_{\xi}^x \bar{\Phi}(x, \zeta) B_0(\zeta) \nu d\zeta \tag{28b}$$

initialisiert wird. Dabei bezeichnet $\bar{\Phi}(x, \xi)$ die (gemeinsame) Fundamentalmatrix zu den Dgln. (27). Eine explizite Darstellung dieser Form ergibt sich, wenn $\bar{\Phi}(x, \xi)$ geschlossen (statt nur numerisch) dargestellt werden kann.

4.2 Konvergenz der formalen Lösung

Um Bedingungen für die Konvergenz der Reihen (23) formulieren zu können, wird zunächst der Begriff der Ordnung formaler Potenzreihen in s eingeführt.

Definition 1. Eine formale Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k, a_k \in \mathbb{C}$ heißt von der Ordnung $\rho > 0$, wenn die Folge $(a_k M^k (k!)^{1/\rho})_{k \in \mathbb{N}}$ für alle $\tilde{\rho} > \rho$ und alle $M \in \mathbb{R}^+$ absolut beschränkt ist⁴. Die Menge der Potenzreihen der Ordnung ρ wird nachfolgend mit $\mathbb{C}_{\rho}[[s]]$ bezeichnet.

Definiert man das Produkt einer solchen Potenzreihe mit einer Funktion $f \in C^{\infty}$ gliedweise, so kann mit Hilfe des Konvergenzkriteriums von Cauchy-Hadamard gezeigt werden, dass die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k f^{(k)}(t)$$

auf jedem kompakten Intervall gleichmäßig konvergiert, wenn f von der Gevrey-Ordnung α mit $\alpha < 1/\rho$ ist (vgl. Abschnitt 2.3).

Für den Entwurf von Steuerungen unter Verwendung von Gleichung (23) hat dies folgende Konsequenzen: Kann gezeigt werden, dass die Einträge der Koeffizienten $\hat{W}(x)$ und \hat{U} in (21) formale Potenzreihen der Ordnung $\rho < 1$ sind, so kann als Trajektorie für die Basisgröße eine beliebige Funktion b gewählt werden, deren Gevrey-Ordnung klei-

ner als $1/\rho$ ist. Die in Definition 1 gestellten Bedingungen müssen jedoch nicht für $\hat{W}(x)$ und \hat{U} geprüft werden, denn die Menge $\mathbb{C}_{\rho}[[s]]$ bildet einen Ring. Es genügt deshalb, die entsprechenden Eigenschaften nur für die Einträge der Matrizen $\hat{\Phi}(x, \xi)$ und $\hat{\Psi}(x, \xi)$ zu zeigen.

Der folgende Satz liefert eine Möglichkeit, sich gegebenenfalls auch dies zu ersparen. Stattdessen kann aus der Struktur der Koeffizientenmatrix \hat{A} der Dgl. (15a) direkt auf die Ordnung der Potenzreihen und damit auf die für die Konvergenz erforderliche Gevrey-Ordnung der Trajektorie der Basisgröße geschlossen werden.

Satz 1 ([16]). Es sei eine Anfangswertaufgabe der Form (24) gegeben, wobei \hat{A} die Struktur

$$\hat{A}(x) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(x) & a_{1,2}(x) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ a_{p-2,1}(x) & a_{p-2,2}(x) & \cdots & a_{p-2,p-1}(x) & 0 \\ a_{p-1,1}(x) & a_{p-1,2}(x) & \cdots & a_{p-1,p-1}(x) & a_{p-1,p}(x) \\ a_{p,1}(x) & a_{p,2}(x) & \cdots & a_{p,p-1}(x) & a_{p,p}(x) \end{pmatrix}$$

hat und die von Null verschiedenen $a_{i,j} : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{C}[s]$ stetige Koeffizienten haben, deren Polynomgrade für ein rationales $\eta > 1$ der Ungleichung

$$\max_{x \in [x_0, x_1]} \eta \deg a_{i,j}(x) \leq i - j + 1 \tag{29}$$

genügen. Dann sind die Komponenten der in (25) angesetzten Lösung $\hat{\omega}$ Potenzreihen aus $\mathbb{C}_{1/\eta}[[s]]$.

Zwei Spezialfälle, die recht häufig in Anwendungen auftreten, können wie folgt beschrieben werden:

- Für skalare Dgln. der Form

$$\partial_x^p \hat{\omega}(x) + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-\eta i} c_{i,j}(x) s^i \partial_x^j \hat{\omega}(x) = 0, \quad c_{i,j}(x) \in \mathbb{R}$$

erhält man entsprechende Matrizen \hat{A} durch Einführen von $\hat{\omega} = (\hat{\omega}, \dots, \partial_x^{p-1} \hat{\omega})$.

- Hängen die Einträge der Matrix \hat{A} nicht vom Ort ab, so ist es hinreichend, dass deren charakteristisches Polynom von der folgenden Form ist:

$$\det(\lambda I - \hat{A}) = \lambda^p + \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{p-\eta i} \alpha_{i,j} s^i \lambda^j. \tag{30}$$

Der in diesen beiden Charakterisierungen auftretende Parameter η entspricht jenem in (29).

4.3 Wahl der Trajektorien für die Basisgröße

Bei der numerischen Berechnung der Steuerung gemäß (23) kann nur eine endliche Anzahl von Reihengliedern berücksichtigt werden. Darin treten dann nur endlich viele Zeitableitungen von b auf. Es ist deshalb interessant, zu

⁴ Diese Definition ist an die entsprechenden Eigenschaften ganzer Funktionen der Ordnung ρ angelehnt: Fasst man s als komplexe Variable auf, dann definiert die Potenzreihe eine ganze Funktion der Ordnung ρ [1].

untersuchen, ob zur Parametrierung einer näherungsweise Steuerung auch hinreichend glatte, stückweise polynomiale Trajektorien für die Basisgröße \hat{b} verwendet werden können. Dadurch würde die numerische Auswertung von (23) erleichtert.

Dieses Ziel kann tatsächlich erreicht werden. Um das zu zeigen, bedient man sich einer Approximation auf der Grundlage von Faltungen. Das Faltungsprodukt einer Gevrey-Funktion und einer beliebigen stetigen Funktion ist wieder eine Gevrey-Funktion derselben Ordnung. Die Funktion $t \mapsto \varphi_\varepsilon(t) = \varphi(t/\varepsilon)/\varepsilon$ mit

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \frac{\exp(-(1-\tau^2)^{-\sigma})}{\int_{-1}^1 \exp(-(1-\zeta^2)^{-\sigma}) d\zeta}, & \tau \in [-1, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

ist eine Gevrey-Funktion der Ordnung $1 + 1/\sigma$ (siehe [5, Lemma 1]), die außerhalb des Intervalls $[-\varepsilon, \varepsilon]$ verschwindet, überall positiv ist und deren Integral 1 ergibt. Bildet man zu einer beliebigen stetigen Funktion f die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Faltungsprodukte $f_n = f \star \varphi_{\varepsilon_n}$, wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ gilt, dann konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen f und kann deshalb dazu verwendet werden, f beliebig genau durch eine Gevrey-Funktion zu approximieren.⁵

Wählt man für die Basisgröße eine Trajektorie der Form $b = \tilde{b} \star \varphi_\varepsilon$, wobei \tilde{b} eine zumindest n_0 -mal differenzierbare Funktion ist, und bricht die Reihenentwicklung nach $n_1 < n_0$ Termen ab, dann erhält man beispielsweise für die Trajektorie der Stellgröße u die Partialsumme

$$u = \sum_{k=0}^{n_1} U_k \partial_t^k (\tilde{b} \star \varphi_\varepsilon) = \left(\sum_{k=0}^{n_1} U_k \tilde{b}^{(k)} \right) \star \varphi_\varepsilon. \quad (31)$$

Ist dabei ε ausreichend klein, kann

$$t \mapsto \tilde{u}(t) = \sum_{k=0}^{n_1} U_k \tilde{b}^{(k)}(t) \quad (32)$$

direkt als Näherung für u verwendet werden. Eine Abschätzung für den Fehler $|u(t) - \tilde{u}(t)|$ lautet

$$\begin{aligned} |u(t) - \tilde{u}(t)| &= |(\tilde{u} \star \varphi_\varepsilon)(t) - \tilde{u}(t)| \\ &= \left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \varphi_\varepsilon(\tau) (\tilde{u}(t-\tau) - \tilde{u}(t)) d\tau \right| \\ &\leq \sup_{\tau \in [-\varepsilon, \varepsilon]} |\tilde{u}(t-\tau) - \tilde{u}(t)|. \end{aligned}$$

Dabei ist zu beachten, dass die in (12) definierten Parameter $1/m_K$ und γ_K für die Funktion φ_ε linear in ε sind. Für kleineres ε konvergieren die Reihen (23) deshalb langsamer, und n_1 ist deshalb größer zu wählen.

⁵ Die Folge $(\varphi_{\varepsilon_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert im Sinne der Operatorenrechnung gegen 1. Im Sinne der Distributionentheorie entspricht sie einer Approximation der Dirac-Distribution.

5 Eine ringförmige piezoelektrische Platte

Auf der Grundlage der vorgestellten allgemeinen Methode, kann die eingangs gestellte Frage nach den Zeitverläufen der Stellgrößen für die elastische Platte beantwortet werden. Dazu werden zunächst das mathematische Modell eingeführt und anschließend der Fall einer einzigen, örtlich harmonisch gewichteten Stellgröße untersucht. Bevor technologisch leichter realisierbare Fälle behandelt werden, wird zur Vorbereitung der Spezialfall zweier harmonisch gewichteter Stelleingriffe betrachtet.

5.1 Mathematisches Modell

Als Modell für die Biegung einer dünnen, aus einem piezoaktiven Laminat bestehenden, ringförmigen elastischen Platte kann, unter den Kirchhoffschen Annahmen, die pDgl.⁶

$$\Delta (D\Delta \tilde{w} + \Lambda u) + K \partial_t^2 \tilde{w} = 0 \quad (33)$$

verwendet werden. Darin bezeichnet $\tilde{w}(r, \theta, t)$ die vertikale Auslenkung der Platte im Punkt (r, θ) zum Zeitpunkt t . Die Gestalt der Elektroden, die auf die Ober- und Unterseiten der Aktuatorsschichten aufgebracht sind, wird durch die Koeffizientenmatrix $\Lambda(r, \theta) = (\Lambda_1(r, \theta), \dots, \Lambda_m(r, \theta))$ beschrieben, die elektrischen Spannungen $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$ an den Elektroden sind die örtlich konzentrierten Stellgrößen. Weiter bezeichnet Δ den Laplace-Operator, der in Polarkoordinaten (r, θ) in der Form

$$\Delta = r^{-1} \partial_r (r \partial_r) + r^{-2} \partial_{\theta\theta} \quad (34)$$

geschrieben werden kann. Die als konstant angenommenen Parameter D und K sind die Steifigkeit und die flächenbezogene Massendichte der Platte. Sie können aus der Dicke h , der Massendichte ρ , der Querkontraktionszahl ν und dem Elastizitätsmodul E berechnet werden.

In den folgenden Abschnitten wird eine Platte untersucht, die am inneren Rand (bei $r = r_i$) fest eingespannt ist. Man erhält dort die Randbedingungen

$$\tilde{w} = 0, \quad r \partial_r \tilde{w} = 0. \quad (35a)$$

Der äußere Rand (bei $r = r_a$) ist frei beweglich, womit dort

$$D\Delta \tilde{w} + \Lambda u - D\mu (r^{-2} \partial_{\theta\theta} + r^{-1} \partial_r) \tilde{w} = 0 \quad (35b)$$

$$r \partial_r (D\Delta \tilde{w} + \Lambda u) - D\mu \partial_{\theta\theta} r^{-1} \tilde{w} = 0 \quad (35c)$$

mit der Abkürzung $\mu = 1 - \nu$ gilt.

5.2 Örtlich harmonisch gewichteter Stelleingriff

Zunächst wird angenommen, dass zur Steuerung der Platte nur eine einzige Stellgröße u zur Verfügung steht, die

⁶ Zur Herleitung des Plattenmodells sei beispielsweise auf [3] verwiesen, zur Erweiterung des Modells auf piezoaktive Materialien auf [14].

durch den Koeffizienten $\Lambda(r, \theta) = \lambda(r) \sin(l\theta + \theta_0)$ mit den Parametern $l \in \mathbb{N}$ und $\theta_0 \in [0, 2\pi)$ sowie einer Funktion $r \mapsto \lambda(r)$ örtlich harmonisch gewichtet wird.

Mit dem Ansatz $\tilde{w}(r, \theta, t) = \sin(l\theta + \theta_0)\tilde{w}(r, t)$ erhält man dann aus (33) für \tilde{w} eine örtlich nur noch eindimensionale partielle Differentialgleichung

$$\Delta_l(D\Delta_l\tilde{w}(r, t) + \lambda(r)u(t)) + K\partial_t^2\tilde{w}(r, t) = 0 \quad (36)$$

mit dem Differentialoperator

$$\Delta_l = r^{-1}\partial_r r\partial_r - r^{-2}l^2, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Die Bedingungen (35a) am inneren Rand liefern

$$\tilde{w}(r, t) = 0, \quad r\partial_r\tilde{w}(r, t) = 0, \quad r = r_i. \quad (37a)$$

Entsprechend folgt aus (35b, 35c) bei $r = r_a$

$$D(\Delta_l + \mu r_a^{-2}(l^2 - r\partial_r))\tilde{w}(r, t) + \lambda(r)u(t) = 0 \quad (37b)$$

$$D(r\partial_r\Delta_l + \mu l^2\partial_r r^{-1})\tilde{w}(r, t) + r\partial_r\lambda(r)u(t) = 0. \quad (37c)$$

Mit den neuen Variablen

$$\begin{aligned} w_1(r, t) &= \tilde{w}(r, t) \\ w_2(r, t) &= r\partial_r\tilde{w}(r, t) \\ w_3(r, t) &= \Delta_l\tilde{w}(r, t) + D^{-1}\lambda(r)u(t) \\ w_4(r, t) &= r\partial_r(\Delta_l\tilde{w}(r, t) + D^{-1}\lambda(r)u(t)) \end{aligned} \quad (38)$$

und $w = (w_1, \dots, w_4)^T$ erhält man aus (36) ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung bezüglich der radialen Koordinate r . Dieses lautet in Operatorform

$$\partial_r\hat{w}(r) = \hat{A}(r)\hat{w}(r) + \hat{B}(r)\hat{u} \quad (39a)$$

mit

$$\hat{A}(r) = \begin{pmatrix} 0 & r^{-1} & 0 & 0 \\ l^2 r^{-1} & 0 & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^{-1} \\ -rD^{-1}Ks^2 & 0 & l^2 r^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{B}(r) = -rD^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \lambda(r) & 0 & 0 \end{pmatrix}^T.$$

Die Randbedingungen (37) können in den neuen Variablen aus (38) ohne Verwendung von Ortsableitungen notiert werden:

$$\hat{w}_1(r_i) = 0, \hat{w}_2(r_i) = 0 \quad (39b)$$

$$\hat{w}_3(r_a) + \mu r_a^{-2}(l^2\hat{w}_1(r_a) - \hat{w}_2(r_a)) = 0$$

$$\hat{w}_4(r_a) + \mu l^2 r_a^{-2}(\hat{w}_2(r_a) - \hat{w}_1(r_a)) = 0. \quad (39c)$$

Die Matrix \hat{A} in (39a) erfüllt die Voraussetzungen von Satz 1 (unabhängig von l) für $\eta = 2$. Die allgemeine Lösung der der Gleichung (39) zugeordneten Anfangswertaufgabe mit $\hat{w}(r_i) = \hat{c}$ hat deshalb die Form

$$\hat{w}(r) = \hat{\Phi}(r, r_i)\hat{c} + \hat{\Psi}(r, r_i)\hat{u}, \quad \hat{c} = (\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_4)^T, \quad (40)$$

und die Einträge der Matrizen $\hat{\Psi}(r, r_i) \in (\mathbb{C}_{1/2}[[s]])^4$ und $\hat{\Phi}(r, r_i) \in (\mathbb{C}_{1/2}[[s]])^{4 \times 4}$ können entsprechend Abschnitt 4 berechnet werden.

Aus (39b) folgt sofort $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = 0$, und die Randbedingungen (39c) bei $r = r_a$ liefern daher

$$\hat{Q}_{1,3}\hat{c}_3 + \hat{Q}_{1,4}\hat{c}_4 + \hat{R}_1\hat{u} = 0 \quad (41a)$$

$$\hat{Q}_{2,3}\hat{c}_3 + \hat{Q}_{2,4}\hat{c}_4 + \hat{R}_2\hat{u} = 0, \quad (41b)$$

mit ($j = 3, 4$)

$$\hat{Q}_{1,j} = \hat{\Phi}_{3,j}(r_a, r_i) + \mu r_a^{-2}(l^2\hat{\Phi}_{1,j}(r_a, r_i) - \hat{\Phi}_{2,j}(r_a, r_i))$$

$$\hat{Q}_{2,j} = \hat{\Phi}_{4,j}(r_a, r_i) + \mu l^2 r_a^{-2}(\hat{\Phi}_{2,j}(r_a, r_i) - \hat{\Phi}_{1,j}(r_a, r_i))$$

$$\hat{R}_1 = \hat{\Psi}_3(r_a, r_i) + \mu r_a^{-2}(l^2\hat{\Psi}_1(r_a, r_i) - \hat{\Psi}_2(r_a, r_i))$$

$$\hat{R}_2 = \hat{\Psi}_4(r_a, r_i) + \mu l^2 r_a^{-2}(\hat{\Psi}_2(r_a, r_i) - \hat{\Psi}_1(r_a, r_i)).$$

Wie in Abschnitt 3 beschrieben wurde, kann mittels

$$\begin{aligned} \hat{u} &= (\hat{Q}_{1,3}\hat{Q}_{2,4} - \hat{Q}_{2,3}\hat{Q}_{1,4})\hat{b} \\ \hat{c}_3 &= (\hat{Q}_{1,4}\hat{R}_2 - \hat{Q}_{2,4}\hat{R}_1)\hat{b} \\ \hat{c}_4 &= (\hat{Q}_{2,3}\hat{R}_1 - \hat{Q}_{1,3}\hat{R}_2)\hat{b} \end{aligned} \quad (42)$$

eine Basisgröße \hat{b} eingeführt werden. Die Größen $\hat{w}_1, \dots, \hat{w}_4$ ergeben sich durch Einsetzen von $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = 0$ und der Ausdrücke (42) in (40). Dies liefert

$$\hat{w}(x) = \hat{W}(x)\hat{b}, \quad \hat{u} = \hat{U}\hat{b}, \quad (43)$$

mit $\hat{U} \in \mathbb{C}_{1/2}[[s]]$ und $\hat{W}(x) \in (\mathbb{C}_{1/2}[[s]])^4$.

Die Systemtrajektorien können nun durch Vorgabe einer Trajektorie für die Basisgröße \hat{b} parametrisiert werden. Für einen Übergang zwischen Ruhelagen entspricht das Vorgehen jenem für die Balkengleichung in Abschnitt 2.3.

In Bild 3 ist ein Simulationsergebnis für einen schnellen Übergang zwischen zwei Ruhelagen in der (dimensionslosen) Zeit $T = 0,0025$ für $l = 0$, $\Lambda(r, \theta) = 1$ dargestellt. Dies entspricht einer vom Winkel unabhängigen Wölbung. Dabei wurde die Trajektorie der Basisgröße entsprechend Abschnitt 4.3 polynomial gewählt. Zur Berechnung der

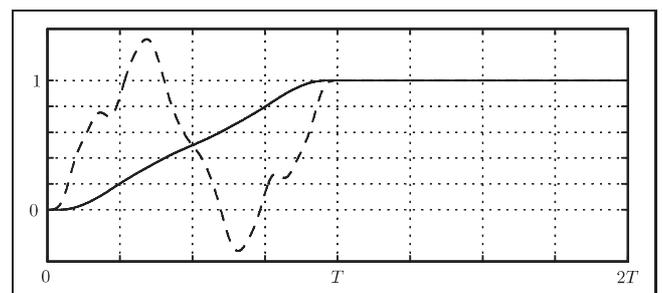


Bild 3: Normierte Darstellung der Trajektorien der Randauslenkung $t \mapsto \hat{w}(r_a, \theta, t) = \hat{w}(r_a, t)$ (durchgezogen) und der zugehörigen Stellgröße $t \mapsto \hat{u}(t)$ (gestrichelt) bei einem Übergang zwischen Ruhelagen in $T = 0,0025$.

Steuerung wurden deren Ableitungen bis zur Ordnung 16 berücksichtigt. Als Simulationsmodell wurde eine modale Approximation der Plattengleichung verwendet, wobei die ersten 8 Eigenfrequenzen berücksichtigt wurden. Die Werte der in dieser und den folgenden Simulationen verwendeten dimensionslosen Modellparameter lauten $r_a = 0,05$, $r_i = 0,01$, $D = 1,64$, $K = 5,53$ und $\nu = 0,2$.

5.3 Zwei harmonisch gewichtete Stellgrößen

Es wird nun der Fall zweier örtlich ideal harmonisch gewichteter Stellgrößen u_1 und u_2 untersucht, wobei die Gewichte Λ_1 und Λ_2 durch

$$\Lambda_1(\theta, r) = \lambda(r) \sin(l\theta), \quad \Lambda_2(\theta, r) = \lambda(r) \cos(l\theta) \quad (44)$$

gegeben sind.

Die Lösung der pDgl. (33) kann in der Form

$$\tilde{w}(r, \theta, t) = \tilde{w}_1(r, t) \sin(l\theta) + \tilde{w}_2(r, t) \cos(l\theta) \quad (45)$$

angesetzt werden. Setzt man beide Summanden getrennt in die Randwertaufgabe (33,35) ein, wobei jeweils nur diejenige Stellgröße mit dem dem Ansatz entsprechenden Gewicht berücksichtigt wird, dann erhält man für die beiden Funktionen \tilde{w}_1 und \tilde{w}_2 je eine örtlich eindimensionale Randwertaufgabe der Form (36,37). Die Lösungen \tilde{w}_1 und \tilde{w}_2 dieser beiden Randwertaufgaben können separat parametrisiert werden, wie dies in Abschnitt 5.2 dargestellt wurde.

Bezeichnet man mit $w_{i,1}, \dots, w_{i,4}$, $i = 1, 2$ diejenigen Funktionen, die analog zu (38) aus \tilde{w}_1 und \tilde{w}_2 gebildet werden, und mit $\hat{w}_{i,1}, \dots, \hat{w}_{i,4}$, $i = 1, 2$ die ihnen zugeordneten Operatorfunktionen, so erhält man für $\hat{w}_i = (\hat{w}_{i,1}, \dots, \hat{w}_{i,4})^T$, $i = 1, 2$ jeweils eine Gleichung der Form (43), d. h.

$$\hat{w}_i(r) = \hat{W}(r) \hat{b}_i, \quad \hat{u}_i = \hat{U} \hat{b}_i, \quad i = 1, 2. \quad (46)$$

mit den Basisgrößen \hat{b}_1 und \hat{b}_2 .

Die Operatoren \hat{U} , $\hat{W}(x)$ sind Potenzreihen aus $\mathbb{C}_{1/2}[[s]]$ und, da in (39a) lediglich das Quadrat des Operators s auftritt, von der Form

$$\hat{U} = \sum_{k=0}^{\infty} U_k s^{2k}, \quad \hat{W}(r) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(r) s^{2k}. \quad (47)$$

Somit folgt aus (46) für $i = 1, 2$

$$w_i(r, t) = \sum_{k=0}^{\infty} W_k(r) b_i^{(2k)}(t), \quad u_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k b_i^{(2k)}(t).$$

Wählt man für die Basisgrößen Trajektorien $t \mapsto b_i(t)$, $i = 1, 2$, deren Restriktionen auf ein Intervall \mathcal{I} jeweils harmonischen Funktionen

$$t \mapsto \bar{b} \sin(\omega t + \theta_i), \quad i = 1, 2 \quad (48)$$

entsprechen, dann ergibt sich dort

$$w_i(r, t) = \bar{b} \bar{W}_\omega(r) \sin(\omega t + \theta_i), \quad u_i(t) = \bar{b} \bar{U}_\omega \sin(\omega t + \theta_i)$$

mit

$$\bar{W}_\omega(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k W_k(r) \omega^{2k}, \quad \bar{U}_\omega = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k U_k \omega^{2k}.$$

Man erhält also für die Systemgrößen auf \mathcal{I} ebenfalls zeitlich harmonische Trajektorien mit gleicher Phasenlage und veränderter (eventuell auch negativer) Amplitude $\bar{b} \bar{W}_\omega(r)$ bzw. $\bar{b} \bar{U}_\omega$.

Soll ein mit der Winkelgeschwindigkeit ω/l in mathematisch positiver Richtung umlaufendes, bezüglich θ harmonisches Biegeprofil aufgeprägt werden, so muss gelten:

$$\begin{aligned} w(r, \theta, t) &= \bar{w}(r) \cos(l\theta - \omega t) \\ &= \bar{w}(r) (\sin(\omega t) \sin(l\theta) + \cos(\omega t) \cos(l\theta)). \end{aligned}$$

Das wird erreicht, indem man in (48) $\theta_1 = 0$ und $\theta_2 = \pi/2$ wählt, was auf $\bar{w}(r) = \bar{b} \bar{W}_\omega(r)$ führt. Die Amplitude \bar{b} für die Trajektorien der Basisgrößen kann folglich durch Vorgabe der gewünschten Amplitude einer Komponente von $\bar{w}(r_0)$ auf einem Kreisring festgelegt werden, was voraussetzt, dass die entsprechende Komponente von $\bar{W}_\omega(r_0)$ von 0 verschieden ist.

Um das System aus der Ruhelage in ein solches harmonisch eingeschwungenes Regime zu überführen, werden die Trajektorien

$$t \mapsto b_1(t) = \bar{b} \phi_T(t) \sin(\omega t), \quad t \mapsto b_2(t) = \bar{b} \phi_T(t) \cos(\omega t) \quad (49)$$

mit ϕ_T aus (13) gewählt.

In Bild 4 sind Simulationsergebnisse zur Illustration der beschriebenen Methode dargestellt. Das durch (36,37) mit $l = 4$ gegebene Modell wurde dabei in der Zeit $T = 10\pi/\omega \approx 2,11 \cdot 10^{-3}$ aus der Ruhelage in ein eingeschwun-

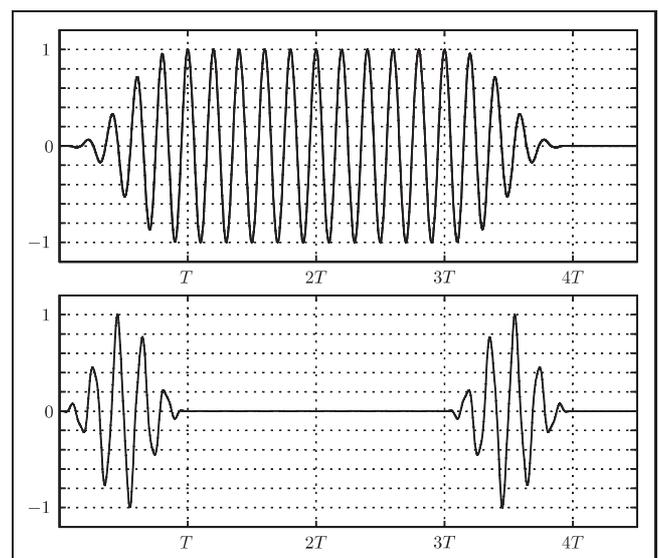


Bild 4: Normierte Trajektorien $t \mapsto \bar{w}(t, r_a)$ der Amplitude der Auslenkung am äußeren Rand (oben) sowie der Stellgröße $t \mapsto u_1(t)$ (unten) für einen Übergang zwischen einer Ruhelage und einem zeitlich harmonischen Regime mit der Frequenz ω , wobei gilt $\bar{U}_\omega = 0$.

genes Regime mit der Kreisfrequenz ω überführt, welches für die Zeitspanne $2T$ beibehalten wurde. Anschließend wurde das Modell zurück in die homogene Ausgangslage überführt, welche zum Zeitpunkt $t = 4T$ erreicht wurde. Für ω wurde dabei die zweite Eigenkreisfrequenz des Modells (36, 37) gewählt, d. h. die zweite der, nach dem Betrag aufsteigend geordneten, Nullstellen von $\omega \mapsto \tilde{U}_\omega$. Bild 4 zeigt, dass das gestellte Ziel sehr gut erreicht wird. Es ist außerdem zu erkennen, dass aufgrund der speziellen Wahl von ω als Eigenfrequenz im Intervall $[T, 3T]$ kein Stelleingriff nötig ist. Die in Bild 1 dargestellte Momentaufnahme entstammt dieser Simulation.

5.4 Allgemein gewichteter Stelleingriff

Die bisher angenommene, örtlich harmonische Gewichtung des Stelleingriffs ist technologisch schwierig zu realisieren. Einfacher umsetzbar sind beispielsweise gebietsweise konstante Stellgrößengewichtungen. Derartige Stellgrößenverteilungen können allerdings mit der vorgestellten Methode nicht exakt berücksichtigt werden. Es ist jedoch möglich, das örtlich zweidimensionale Modell (33, 35) durch ein auf einer abgebrochenen Fourierreihe basierendes, örtlich eindimensionales Ersatzmodell zu approximieren und anschließend eine Steuerung für das Ersatzmodell zu entwerfen.

5.4.1 Örtlich eindimensionales Ersatzmodell

Die Auslenkung und die Matrix der Stellgrößengewichte werden in Fourierreihen bezüglich der Koordinate θ entwickelt:

$$\tilde{w}(r, \theta, t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^1 \tilde{w}_{2l+i}(r, t) \sin(l\theta + i\pi/2) \quad (50a)$$

$$\Lambda(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=0}^1 \lambda_{2l+i}(r) \sin(l\theta + i\pi/2). \quad (50b)$$

Einsetzen in (33) liefert, unter Ausnutzung der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen, die pDgl.

$$\Delta_l (D \Delta_l \tilde{w}_{2l+i} + \lambda_{2l+i} u) + K \partial_t^2 \tilde{w}_{2l+i} = 0 \quad (51a)$$

$$\Delta_l = r^{-1} \partial_r (r \partial_r) - r^{-2} l^2, \quad i = 0, 1, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Als Randbedingungen ergeben sich aus (35) $\tilde{w}_{2l+i} = 0$, $r \partial_r \tilde{w}_{2l+i} = 0$ bei $r = r_i$ sowie, bei $r = r_a$,

$$\begin{aligned} D (\Delta_l + \mu r^{-2} (l^2 - r \partial_r)) \tilde{w}_{2l+i} + \lambda_{2l+i} u &= 0 \\ D (r \partial_r \Delta_l + \mu l^2 \partial_r r^{-1}) \tilde{w}_{2l+i} + r \partial_r \lambda_{2l+i} u &= 0. \end{aligned} \quad (51b)$$

Das dem Fourierkoeffizienten \tilde{w}_{2l+i} zugeordnete Teilsystem (51) wird nachfolgend mit Π_{2l+i} bezeichnet.

5.4.2 Steuerungsentwurf für das Ersatzmodell

Das prinzipielle Vorgehen kann dargestellt werden, indem lediglich zwei Stellgrößen u_1 und u_2 betrachtet werden. Für

die Koeffizienten Λ_1 und Λ_2 wird dabei zusätzlich vorausgesetzt, dass sie in der Form

$$\begin{aligned} \Lambda_1(r, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\lambda}_{\sigma_1(k)}(r) \sin(\sigma_1(k)\theta) \\ \Lambda_2(r, \theta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{\lambda}_{\sigma_2(k)}(r) \cos(\sigma_2(k)\theta) \end{aligned} \quad (52)$$

vorliegen, wobei die streng monotonen Folgen $\sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow (2\mathbb{N})$, $\sigma_2 : \mathbb{N} \rightarrow (2\mathbb{N} + 1)$ aus den Fourierreihenentwicklungen von Λ_1 und Λ_2 diejenigen Terme auswählen, deren Koeffizienten nicht verschwinden. Deshalb entsprechen $\Pi_{\sigma_1(1)}, \dots, \Pi_{\sigma_1(N_i)}$, $i = 1, 2$ den jeweils ersten N_i nichtautonomen Teilsystemen im Ersatzmodell (50), und nur diese müssen für den Steuerungsentwurf berücksichtigt werden. Aufgrund der speziellen Gewichtung (52) sind die Teilsysteme mit geraden Indizes vollständig von denen mit ungeraden entkoppelt⁷: In ersteren tritt ausschließlich die Stellgröße u_1 auf, in letzteren ausschließlich u_2 .

Um die Ergebnisse der vorangegangenen Abschnitte nutzen zu können, wird die Verkopplung der Teilsysteme untereinander zunächst ignoriert. Dazu wird in jedem Teilsystem eine virtuelle Eingangsgröße eingeführt:

$$v_{\sigma_i(k)}(t) = u_i(t), \quad k = 1, \dots, N_i, \quad i = 1, 2. \quad (53)$$

Die zugehörigen Modelle können so in der Form (36) geschrieben werden, wobei dort $u(t) = v_{\sigma_i(k)}(t)$, $\lambda(r) = \tilde{\lambda}_{\sigma_i(k)}(r)$ sowie $\tilde{w}(r, t) = \tilde{w}_{\sigma_i(k)}(r, t)$ zu setzen sind. Die Operatorlösung für die diesen Gleichungen zugeordneten Systeme erster Ordnung kann dann entsprechend Abschnitt 5.2 berechnet werden. Analog zu (43) erhält man so (mit $\hat{b} = \hat{\beta}_{\sigma_i(k)}$, $\hat{w} = \hat{w}_{\sigma_i(k)}$, $\hat{U} = \hat{V}_{\sigma_i(k)}$, $\hat{W} = \hat{W}_{\sigma_i(k)}$)

$$\hat{v}_{\sigma_i(k)} = \hat{V}_{\sigma_i(k)} \hat{\beta}_{\sigma_i(k)}, \quad \hat{w}_{\sigma_i(k)}(r) = \hat{W}_{\sigma_i(k)}(r) \hat{\beta}_{\sigma_i(k)}.$$

Tatsächlich sind die Größen $\hat{\beta}_{\sigma_i(k)}$ für $N_i > 1$ nicht frei, da die virtuellen Stellgrößen $\hat{v}_{\sigma_i(k)}$ außerdem den Gleichungen (53) genügen müssen. Aus diesen folgt

$$\hat{V}_{\sigma_i(k)} \hat{\beta}_{\sigma_i(k)} = \hat{u}_i, \quad k = 1, \dots, N_i, \quad i = 1, 2. \quad (54)$$

Diese Gleichungen bilden die Grundlage zum Einführen von Basisgrößen. Da nur zwei reale Stellgrößen u_1, u_2 zur Verfügung stehen, können auch nur zwei Basisgrößen \hat{b}_1, \hat{b}_2 eingeführt werden. Damit ergibt sich ($i = 1, 2$)

$$\hat{u}_i = \hat{\pi}_i \hat{b}_i, \quad \hat{\beta}_{\sigma_i(k)} = \left(\hat{\pi}_i / \hat{V}_{\sigma_i(k)} \right) \hat{b}_i, \quad \hat{\pi}_i = \prod_{j=1}^{N_i} \hat{V}_{\sigma_i(j)}.$$

Hieraus erhält man zunächst ($i = 1, 2$)

$$\hat{w}_{\sigma_i(k)}(r) = \hat{W}_{\sigma_i(k)}(r) \left(\hat{\pi}_i / \hat{V}_{\sigma_i(k)} \right) \hat{b}_i, \quad k = 1, \dots, N_i. \quad (55)$$

⁷ Diese Annahmen dienen lediglich zur Vereinfachung der Notation, sind aber für die Anwendbarkeit der Methode nicht Bedingung.

Schließlich entspricht die erste Komponente von

$$\hat{w}(r, \theta) = \left(\sum_{k=1}^{N_1} \frac{\hat{W}_{\sigma_1(k)}(r) \hat{\pi}_1}{\hat{V}_{\sigma_1(k)}} \sin(\sigma_1(k)\theta) \right) \hat{b}_1 + \left(\sum_{k=1}^{N_2} \frac{\hat{W}_{\sigma_2(k)}(r) \hat{\pi}_2}{\hat{V}_{\sigma_2(k)}} \cos(\sigma_2(k)\theta) \right) \hat{b}_2$$

dem gesuchten Biegeprofil (50a).

5.4.3 Gebietsweise konstante Gewichtung

Nimmt man an, dass m getrennt ansteuerbare Elektroden jeweils Ringsegmente ($k = 1, \dots, m$)

$$\Omega_k = \Theta_k \times [r_i, r_a], \quad \Theta_k = [\theta_{k-1}, \theta_k], \quad \theta_k = \frac{2\pi k}{m}, \quad \theta_0 = 0$$

gleichförmig überdecken, dann können die Einträge der Koeffizientenmatrix Λ aus Abschnitt 5.1 in der Form

$$\Lambda_k(r, \theta) = \begin{cases} \lambda, & (r, \theta) \in \Omega_k \\ 0, & (r, \theta) \notin \Omega_k \end{cases}, \quad k = 1, \dots, m \quad (56)$$

mit konstantem λ dargestellt werden.

Eine Steuerung kann nun für ein Ersatzmodell gemäß (51) mit m Stellgrößen entworfen werden. Um einen Abbruch der Fourierreihen (50) nach nur wenigen Termen zu rechtfertigen, wird stattdessen ein anderer Weg beschritten. Dabei werden die in Abschnitt 5.2 vorausgesetzten, ideal harmonisch gewichteten Stelleingriffe zunächst durch die stückweise konstanten approximiert. Anschließend kann die Steuerung gemäß Abschnitt 5.4.2 für ein Modell mit zwei (Ersatz-)Stellgrößen entworfen werden.

Die angestrebte harmonische Verteilung wird durch $\theta \mapsto \sin(n\theta)$ bzw. $\theta \mapsto \cos(n\theta)$ beschrieben. Diese Funktionen werden durch Minimierung der Fehlerfunktionale

$$\int_0^{2\pi} (\sin(\theta) - \sin(n\theta))^2 d\theta, \quad \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) - \cos(n\theta))^2 d\theta$$

bestimmt, wobei die gesuchten Parameter die Koeffizienten $s_{n,j}$ bzw. $c_{n,j}$ in dem Ansatz

$$\sin(\theta) := \sum_{j=1}^m \lambda s_{n,j} I_{\Theta_j}(\theta), \quad \cos(\theta) := \sum_{j=1}^m \lambda c_{n,j} I_{\Theta_j}(\theta)$$

sind. Hierin bezeichnet $I_{\Theta_k} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ die charakteristische Funktion der Menge Θ_k , die für $\theta \in \Theta_k$ den Wert 1 annimmt und ansonsten 0. Die Minimierung der Fehlerfunktionale liefert

$$s_{n,j} = \frac{m}{2\pi n \lambda} \left(\cos\left(\frac{2\pi n(j-1)}{m}\right) - \cos\left(\frac{2\pi n j}{m}\right) \right)$$

$$c_{n,j} = \frac{m}{2\pi n \lambda} \left(\sin\left(\frac{2\pi n j}{m}\right) - \sin\left(\frac{2\pi n(j-1)}{m}\right) \right).$$

Mit diesen Koeffizienten werden die Ersatzstellgrößen \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 eingeführt, mit denen die realen Stellgrößen in der Form

$$u_k = \tilde{u}_1 s_{n,k} + \tilde{u}_2 c_{n,k}, \quad k = 1, \dots, m$$

geschrieben werden können. Mit diesen Ersatzstellgrößen erhält man für die in (50b) eingeführten Fourierkoeffizienten $\lambda_{2l+i} = (\lambda_{1,2l+i}, \lambda_{2,2l+i})$, $l \in \mathbb{N}$, $i = 0, 1$ die Einträge $\lambda_{1,2l+1} = 0$, $\lambda_{2,2l} = 0$ sowie

$$\lambda_{2l,1} = \frac{2\lambda^2}{m} \sum_{j=1}^m s_{l,j} s_{n,j}, \quad \lambda_{2l+1,2} = \frac{2\lambda^2}{m} \sum_{j=1}^m c_{l,j} c_{n,j}.$$

Für das mit den Ersatzstellgrößen \tilde{u}_1, \tilde{u}_2 angesteuerte System kann entsprechend Abschnitt 5.4.2 vorgegangen werden. Dabei gilt für die Koeffizienten in (52) $\tilde{\lambda}_{2l+i} = \lambda_{2l+i, i+1}$, $i = 0, 1$.

Die Trajektorien $t \mapsto b_1(t)$ und $t \mapsto b_2(t)$ für die Basisgrößen können anhand des gewünschten Verhaltens der Fourier-Koeffizienten \tilde{w}_{2n} und \tilde{w}_{2n+1} zu den zu approximierenden Harmonischen festgelegt werden. Dabei kann man wie in Abschnitt 5.3 verfahren, wobei an Stelle von (46) die Gleichung (55) verwendet wird. Anschließend können die Trajektorien der Systemgrößen sämtlicher im Ersatzmodell berücksichtigter Teilsysteme berechnet werden.

Für die Simulation wurde von $m = 8$ gebietsweise konstant gewichteten Stellgrößen ausgegangen. Mit diesen wurde entsprechend Abschnitt 5.4.3 ein harmonischer Stelleingriff approximiert (hier $\sin \theta$, $n = 1$). Realisiert wurde ein Übergang zwischen zwei Ruhelagen in der (dimensionslosen) Zeit $T = 0,003$.

Zunächst wurde für die Planung lediglich das Teilsystem Π_2 des Fourierreihenkoeffizienten zu $\theta \mapsto \sin \theta$ berücksichtigt. Das im oberen Teil des Bildes 5 dargestellte

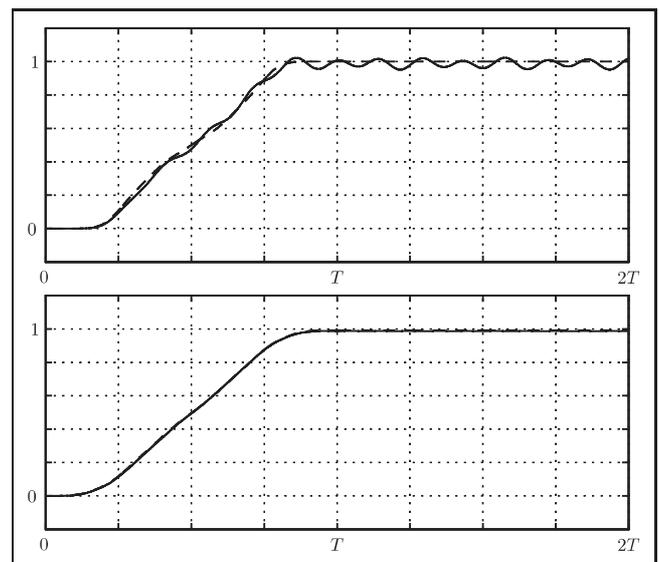


Bild 5: Normierte Darstellung von $t \mapsto \tilde{w}(r_a, \pi/2, t)$ (durchgezogen) und $t \mapsto \tilde{w}_{\text{ref}}(r_a, \pi/2, t)$ für einen Übergang zwischen Ruhelagen in $T = 0,003$ des mit 8 Stellgrößen gebietsweise konstant angesteuerten Systems bei Berücksichtigung der ersten (oben) bzw. der ersten, siebenten und neunten Harmonischen (unten).

Simulationsergebnis zeigt, dass mit der auf Grundlage dieses zu einfachen Ersatzmodells geplanten Steuerung keine zufriedenstellenden Resultate erzielt werden können. Berücksichtigt man stattdessen die ersten drei nichtautonomen Teilsysteme aus (51), hier sind dies Π_2 , Π_{14} und Π_{18} , so entspricht die aus der Simulation erhaltene Trajektorie der Randauslenkung in guter Näherung der geplanten (vgl. Bild 5 unten). Im Gegensatz zu dem in Bild 1 dargestellten Fall, bei dem (durch die Wahl von $n = 4$) für feste r bezüglich der Winkelkoordinate θ vier lokale Maxima im Biegeprofil auftreten, handelt es sich hier mit $n = 1$ um ein Profil mit nur einem solchen Maximum. Um die Auswirkung der Anzahl der im Ersatzmodell berücksichtigten Teilsysteme (51) zu veranschaulichen, wurde ein Übergang in eine Ruhelage geplant. Umlaufende Biegeprofile können ebenfalls erreicht werden, indem die Trajektorien der Basisgrößen entsprechend (49) gewählt werden.

Als Simulationsmodell wurde auch hier eine modale Approximation des Modells (33, 35) verwendet, wobei zu jedem der Teilsysteme Π_1, \dots, Π_{34} die ersten 5 Eigenmoden berücksichtigt wurden.

6 Schlussfolgerung

Für die untersuchten pDgln. können Steuerungen durch Reihenentwicklungen der Operatorlösungen der Dgln. entworfen werden. Das Beispiel einer ringförmigen Platte zeigt, dass Erweiterungen des Zugangs auf örtlich zweidimensionale Randwertaufgaben möglich sind. Hier könnten künftige Forschungsarbeiten anknüpfen.

Danksagung

Die Autoren danken Herrn Prof. M. Zeitz für wertvolle Anregungen zur Darstellung der Ergebnisse.

Literatur

- [1] BOAS, R.: *Entire Functions*. Academic Press, 1954.
- [2] KUGI, A. und D. THULL: *Infinite-dimensional Decoupling Control of the Tip Position and the Tip Angle of a Composite Piezoelectric Beam with Tip Mass*. In: MEURER, T., K. GRAICHEN und E. D. GILLES (Hg.): *Control and Observer Design for Nonlinear Finite- and Infinite-Dimensional Systems*, Seite 351–368. Springer-Verlag, 2005.
- [3] LAGNESE, J. E. und J. L. LIONS: *Modelling analysis and control of thin plates*. Masson, Paris, 1989.
- [4] LYNCH, A. F. und J. RUDOLPH: *Flachheitsbasierte Randsteuerung parabolischer Systeme mit verteilten Parametern*. at – Automatisierungstechnik, 48:478–486, 2000.
- [5] LYNCH, A. F. und J. RUDOLPH: *Flatness-based boundary control of a class of quasilinear parabolic distributed parameter systems*. Internat. J. Control, 75(15):1219–1230, 2002.
- [6] MEURER, T.: *Feedforward and Feedback Tracking Control of Diffusion-Convection-Reaction Systems using Summability Methods*. VDI-Verlag, Düsseldorf, 2005.
- [7] MEURER, T. und M. ZEITZ: *Flachheitsbasierte Steuerung und Regelung eines Wärmeleitsystems*. at – Automatisierungstechnik, 52(9):411–420, 2004.
- [8] MIKUSIŃSKI, J.: *Operational Calculus*, Vol. 1. Pergamon, Oxford & PWN, Warszawa, 1983.
- [9] RUDOLPH, J.: *Randsteuerung von Wärmetauschern mit örtlich verteilten Parametern: Ein flachheitsbasierter Zugang*. at – Automatisierungstechnik, 48:399–406, 2000.
- [10] RUDOLPH, J.: *Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension*. Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [11] RUDOLPH, J., J. WINKLER und F. WOITTENNEK: *Flatness based control of distributed parameter systems: Examples and computer exercises from various technological domains*. Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [12] RUDOLPH, J. und F. WOITTENNEK: *Flachheitsbasierte Randsteuerung von elastischen Balken mit Piezoaktuatoren*. at – Automatisierungstechnik, 50:412–421, 2002.
- [13] RUDOLPH, J. und F. WOITTENNEK: *Motion Planning for Euler-Bernoulli Beams*. In: SIRA-RAMÍREZ, H. und G. SILVA-NAVARRO (Hg.): *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation*, Kap. 8, Seite 131–148. Innovación Editorial Lagares, México, 2003.
- [14] SCHLACHER, K. und A. KUGI: *Control of Mechanical Structures by Piezoelectric Actuators and Sensors*. In: AEYELS, D., F. LAMNABHI-LAGARRIGUE und A. VAN DER SCHAFT (Hg.): *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*, Seite 275–292. Springer-Verlag, 1999.
- [15] THULL, D., D. WILD und A. KUGI: *Infinite-dimensional Regelung eines Brückenkranes mit schweren Ketten*. at – Automatisierungstechnik, 53(8):400–410, 2005.
- [16] WOITTENNEK, F.: *Beiträge zum Steuerungsentwurf für lineare örtlich verteilte Systeme mit konzentrierten Stelleingriffen*. vorgelegte Dissertationsschrift, 2006.
- [17] WOITTENNEK, F. und J. RUDOLPH: *Motion planning for a circular elastic plate*. In: *PAMM – Proc. Appl. Mathem. and Mechanics*, Vol. 4, Seite 149–150, 2004.

Manuskripteingang: 12. Dezember 2005.



PD Dr.-Ing. habil. Joachim Rudolph (Korrespondenzautor) ist am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie (Prof. K. Reinschke) der TU Dresden tätig. Hauptarbeitsgebiete: Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Regelstrecken, algebraische Methoden, lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme; Anwendungen in der Mechatronik und der Verfahrenstechnik.

Adresse: siehe unten,
E-Mail: Joachim.Rudolph@tu-dresden.de



Dipl.-Ing. Frank Woittennek ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie (Prof. K. Reinschke) der TU Dresden. Hauptarbeitsgebiet: lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme.

Adresse: Technische Universität Dresden, Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, 01062 Dresden,
E-Mail: Frank.Woittennek@tu-dresden.de