

Ein algebraischer Zugang zur Parameteridentifikation in linearen unendlichdimensionalen Systemen

An Algebraic Approach to Parameter Identification in Linear Infinite Dimensional Systems

Joachim Rudolph und Frank Woittennek

Es wird ein algebraischer Zugang zur Parameteridentifikation in linearen verteiltparametrischen Systemen vorgestellt. Dabei werden zunächst Systeme mit verzögertem Eingang und homogenen Anfangsbedingungen untersucht. Eine mögliche Verallgemeinerung auf Systeme mit inhomogenen Anfangsbedingungen wird am Beispiel einer autonomen Differenzen-Differenzialgleichung diskutiert. Ein analoger Zugang erlaubt die Identifikation von Parametern auch in Systemen, die durch (örtlich eindimensionale) lineare partielle Differenzialgleichungen beschrieben werden. Dabei werden lediglich die Trajektorien von Randgrößen als bekannt vorausgesetzt. Der Zugang wird am Beispiel von partiellen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung bezüglich des Orts, insbesondere der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung, diskutiert.

An algebraic approach for identification of parameters in linear infinite dimensional systems based on operational calculus is proposed. First, the method is derived for a system with delayed input and homogeneous initial conditions. A possible generalization to delay systems without input and non-homogeneous initial conditions is sketched. A similar approach is applicable to systems described by linear partial differential equations which, in particular, is discussed for second order p. d. e., as for instance the one dimensional heat equation.

Schlagwörter: Parameteridentifikation, unendlichdimensionales System, Operatorenrechnung, Totzeitsystem, Wärmeleitungsgleichung

Keywords: Parameter identification, infinite dimensional system, operational calculus, delay system, heat equation

1 Einleitung

Ein von M. Fliess und H. Sira-Ramírez vorgeschlagener algebraischer Ansatz zur Identifikation von Parametern in linearen (endlichdimensionalen) Systemen [7] hat in jüngster Zeit zu einer verstärkten Aktivität und interessanten Arbeiten in diesem Bereich geführt [4; 5]. Der Ansatz nutzt Operatorenrechnung zur Überführung von Differenzialgleichungen [5; 7] oder Differenzengleichungen [4] in algebraische Gleichungen. Dabei tritt der Operator s an die Stelle der Zeitableitung, und in den Rechenschritten zur Bestimmung linearer Gleichungssysteme in den zu identi-

fizierenden Parametern spielt die so genannte algebraische Ableitung, also die Ableitung nach s , eine wesentliche Rolle.

Ausgehend von dieser algebraischen Sichtweise auf die in [7] und einigen der Folgearbeiten entwickelten Methoden ergibt sich auch ein Ansatz für einen Zugang zur Identifikation der Parameter in linearen unendlichdimensionalen Systemen. Für solche Systeme sind in den letzten Jahren Fortschritte im Bereich der Trajektorienplanung und Steuerung gemacht worden, die ebenfalls wesentlich auf die Operatorenrechnung zurückgreifen [6; 11–17]. So erscheint

ein Versuch der Verallgemeinerung auf diese Klasse von Systemen vielversprechend.

Es bietet sich an, zunächst den Spezialfall der Totzeitsysteme zu behandeln. Dabei stellt sich die Aufgabe einer simultanen Identifikation der Koeffizienten der Systemgleichungen und der Totzeitamplitude(n). Eine Verallgemeinerung des Ansatzes aus [7] führt zu brauchbaren Ergebnissen. (Eine dieser Verallgemeinerung entsprechende Methode auf Basis der Distributionentheorie wurde unabhängig bereits in [1] veröffentlicht.) Man macht sich dabei zunutze, dass der Verschiebeoperator $\exp(-sT)$ einer linearen Differenzialgleichung bezüglich s genügt. Dies gestattet dessen Elimination aus den Gleichungen für die Parameter. Auch die Systemgrößen und deren Ableitungen werden durch Operatoren repräsentiert. Diese werden, im Gegensatz zum endlichdimensionalen Fall, nun auch miteinander multipliziert. Das führt für die letztlich auszuführenden Berechnungen auf Faltungsintegrale. Ein weiterer die Identifikation der Parameter erschwerender Unterschied zu endlichdimensionalen Systemen liegt in der Struktur der schließlich für die Identifikation verwendeten Gleichungen: Die zu bestimmenden Parameter können nun auch polynomial in diesen Gleichungen auftreten.

Auch die Behandlung der Anfangsbedingungen erweist sich als wesentlich schwieriger als im endlichdimensionalen Fall, in dem sie durch Differentiation nach s eliminiert werden können. Die bisher entwickelten Algorithmen sind daher vor allem für die Identifikation „aus Gleichgewichtslagen heraus“ geeignet. Ein erster Ansatz zur Verallgemeinerung auf den Fall inhomogener Anfangsbedingungen wird vorgeschlagen.

Für allgemeinere lineare unendlichdimensionale Systeme kann man entsprechend den Totzeitsystemen ebenfalls ausnutzen, dass sich im Rahmen der Darstellung der Lösung Operatoren ergeben, die (gewöhnlichen) Differenzialgleichungen bezüglich s genügen. Diese lassen sich erneut für die Elimination der Operatorfunktionen nutzen. Erste Ergebnisse zu einem solchen Zugang, beispielsweise für Systeme zweiter Ordnung bezüglich der Ortsableitung (wie z. B. Wärmeleiter), werden in diesem Beitrag vorgestellt.

2 System mit verzögertem Eingang

Dieser Abschnitt behandelt die Identifikation von Parametern in einer linearen Differenzialgleichung erster Ordnung mit verzögertem Eingang. Die dafür entwickelte Methode ist der in [1] veröffentlichten sehr ähnlich. Während diese jedoch auf der Distributionentheorie basiert, wird hier ein Zugang über die Operatorenrechnung gewählt.

2.1 Bestimmung eines Gleichungssystems zur Parameteridentifikation

Gegeben sei ein lineares System

$$\dot{y}(t) = ay(t) + bu(t - \tau), \quad t > 0, \quad b \neq 0 \quad (1a)$$

mit verzögertem Eingang u und den unbekanntem Parametern a , b und τ . Im Falle homogener Anfangsbedingungen

$$y(0) = 0, \quad u(t) = 0, \quad t \in [-\tau, 0] \quad (1b)$$

lautet die zugehörige Operatorgleichung

$$(s - a)\hat{y} = be^{-s\tau}\hat{u}. \quad (2)$$

Formales Differenzieren dieser Gleichung nach dem Differenzialoperator s liefert

$$(s - a)\hat{y}' + \hat{y} = be^{-s\tau}(\hat{u}' - \tau\hat{u}). \quad (3)$$

In der durch Multiplikation von (3) mit \hat{u} entstehenden Gleichung kann der Ausdruck $be^{-s\tau}\hat{u}$ durch die linke Seite von (2) ersetzt werden. Man erhält so

$$a\hat{v}_1 - \tau s\hat{v}_2 + \tau a\hat{v}_2 = \hat{v}_2 + s\hat{v}_1 \quad (4)$$

mit $\hat{v}_1 = \hat{y}'\hat{u} - \hat{u}'\hat{y}$ und $\hat{v}_2 = \hat{u}\hat{y}$. Die Ausdrücke a , τ und $a\tau$ werden nachfolgend als voneinander unabhängig aufgefasst. Um ein Gleichungssystem zu ihrer Berechnung zu erhalten, wird (4) mit s^{-i} , $i = 1, 2, 3$ multipliziert. Dies liefert (mit $\hat{w} = s^{-1}\hat{v}_2 + \hat{v}_1$)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} s^{-1}\hat{v}_1 & -\hat{v}_2 & s^{-1}\hat{v}_2 \\ s^{-2}\hat{v}_1 & -s^{-1}\hat{v}_2 & s^{-2}\hat{v}_2 \\ s^{-3}\hat{v}_1 & -s^{-2}\hat{v}_2 & s^{-3}\hat{v}_2 \end{pmatrix}}_{=: \hat{A}} \begin{pmatrix} a \\ \tau \\ a\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{w} \\ s^{-1}\hat{w} \\ s^{-2}\hat{w} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Über dem Faltungsring \mathcal{C} (vgl. Abschnitt 7) besitzt dieses Gleichungssystem offensichtlich keine eindeutige Lösung. Die Regularität der Koeffizientenmatrix \hat{A} in (5) über \mathcal{C} (d. h. bezüglich des Faltungsprodukts) wird allerdings nicht benötigt, da das betrachtete Gleichungssystem nachfolgend bezüglich der üblichen punktweisen Multiplikation von Funktionswerten gelöst werden soll. Aus (5) erhält man

$$\underbrace{\begin{pmatrix} v_{1,1}(t) & -v_{2,0}(t) & v_{2,1}(t) \\ v_{1,2}(t) & -v_{2,1}(t) & v_{2,2}(t) \\ v_{1,3}(t) & -v_{2,2}(t) & v_{2,3}(t) \end{pmatrix}}_{=: A(t)} \begin{pmatrix} a \\ \tau \\ a\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w(t) \\ w_1(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

mit $v_{i,0}(t) = v_i(t)$ sowie

$$v_{i,k}(t) = \int_0^t \frac{(t-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} v_i(\xi) d\xi, \quad k > 0$$

$$w_k(t) = \int_0^t \frac{(t-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} w(\xi) d\xi, \quad k > 0.$$

Um die Lösbarkeit dieses Gleichungssystems für ein bestimmtes $t \in \mathbb{R}^+$ zu garantieren, muss die Matrix $A(t)$ regulär sein. Dies wird im nächsten Unterabschnitt untersucht.

Hat man τ und $a\tau$ bestimmt, so lässt sich der dritte unbekannt Parameter b aus Gleichung (2) bzw. (1a) ermitteln. Dazu wird Gleichung (2) mit s^{-2} multipliziert. (Das entspricht der zweimaligen Integration von (1a) bezüglich der

Zeit.) Anschließend kann, bezüglich der punktweisen Multiplikation, nach b aufgelöst werden:

$$b = \frac{\int_0^t (1 - (t - \xi)a)y(\xi)d\xi}{\int_0^t (t - \xi)u(\xi - \tau)d\xi}.$$

2.2 Zur Identifizierbarkeit

Um die Parameter τ und a aus Gleichung (6) berechnen zu können, muss vorausgesetzt werden, dass $A(t)$ nicht für alle $t \in \mathbb{R}^+$ singular ist. Das soll nachfolgend genauer untersucht werden. Gemäß (2) gilt

$$b\hat{u} = e^{s\tau}\hat{g}\hat{y}, \quad \hat{g} = s - a. \tag{7}$$

In der Definition von \hat{v}_1 und \hat{v}_2 kann \hat{u} mit Hilfe von (7) substituiert werden:

$$b\hat{v}_1 = -e^{s\tau}(\tau\hat{g} + 1)\hat{y}^2, \quad b\hat{v}_2 = e^{s\tau}\hat{g}\hat{y}^2.$$

Diese Ausdrücke werden in (5) eingesetzt. Mit $\hat{r} = s^{-3}\hat{y}^2$ ergibt sich so zunächst

$$b\hat{A} = e^{s\tau} \begin{pmatrix} -s^2(\tau\hat{g} + 1)\hat{r} & -s^3\hat{g}\hat{r} & s^2\hat{g}\hat{r} \\ -s(\tau\hat{g} + 1)\hat{r} & -s^2\hat{g}\hat{r} & s\hat{g}\hat{r} \\ -(\tau\hat{g} + 1)\hat{r} & -s\hat{g}\hat{r} & \hat{g}\hat{r} \end{pmatrix}.$$

Mit der Matrix

$$T = \begin{pmatrix} -a^2 & -a & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ a(1 - a\tau) & 1 - a\tau & -\tau \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}, \quad \det T = 1$$

folgt daraus

$$bA(t - \tau) = \underbrace{\begin{pmatrix} r^{(4)}(t) & r^{(3)}(t) & \ddot{r}(t) \\ r^{(3)}(t) & \ddot{r}(t) & \dot{r}(t) \\ r^{(2)}(t) & \dot{r}(t) & r(t) \end{pmatrix}}_{\hat{A}(t)} T^{-1}. \tag{8}$$

Da $b \neq 0$ gilt, ist $A(t)$ genau dann singular, wenn $\hat{A}(t + \tau)$ singular ist. Dies ist offensichtlich genau dann auf ganz \mathbb{R}^+ der Fall, wenn r, \dot{r}, \ddot{r} ein und derselben Differentialgleichung zweiter Ordnung genügen.

2.3 Simulationsergebnis

Bild 1 zeigt das Ergebnis einer Simulationsstudie für die beschriebene Methode. Die Werte der zu bestimmenden Parameter wurden zu $a = -1, \tau = 1, b = 1$ gewählt. Alle Integrationen wurden unter Verwendung der Trapezregel bei einer Abtastzeit von 0,002 durchgeführt. Um die Sensibilität der Methode bezüglich rauschbehafteter Signale zu prüfen, wurden die simulierten Trajektorien durch ein additives weißes gaußsches Rauschen mit der Standardabweichung 0,01 gestört.

Im unteren Teil von Bild 1 ist zu erkennen, dass für $t > 5$ gute Schätzwerte für beide Parameter a und τ zur Verfügung stehen.

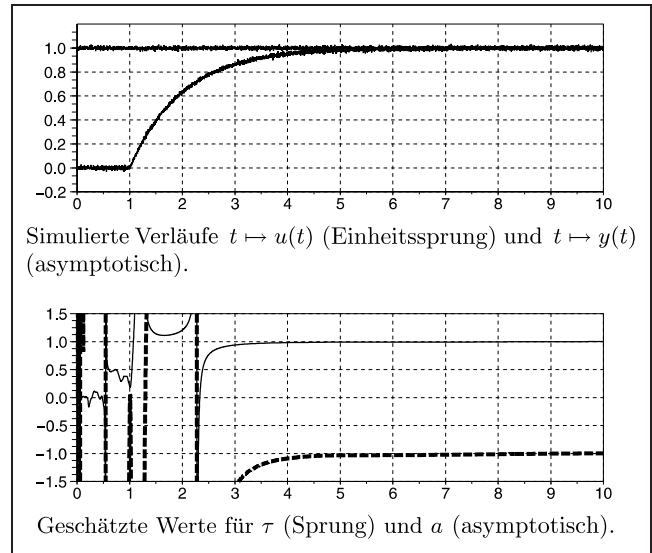


Bild 1: Parameterschätzung für das System (1) mit $a = -1, \tau = 1, b = 1$.

2.4 Herleitung der Differentialgleichung für den Totzeitoperator

In Abschnitt 2.1 wurde gezeigt, wie der Totzeitoperator unter Verwendung von Faltungsprodukten eliminiert werden kann. Bei näherer Betrachtung der Methode erkennt man, dass dazu ausgenutzt wurde, dass der Totzeitoperator $\hat{\delta}(z) = e^{-sz}$ einer linearen Differentialgleichung bezüglich des Differentialoperators s genügt ($D_s = d/ds$):

$$D_s \hat{\delta}(z) = -z \hat{\delta}(z). \tag{9}$$

Diese Differentialgleichung erhält man zum Beispiel unter Verwendung der Eigenschaften der Exponentialfunktion. In der Operatorenrechnung ist diese Funktion als Lösung der Anfangswertaufgabe

$$\partial_z \hat{\delta}(z) = -s \hat{\delta}(z), \quad \hat{\delta}(0) = 1 \tag{10}$$

definiert [9]. Vor allem im Hinblick auf eine mögliche Verallgemeinerung des betrachteten Zugangs auf partielle Differentialgleichungen in Abschnitt 5 ist die Frage interessant, ob (9) direkt aus (10) hergeleitet werden kann. Dies ist in der Tat möglich. Dazu wird (10) zunächst bezüglich s differenziert, das ergibt

$$(\partial_z + s) D_s \hat{\delta}(z) = -\hat{\delta}(z).$$

Multipliziert man (10) mit z und nutzt die Produktregel $\partial_z(z\hat{\delta})(z) = \hat{\delta}(z) + z\partial_z\hat{\delta}(z)$, so folgt außerdem

$$(\partial_z + s)(z\hat{\delta})(z) = \hat{\delta}(z).$$

Die Addition dieser Gleichungen und Division durch $(\partial_z + s)$ liefert (9).

Die im letzten Schritt ausgeführte Division fußt für $\mathbb{R}^+ \ni z \mapsto \hat{f}(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ auf der Implikation

$$\left((\partial_z + s)\hat{f}(z) = 0 \forall z \in \mathbb{R}^+ \right) \Rightarrow \left(\hat{f}(z) = 0 \forall z \in \mathbb{R}^+ \right).$$

Diese gilt zwar im hier betrachteten Fall $\hat{f}(z) = D_s \hat{\delta}(z) + z\hat{\delta}(z)$, jedoch offensichtlich nicht allgemein. Deshalb wird

nachfolgend eine weitere Möglichkeit betrachtet, um Gleichung (9) aus (10) zu gewinnen, wobei zweidimensionale Operatorenrechnung verwendet wird. Die Operatorfunktion $\hat{\delta} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R})$ wird dabei mit einem Operator $\hat{\delta}$ aus $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ identifiziert (siehe Abschnitt 7). Der Funktion $z \mapsto \partial_z \hat{\delta}(z)$ kann dann der Ausdruck $p\hat{\delta} - \hat{\delta}(0)$ zugeordnet werden. Auf diese Weise erhält man aus (10) die über $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ zu lesende Operatorgleichung

$$(p + s)\hat{\delta} = 1.$$

Bildet man die algebraischen Ableitungen dieser Gleichung einerseits bezüglich p , andererseits bezüglich s und subtrahiert die erhaltenen Gleichungen voneinander, so folgt

$$(p + s) \left(D_s \hat{\delta} - D_p \hat{\delta} \right) = 0.$$

Der algebraischen Ableitung bezüglich p in $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ entspricht in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ die Multiplikation mit $-z$. Somit folgt (9) nach Division durch $p + s$, wobei die Division nun tatsächlich erlaubt ist, da $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ als Körper keine Nullteiler besitzt. Die zuletzt beschriebene Methode wird in Abschnitt 5 verwendet, um den Zugang auch auf allgemeinere partielle Differenzialgleichungen zu übertragen.

3 Totzeitsystem ohne Eingang

Betrachtet man ein autonomes System, wie z. B.

$$\dot{y}(t) = ay(t - \tau), \tag{11}$$

dann ist die im vorangegangenen Abschnitt vorgestellte einfache Methode nicht mehr anwendbar: Für homogene Anfangsbedingungen lässt Gleichung (11), unabhängig von den Parametern a und τ , nur die triviale Lösung zu. Die Annahme homogener Anfangsbedingungen muss deshalb an dieser Stelle aufgegeben werden.

3.1 Bestimmung des Gleichungssystems zur Parameteridentifikation

Unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen lautet die (11) zugeordnete Operatorgleichung

$$s\hat{y} - y_0 = ae^{-s\tau}\hat{y} + e^{-s\tau}a \int_{-\tau}^0 y(t)e^{-ts} dt. \tag{12}$$

Dabei entsprechen der Operator \hat{y} der Funktion $t \mapsto h(t)y(t)$, wobei h die Heavisidefunktion ist, und der die Anfangsbedingungen widerspiegelnde Operator $\int_{-\tau}^0 y(t)e^{-ts} dt$ der Restriktion von y auf das Intervall $[-\tau, 0]$ (vgl. Abschnitt 7.3).

Im Gegensatz zu endlichdimensionalen linearen Systemen [5; 7] kann der den Anfangsbedingungen zugeordnete Operator nicht durch einfache algebraische Manipulationen eliminiert werden. Aus diesem Grund wird nachfolgend ein Ansatz verfolgt, der auf einer polynomialen Approximation der Anfangsbedingungen basiert. Dazu wird zunächst

angenommen, dass eine obere Schranke τ_{\max} für die Amplitude der Totzeit bekannt ist. Diese Schranke kann genutzt werden, um y auf dem Intervall $[-\tau_{\max}, 0]$ polynomial zu approximieren:

$$y(t) \approx \sum_{k=0}^n \alpha_k t^k, \quad t \in [-\tau_{\max}, 0].$$

Setzt man diese Näherung in (12) ein, so erhält man

$$s\hat{y} - y_0 = ae^{-s\tau}\hat{y} + \sum_{k=0}^n e^{-s\tau} a \int_{-\tau}^0 \alpha_k t^k e^{-ts} dt.$$

Partielle Integration führt auf

$$s\hat{y} - y_0 = ae^{-s\tau}\hat{y} + \sum_{k=0}^n e^{-s\tau} \alpha_k \left(e^{\tau s} \left(\sum_{l=0}^k \frac{k! (-\tau)^{k-l}}{(k-l)! s^{l+1}} \right) - \frac{k!}{s^{k+1}} \right). \tag{13}$$

Vertauscht man auf der rechten Seite der letzten Gleichung die Summationsreihenfolge, so erhält man schließlich

$$s\hat{y} - y_0 = ae^{-s\tau}\hat{f} + a \sum_{l=0}^n \tau^l \hat{g}_l \tag{14}$$

mit

$$\hat{f} = \hat{y} - \sum_{k=0}^n \alpha_k \frac{k!}{s^{k+1}}, \quad \hat{g}_l = \frac{(-1)^l}{l!} \sum_{k=l}^n \alpha_k \frac{k!}{s^{k-l+1}}.$$

Die Gleichung (14) bildet nun die Grundlage für die Identifikation. Durch Differenzieren von (14) bezüglich s wird zunächst die Anfangsbedingung y_0 eliminiert:

$$s\hat{y}' + \hat{y} - a \sum_{l=0}^n \tau^l \hat{g}'_l = ae^{-s\tau} (\hat{f}' - \tau \hat{f}). \tag{15a}$$

Um eine zweite Gleichung zu erhalten, mit der auch der Totzeitoperator eliminiert werden kann, differenziert man ein zweites Mal bezüglich s :

$$s\hat{y}'' + 2\hat{y}' - a \sum_{l=0}^n \tau^l \hat{g}''_l = ae^{-s\tau} (\hat{f}'' - 2\tau \hat{f}' + \tau^2 \hat{f}). \tag{15b}$$

Gleichung (15b) wird nun mit $\hat{f}' - \tau \hat{f}$ multipliziert, sodass der Totzeitoperator mit Hilfe von (15a) ersetzt werden kann:

$$\begin{aligned} & \left(s\hat{y}'' + 2\hat{y}' - a \sum_{l=0}^n \tau^l \hat{g}''_l \right) (\hat{f}' - \tau \hat{f}) \\ &= \left(s\hat{y}' + \hat{y} - a \sum_{l=0}^n \tau^l \hat{g}'_l \right) (\hat{f}'' - 2\tau \hat{f}' + \tau^2 \hat{f}). \end{aligned} \tag{16}$$

Nach Ausmultiplizieren der in dieser Gleichung auftretenden Produkte, Sortieren nach Potenzen von τ und Multiplikation mit s^{-1} folgt

$$a \sum_{l=0}^{n+2} \hat{v}_l \tau^l + \sum_{l=0}^2 \hat{w}_l \tau^k = 0,$$

wobei (mit der Konvention $\hat{g}_l = 0, l \notin \{0, \dots, n\}$) die Koeffizienten durch

$$\begin{aligned} \hat{v}_l &= s^{-1} \left(\hat{f}'' \hat{g}'_l - \hat{g}''_l \hat{f}' + \hat{f} \hat{g}''_{l-1} - 2 \hat{f}' \hat{g}'_{l-1} + \hat{f} \hat{g}'_{l-2} \right) \\ \hat{w}_0 &= s^{-1} \left((s \hat{y}'' + 2 \hat{y}') \hat{f}' - (s \hat{y}' + \hat{y}) \hat{f}'' \right) \\ \hat{w}_1 &= 2 \hat{f}' (\hat{y}' + s^{-1} \hat{y}) - \hat{f} (\hat{y}'' + 2s^{-1} \hat{y}') \\ \hat{w}_2 &= -\hat{f} (\hat{y}' + s^{-1} \hat{y}) \end{aligned}$$

gegeben sind.

3.2 Berechnung der Parameter

Ähnlich wie in Abschnitt 2 könnten $a, a\tau, \dots, a\tau^{n+2}, \tau, \tau^2$ als unabhängige Parameter aufgefasst und aus dem linearen Gleichungssystem

$$a \sum_{l=0}^{n+2} s^{-k} \hat{v}_l \tau^l + \sum_{l=0}^2 s^{-k} \hat{w}_l \tau^l = 0, \quad k = 0, \dots, n+4 \tag{17}$$

bestimmt werden. Allerdings ist nicht in jedem Fall sichergestellt, dass diese Gleichungen tatsächlich linear unabhängig sind¹. Aber auch wenn dies der Fall ist, können numerische Probleme bei der Lösung des recht umfangreichen Systems linearer Gleichungen auftreten. Aus diesen Gründen wird nachfolgend ein anderer Weg verfolgt. Es sei darauf hingewiesen, dass die folgenden Rechenschritte stets punktweise ausgeführt werden. Die Funktionen, die den Operatoren $s^{-k} \hat{v}_l$ und $s^{-k} \hat{w}_l$ entsprechen, werden dazu mit $v_{l,k}$ und $w_{l,k}$ bezeichnet.

Zunächst wird die letzte Gleichung in (17) ($k = n+4$) dazu genutzt, den Parameter a aus den restlichen Gleichungen in (17) zu eliminieren. Auf diese Weise ergeben sich für $k = 0, \dots, n+3$

$$\left(\sum_{l=0}^{n+2} v_{l,k}(t) \tau^l \right) \left(\sum_{l=0}^2 w_{k,n+4}(t) \tau^l \right) - \left(\sum_{l=0}^{n+2} v_{l,n+4}(t) \tau^l \right) \left(\sum_{l=0}^2 w_{l,k}(t) \tau^l \right) = 0, \tag{18}$$

beziehungsweise

$$p_k(\tau) = \sum_{l=0}^{n+4} x_{l,k}(t) \tau^l = 0, \quad k = 0, \dots, n+3, \tag{19}$$

mit $(v_{l,k}(t) = 0, l \notin \{0, \dots, n+2\})$

$$x_{l,k}(t) = \sum_{j=0}^2 (v_{l-j,k}(t) w_{j,n+4}(t) - v_{l-j,n+4}(t) w_{j,k}(t)).$$

Im nächsten Schritt werden die Wurzeln $\tau_1, \dots, \tau_{n+4}$ des Polynoms p_0 berechnet. Der gesuchte Parameter $\tau \in \{\tau_1, \dots, \tau_{n+4}\}$ genügt neben der Gleichung $p_0(\tau) = 0$ auch den übrigen Gleichungen $p_k(\tau) = 0$ in (19). Es sollte

¹ Nimmt man beispielsweise an, dass der führende Koeffizient α_n der Approximation der Anfangsbedingungen verschwindet, so sind \hat{g}_n und deshalb \hat{v}_{n+2} identisch Null.

deshalb möglich sein, den passenden Wert für τ aus $\{\tau_1, \dots, \tau_{n+4}\}$ auszuwählen, indem die Werte $\tau_1, \dots, \tau_{n+4}$ in die Polynome p_1, \dots, p_{n+3} eingesetzt und die Gleichungsfehler

$$e_k^2 = \sum_{i=1}^{n+3} (p_i(\tau_k))^2$$

ausgewertet werden.

Eine andere Möglichkeit besteht in der Berechnung des größten gemeinsamen Teilers der Polynome p_0, \dots, p_{n+3} in (19). Allerdings ist dieser Ansatz numerisch problematisch: Die Koeffizienten der betrachteten Polynome sind aufgrund gestörter Messungen und der bei der numerischen Berechnung der Faltungsprodukte entstehenden Fehler nur näherungsweise bekannt. Dies erfordert die Berechnung eines näherungsweise größten gemeinsamen Teilers, welche wesentlich schwieriger ist als die Bestimmung eines exakten größten gemeinsamen Teilers (vgl. z. B. [3]).

Bemerkung 1 Mit einer leicht veränderten Methode kann auf die explizite Approximation der Anfangsbedingungen verzichtet werden. Dieser alternative Ansatz wird nachfolgend kurz skizziert.

Multiplikation von Gleichung (14) mit s^{n+1} liefert

$$s^{n+2} \hat{y} - s^{n+1} y_0 = a e^{-s\tau} s^{n+1} \hat{y} + e^{-s\tau} \tilde{f} + \tilde{g}, \tag{20}$$

wobei \tilde{f} und \tilde{g} Polynome in s vom Grad $n+1$ sind. Wendet man D_s^{n+2} auf (20) an und multipliziert anschließend mit $e^{s\tau}$, so folgt nach erneutem Anwenden von D_s^{n+2}

$$D_s^{n+2} e^{s\tau} (D_s^{n+2} (s^{n+2} \hat{y} - a e^{-s\tau} s^{n+1} \hat{y})) = 0.$$

Verwendet man diese Gleichung statt (15a), so werden weder die Approximation noch eine obere Schranke für τ benötigt. Dennoch wird auch hier von der Annahme ausgegangen, dass die Anfangsbedingungen auf dem Intervall $[-\tau, 0] \ni t \mapsto y(t)$ durch ein Polynom n -ten Grades mit ausreichender Genauigkeit approximiert werden können. Die Kenntnis der Anfangsbedingungen aus der ersten Methode kann für andere Problemstellungen nützlich sein, beispielsweise für die Trajektorienplanung.

3.3 Simulationsergebnisse

Die vorgeschlagene Methode wurde in Simulationsstudien untersucht. Die Werte der dabei verwendeten Parameter waren durch $a = -1, \tau = 1$ gegeben, wobei die Anfangsbedingung auf dem Intervall $[-2, -1]$ gemäß $t \mapsto \cos 6t$ gewählt wurde. Um die Empfindlichkeit der Methode gegenüber verrauschten Daten zu untersuchen, wurden die aus der Simulation des Modells erhaltenen Trajektorien mit einem additiven weißen gaußschen Rauschen mit der Standardabweichung 0,02 gestört. Der Graph des für die Parameteridentifikation verwendeten gestörten Signals ist in Bild 2 dargestellt.

Zur Berechnung der in den Gleichungen auftretenden Integrale wurde auch hier die Trapezregel verwendet, wobei

die Abtastzeit $2 \cdot 10^{-3}$ betrug. Die Identifikation wurde für zwei verschiedene Konfigurationen durchgeführt, wobei zur Approximation der Anfangsbedingungen Polynome der Grade 1 und 5 verwendet wurden. In beiden Fällen wurde von $\tau_{\max} = 2$ als oberer Schranke für die zu identifizierende

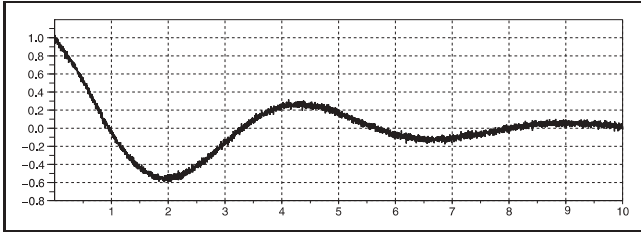


Bild 2: Simulierter Verlauf $t \mapsto y(t)$ für das System (11) mit Parametern $a = -1$, $\tau = 1$ und Anfangsbedingung $t \mapsto \cos 6t$ auf $[-2, -1]$.

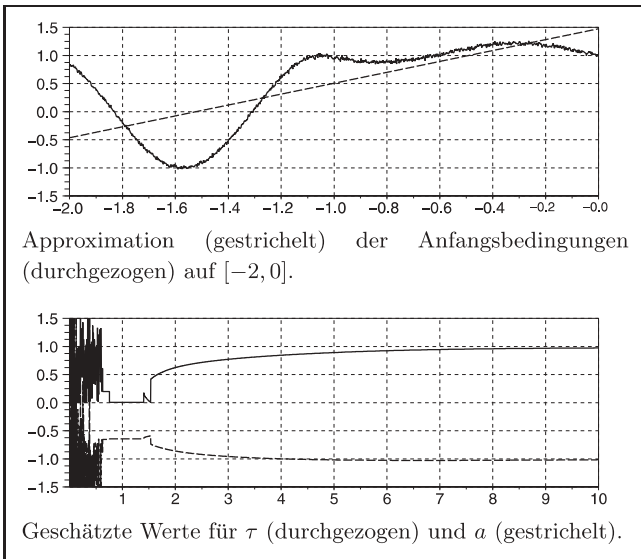


Bild 3: Parameterschätzung für das System (11). Approximation der Anfangsbedingungen durch ein Polynom ersten Grades.

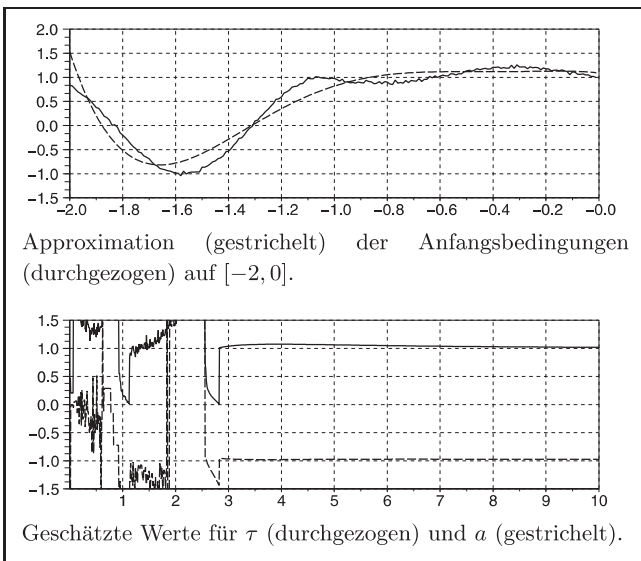


Bild 4: Parameterschätzung für das System (11). Approximation der Anfangsbedingungen durch ein Polynom fünften Grades.

Totzeitamplitude ausgegangen. Im oberen Teil von Bild 3 erkennt man, dass die Anfangsbedingungen durch eine affine Funktion nur mäßig gut approximiert werden können. Im unteren Teil desselben Bildes erkennt man, dass die Parameter dennoch recht genau bestimmt werden konnten, wengleich die genauere Approximation der Anfangsbedingungen durch ein Polynom vom Grad 5 (Bild 4 oben) bessere Ergebnisse liefert (Bild 4 unten).

4 Wärmeleiter

In den vorangegangenen Abschnitten konnte der Totzeitoperator mit Hilfe von Faltungsprodukten aus den Systemgleichungen eliminiert werden, wobei ausgenutzt wurde, dass er einer Differentialgleichung bezüglich des Differentialoperators s genügt. Ein ähnlicher Ansatz bildet die Grundlage für die Verallgemeinerung des Zugangs auf solche Operatoren, die bei der Darstellung der Lösung linearer partieller Differentialgleichungen auftreten können. Auch diese Operatoren sind Lösungen von Differentialgleichungen bezüglich s und können deshalb unter Verwendung von Faltungsprodukten aus den Systemgleichungen eliminiert werden. Auf diese Weise wird nachfolgend eine Methode zur Parameteridentifikation in partiellen Differentialgleichungen abgeleitet, wobei davon ausgegangen wird, dass lediglich Messungen der Trajektorien von Randgrößen zur Verfügung stehen. Als ein erstes Beispiel wird in diesem Abschnitt die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung betrachtet.

4.1 Modell

Die zeitliche Entwicklung des Temperaturprofils $z \mapsto w(z, t)$ in einem homogenen dünnen Stab der Länge 1, über dessen Mantel ein Wärmeaustausch mit der Umgebung stattfindet, wird durch die Gleichung

$$\partial_z^2 w(z, t) - \beta \partial_t w(z, t) - \alpha w(z, t) = 0 \quad (21)$$

beschrieben. Nimmt man an, dass der betrachtete Stab bei $z = 0$ ideal isoliert ist, so lautet die zugehörige Randbedingung

$$\partial_z w(z, t) = 0, \quad z = 0.$$

Die Randbedingung bei $z = 1$ soll hier nicht festgelegt werden, da sie für die Entwicklung der Methode nicht benötigt wird. Stattdessen wird lediglich davon ausgegangen, dass die Trajektorien $t \mapsto v_0(t) = w(0, t)$ und $t \mapsto v_1(t) = w(1, t)$ der Randwerte des Temperaturprofils bekannt sind und somit zur Bestimmung der unbekannt Parameter α und β verwendet werden können. Wie in Abschnitt 2 werden homogene Anfangsbedingungen vorausgesetzt.

4.2 Parameteridentifikation

Operatorenrechnung führt auf

$$\partial_z^2 \hat{w}(z) - s \beta \hat{w}(z) - \alpha \hat{w}(z) = 0, \quad (\partial_z \hat{w})(0) = 0. \quad (22)$$

Mit den gemäß

$$\hat{S}_1(z) = \cosh(z\sqrt{\alpha + \beta s}) \tag{23a}$$

$$\hat{S}_2(z) = \frac{\sinh(z\sqrt{\alpha + \beta s})}{\sqrt{\alpha + \beta s}} \tag{23b}$$

gegebenen Operatorfunktionen \hat{S}_1 und \hat{S}_2 kann die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differenzialgleichung in (22) in der Form

$$\hat{w}(z) = \hat{S}_1(z)\hat{w}(0) + \hat{S}_2(z)(\partial_z \hat{w})(0)$$

angegeben werden. Berücksichtigt man außerdem die Randbedingung bei $z = 0$, so werden die Größen \hat{v}_0 und \hat{v}_1 durch

$$\hat{v}_1 = \hat{S}_1(1)\hat{v}_0 \tag{24}$$

zueinander in Beziehung gesetzt.

Anhand von (23) lässt sich ohne weiteres erkennen, dass die Operatorfunktionen \hat{S}_1 und \hat{S}_2 den Differenzialgleichungen

$$\hat{S}'_1(z) = \frac{z\beta}{2}\hat{S}_2(z) \tag{25a}$$

$$\hat{S}'_2(z) = \frac{z\beta}{2(\alpha + \beta s)}\hat{S}_1(z) - \frac{\beta}{2(\alpha + \beta s)}\hat{S}_2(z) \tag{25b}$$

genügen. Das zweifache Anwenden von D_s auf (24) liefert deshalb

$$\hat{v}'_1 = \hat{v}'_0\hat{S}_1(1) + \hat{v}_0\frac{\beta}{2}\hat{S}_2(1) \tag{26a}$$

$$\hat{v}''_1 = \hat{v}''_0\hat{S}_1(1) + \hat{v}'_0\beta\hat{S}_2(1) + \hat{v}_0\frac{\beta^2}{4(\alpha + \beta s)}(\hat{S}_1(1) - \hat{S}_2(1)). \tag{26b}$$

Die Gleichungen (24) und (26a) können nach $\hat{v}_0\hat{S}_1(1)$ und $\hat{v}_0^2\hat{S}_2(1)$ aufgelöst,

$$\hat{v}_0\hat{S}_1(1) = \hat{v}_1 \tag{27a}$$

$$\hat{v}_0^2\hat{S}_2(1) = 2(\hat{v}'_1\hat{v}_0 - \hat{v}'_0\hat{v}_1) / \beta, \tag{27b}$$

und anschließend zur Elimination von $\hat{S}_1(1)$ und $\hat{S}_2(1)$ aus Gleichung (26b) verwendet werden:

$$\hat{v}''_0\hat{v}_0\hat{v}_1 + 2\hat{v}'_0(\hat{v}'_1\hat{v}_0 - \hat{v}'_0\hat{v}_1) + \hat{v}_0\frac{\beta^2\hat{v}_0\hat{v}_1 - 2\beta(\hat{v}'_1\hat{v}_0 - \hat{v}'_0\hat{v}_1)}{4(\alpha + \beta s)} = \hat{v}''_1\hat{v}_0^2. \tag{28}$$

Schließlich erhält man nach Multiplikation mit $\alpha + \beta s$ und Einführen von

$$\hat{y}_1 = 2\hat{v}_0(\hat{v}'_1\hat{v}_0 - \hat{v}'_0\hat{v}_1)$$

$$\hat{y}_2 = (\hat{v}''_1\hat{v}_0^2 - \hat{v}''_0\hat{v}_0\hat{v}_1 - 2\hat{v}'_0(\hat{v}'_1\hat{v}_0 - \hat{v}'_0\hat{v}_1))$$

$$\hat{y}_3 = \hat{v}_0^2\hat{v}_1$$

die Gleichung

$$\beta\hat{y}_3 - 4\frac{\alpha}{\beta}\hat{y}_2 = \hat{y}_1 + 4s\hat{y}_2. \tag{29}$$

Wie im Totzeitfall beschafft man sich die weiteren zur Berechnung der Parameter benötigten Gleichungen durch Integration bezüglich der Zeit, also durch Multiplikation mit s^{-1} und s^{-2} . Dies liefert ein lineares Gleichungssystem

zur Bestimmung von β und α/β :

$$\begin{pmatrix} s^{-1}\hat{y}_3 - 4s^{-1}\hat{y}_2 \\ s^{-2}\hat{y}_3 - 4s^{-2}\hat{y}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha/\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s^{-1}\hat{y}_1 + 4\hat{y}_2 \\ s^{-2}\hat{y}_1 + 4s^{-1}\hat{y}_2 \end{pmatrix}.$$

Bezüglich der punktweisen Multiplikation lautet dieses Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} y_{3,1}(t) - 4y_{2,1}(t) \\ y_{3,2}(t) - 4y_{2,2}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha/\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1,1}(t) + 4y_2(t) \\ y_{1,2}(t) + 4y_{2,1}(t) \end{pmatrix}$$

mit

$$y_{i,k}(t) = \int_0^t \frac{(t-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} y_i(\xi) d\xi, \quad k > 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

4.3 Simulationsergebnis

Bild 5 zeigt das Ergebnis einer Simulationsstudie für die beschriebene Methode. Die Werte der zu bestimmenden Parameter wurden zu $\alpha = 0,5$, $\beta = 1$ gewählt. Um die Empfindlichkeit der Methode zu überprüfen, wurden auch hier alle zur Identifikation verwendeten Signale durch ein additives Rauschen gestört. Bild 5 zeigt, dass die Methode für $t > 2$ brauchbare Schätzwerte für die Parameter α und β liefert.

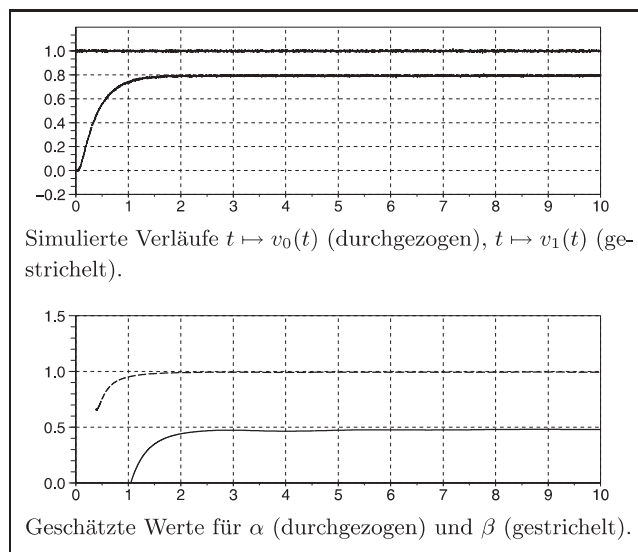


Bild 5: Parameterschätzung für die Wärmeleitungsgleichung mit $\alpha = 0,5$, $\beta = 1$.

5 Allgemeine partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung

Wie man anhand des vorangegangenen Abschnitts erkennt, basiert die vorgeschlagene Methode auf der Substitution von Operatoren mit Hilfe von Faltungsprodukten, wobei die Tatsache ausgenutzt wird, dass die verwendeten Operatoren Differenzialgleichungen bezüglich s genügen. Nachfolgend werden diese Differenzialgleichungen für allgemeine lineare pDgl. zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten angegeben. In Operatorform lautet eine solche Gleichung

$$\partial_z^2 \hat{w}(z) + 2(\alpha_1 s + \beta_1) \partial_z \hat{w}(z) - (\bar{\alpha}_2 s^2 + 2\bar{\beta}_2 s + \bar{\gamma}_2) \hat{w}(z) = 0. \tag{30}$$

Mit den neuen Parametern $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ gemäß

$$\bar{\alpha}_2 = (\alpha_1^2 - \alpha_2), \quad \bar{\beta}_2 = (\beta_1\alpha_1 - \beta_2), \quad \bar{\gamma}_2 = \beta_1^2 - \gamma_2$$

erhält man daraus

$$\begin{aligned} \partial_z^2 \hat{w}(z) + 2(\alpha_1 s + \beta_1) \partial_z \hat{w}(z) \\ + ((\alpha_1^2 - \alpha_2)s^2 + 2(\beta_1\alpha_1 - \beta_2)s + (\beta_1^2 - \gamma_2)) \hat{w}(z) = 0. \end{aligned} \quad (31)$$

Wie für die Wärmeleitungsgleichung kann die allgemeine Lösung der betrachteten gewöhnlichen Operator-Differentialgleichung in der Form

$$\hat{w}(z) = \hat{S}_1(z) \hat{w}(0) + \hat{S}_2(z) \partial_z \hat{w}(0) \quad (32)$$

geschrieben werden, wobei die Operatorfunktionen \hat{S}_1 und \hat{S}_2 formal² als Lösung der Differentialgleichung (31) mit den „Anfangsbedingungen“

$$\hat{S}_1(0) = 1, \quad (\partial_z \hat{S}_1)(0) = 0 \quad (33a)$$

$$\hat{S}_2(0) = 0, \quad (\partial_z \hat{S}_2)(0) = 1 \quad (33b)$$

definiert sind. Bei der Untersuchung von Randwertaufgaben wird anschließend die allgemeine Lösung (32) in die Randbedingungen eingesetzt. Das führt zunächst auf ein Gleichungssystem für die Randgrößen, in dessen Koeffizienten die Randwerte der Operatorfunktionen \hat{S}_1 und \hat{S}_2 auftreten. Analog zum Beispiel der Wärmeleitungsgleichung können diese Operatoren (\hat{S}_1 und \hat{S}_2) eliminiert werden, wobei die Differentialgleichungen bezüglich s , denen sie genügen, benötigt werden. Diese werden nachfolgend auf zwei verschiedenen Wegen hergeleitet.

5.1 Indirekte Methode

Der nachfolgend beschriebene Ansatz nutzt die explizite Darstellung von \hat{S}_1 und \hat{S}_2 unter Verwendung der Exponentialfunktion und der hyperbolischen Funktionen:

$$\hat{S}_1(z) = e^{-z(\alpha_1 s + \beta_1)} \left(\cosh(z\lambda) + (\alpha_1 s + \beta_1) \frac{\sinh(z\lambda)}{\lambda} \right) \quad (34a)$$

$$\hat{S}_2(z) = e^{-z(\alpha_1 s + \beta_1)} \frac{\sinh(z\lambda)}{\lambda}, \quad (34b)$$

mit $\lambda = (\alpha_2 s^2 + 2\beta_2 s + \gamma_2)^{\frac{1}{2}}$.

Differenziert man (34) bezüglich s , so folgen

$$\begin{aligned} D_s \hat{S}_1(z) = -\alpha_1 (z \hat{S}_1(z) + \hat{S}_2(z)) + (\alpha_2 s + \beta_2) \times \\ e^{-z(\alpha_1 s + \beta_1)} \left[(z - \lambda^{-2}(\alpha_1 s + \beta_1)) \frac{\sinh(z\lambda)}{\lambda} + \right. \\ \left. z(\alpha_1 s + \beta_1) \lambda^{-2} \cosh(z\lambda) \right] \end{aligned}$$

²Die Existenz einer solchen Lösung wird dabei stets vorausgesetzt. Bei den hier untersuchten Gleichungen mit konstanten Koeffizienten kann die Frage der Existenz der Lösung auf die Eigenschaften der Wurzeln der charakteristischen Gleichung der zu untersuchenden Operator-Differentialgleichung zurückgeführt werden: Die Lösung existiert, wenn diese Wurzeln logarithmisch im Sinne von [9; 10] sind.

$$\begin{aligned} D_s \hat{S}_2(z) = -\alpha_1 z \hat{S}_2(z) + e^{-z(\alpha_1 s + \beta_1)} \times \\ (\alpha_2 s + \beta_2) \lambda^{-2} \left(z \cosh(z\lambda) - \frac{\sinh(z\lambda)}{\lambda} \right). \end{aligned}$$

Die hierin auftretenden Produkte von hyperbolischen Funktionen und der Exponentialfunktion können unter Verwendung von (34) durch \hat{S}_1 und \hat{S}_2 ausgedrückt werden. Dies führt auf die gesuchten Differentialgleichungen bezüglich s für $\hat{S}_1(z)$ und $\hat{S}_2(z)$:

$$\begin{aligned} D_s \hat{S}_1(z) = -\alpha_1 (z \hat{S}_1(z) + \hat{S}_2(z)) + \\ (\alpha_2 s + \beta_2) \left[(z - \lambda^{-2}(\alpha_1 s + \beta_1)) \hat{S}_2(z) + \right. \\ \left. z(\alpha_1 s + \beta_1) \lambda^{-2} (\hat{S}_1(z) - (\alpha_1 s + \beta_1) \hat{S}_2(z)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_s \hat{S}_2(z) = -\alpha_1 z \hat{S}_2(z) + (\alpha_2 s + \beta_2) \times \\ \lambda^{-2} (z(\hat{S}_1(z) - (\alpha_1 s + \beta_1) \hat{S}_2(z)) - \hat{S}_2(z)). \end{aligned}$$

5.2 Direkte Methode

Bei Anwendung der in Abschnitt 5.1 skizzierten Methode zur Bestimmung einer gesuchten Differentialgleichung für die gemäß (31) und (33) definierten Operatorfunktionen werden die üblichen Ableitungsregeln für die hyperbolischen Funktionen und die Exponentialfunktion verwendet. In der Operatorenrechnung werden derartige Funktionen als Lösungen von Anfangswertproblemen bezüglich z definiert (vgl. Abschnitt 2.4). Weitere Eigenschaften, wie mögliche Reihen- und Integraldarstellungen, werden aus diesen Differentialgleichungen abgeleitet [9]. Dies wirft die Frage auf, ob auch die Differentialgleichungen bezüglich s , denen die Funktionen \hat{S}_1 und \hat{S}_2 genügen, direkt aus der definierenden Anfangswertaufgabe bezüglich z abgeleitet werden können, d. h. aus der Dgl. (31) und den Anfangsbedingungen (33). Dass dies in der Tat möglich ist, wird nachfolgend gezeigt.

Um die Notation abzukürzen, wird (31) in der Form³

$$\partial_z^2 \hat{w}(z) + L_1 \partial_z \hat{w}(z) + L_0 \hat{w}(z) = 0, \quad L_0, L_1 \in \mathbb{R}[s]$$

geschrieben. Unter Verwendung zweidimensionaler Operatorenrechnung (siehe Abschnitt 7.1), können die Operatorfunktionen $\hat{S}_1, \hat{S}_2 : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R})$ mit Operatoren $\hat{S}_1, \hat{S}_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ identifiziert werden. Der mehrfachen Ableitung bezüglich z , also $z \mapsto \partial_z^j \hat{S}_i(z)$, entspricht dann der Ausdruck

$$p^j \hat{S}_i - \sum_{l=0}^{j-1} p^{j-l-1} \left(\partial_z^l \hat{S}_i \right) (0).$$

Die Operatoren \hat{S}_1, \hat{S}_2 genügen deshalb den Gleichungen

$$L \hat{S}_1 = L_1 + p, \quad (35a)$$

$$L \hat{S}_2 = 1, \quad (35b)$$

³Mit den in (31) verwendeten Parametern gilt $L_1 = 2\alpha_1 s + \beta_1, L_0 = (\alpha_1^2 - \alpha_2)s^2 + 2(\beta_1\alpha_1 - \beta_2)s + (\beta_1^2 - \gamma_2)$.

mit $L = p^2 + L_1 p + L_0$. Es folgen

$$p\hat{S}_1'(s) = 1 - L_0\hat{S}_2', \tag{36a}$$

$$p\hat{S}_2'(s) = \hat{S}_1' - L_1\hat{S}_2'. \tag{36b}$$

Im nächsten Schritt wird die (algebraische) Ableitung $D_p = d/dp$ auf (35) angewandt, die der Multiplikation einer Operatorfunktion $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{M}(\mathbb{R})$ mit $-z$ entspricht (siehe Abschnitt 7.2). Zusammen mit (36) liefert dies

$$LD_p\hat{S}_1' = 1 - (2p + L_1)\hat{S}_1' = 2L_0\hat{S}_2' - L_1\hat{S}_1' - 1 \tag{37a}$$

$$LD_p\hat{S}_2' = (2p + L_1)\hat{S}_2' = -2\hat{S}_1' + L_1\hat{S}_2'. \tag{37b}$$

Analog erhält man durch Anwenden von D_s auf (35)

$$L\hat{S}_1' = L'_1 - (pL'_1 + L'_0)\hat{S}_1' = L'_1L_0\hat{S}_2' - L'_0\hat{S}_1' \tag{38a}$$

$$L\hat{S}_2' = -(pL'_1 + L'_0)\hat{S}_2' = (L'_1L_1 - L'_0)\hat{S}_2' - L'_1\hat{S}_1'. \tag{38b}$$

Die Gleichungen (35) und (37) werden nach $1, p, \hat{S}_1'$ und \hat{S}_2' aufgelöst:

$$1 = L\hat{S}_2'$$

$$p = L \left(\hat{S}_1' - \hat{S}_2'L_1 \right)$$

$$\hat{S}_1' = L \frac{L_1 \left(D_p\hat{S}_1' + \hat{S}_2' \right) - 2L_0D_p\hat{S}_2'}{4L_0 - L_1^2}$$

$$\hat{S}_2' = L \frac{2D_p\hat{S}_1' + 2\hat{S}_2' - L_1D_p\hat{S}_2'}{4L_0 - L_1^2}.$$

Diese Ausdrücke werden in (38) eingesetzt und die so entstehenden Gleichungen durch L dividiert:

$$(4L_0 - L_1^2)\hat{S}_1' = (2L'_1L_0 - L'_0L_1) \left(D_p\hat{S}_1' + \hat{S}_2' \right) + L_0(-L'_1L_1 + 2L'_0) D_p\hat{S}_2'$$

$$(4L_0 - L_1^2)\hat{S}_2' = (L'_1L_1 - 2L'_0) \left(D_p\hat{S}_1' + \hat{S}_2' \right) + (2L'_1L_0 - L_1^2L'_1 + L_1L'_0) D_p\hat{S}_2'.$$

Ersetzt man schließlich L_1 und L_0 , so ergibt sich

$$\lambda^2 \hat{S}_1' = ((\beta_1 + s\alpha_1)(\beta_2 + \alpha_2s) - \alpha_1\lambda^2) \left(D_p\hat{S}_1' + \hat{S}_2' \right) + (\beta_2 + \alpha_2s) (\lambda^2 - (\alpha_1s + \beta_1)^2) D_p\hat{S}_2'$$

$$\lambda^2 \hat{S}_2' = (\beta_2 + \alpha_2s)(D_p\hat{S}_1' + \hat{S}_2') - ((\beta_1 + \alpha_1s)(\beta_2 + \alpha_2s) + \alpha_1\lambda^2) D_p\hat{S}_2'.$$

Da die algebraische Ableitung bezüglich p der Multiplikation mit $-z$ entspricht, sind diesen Gleichungen über $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ die Gleichungen

$$\lambda^2 \hat{S}_1'(z) = ((\beta_1 + s\alpha_1)(\beta_2 + \alpha_2s) - \alpha_1\lambda^2) (\hat{S}_2'(z) - z\hat{S}_1'(z)) - z(\beta_2 + \alpha_2s) (\lambda^2 - (\alpha_1s + \beta_1)^2) \hat{S}_2'(z)$$

$$\lambda^2 \hat{S}_2'(z) = (\beta_2 + \alpha_2s)(\hat{S}_2'(z) - z\hat{S}_1'(z)) + z((\beta_1 + \alpha_1s)(\beta_2 + \alpha_2s) + \alpha_1\lambda^2) \hat{S}_2'(z)$$

für die Operatorfunktionen \hat{S}_1' und \hat{S}_2' zugeordnet. Diese entsprechen exakt den unter Verwendung der expliziten Repräsentation (34) erhaltenen Gleichungen. Im Gegensatz zum ersten Zugang, kann der zweite Ansatz ohne Schwierigkeiten auf Gleichungen höherer Ordnung

$$\partial_z^n \hat{w}(z) + \sum_{k=0}^{n-1} L_k \partial_z^k \hat{w}(z) = 0, \quad L_k \in \mathbb{R}[s]$$

verallgemeinert werden⁴.

6 Schlussfolgerung

Dieser Beitrag behandelt eine neue Methode zur Parameteridentifikation in linearen unendlichdimensionalen Systemen. Der Zugang wird sowohl für Totzeitsysteme, als auch für durch örtlich eindimensionale partielle Differentialgleichungen beschriebene Systeme entwickelt. Der Schwerpunkt des Beitrags liegt dabei auf der Herleitung von Gleichungssystemen, aus denen die gesuchten Parameter berechnet werden können. Die Verwendung von Operatorenrechnung vereinfacht die dazu nötigen Rechenschritte. Fragen der Identifizierbarkeit, insbesondere die Diskussion der Eindeutigkeit der Lösungen der erhaltenen Gleichungssysteme, werden hier nicht in den Vordergrund gestellt.

Im Rahmen des vorgestellten Zugangs wird auch auf Ergebnisse zurückgegriffen, die zuvor bereits für lineare endlichdimensionale Systeme entwickelt wurden. Im Vergleich zu diesen ergeben sich hier neue Probleme. Beispielsweise konnte schon für die einfachste der betrachteten Gleichungen keine Möglichkeit gefunden werden, die es gestattet, inhomogene Anfangsbedingungen exakt zu berücksichtigen: Anfangsbedingungen werden im Rahmen des hier vorgestellten Zugangs polynomial approximiert. Insbesondere bei der Verwendung dieses Näherungsansatzes wird eine weitere Schwierigkeit deutlich: Im Gegensatz zu endlichdimensionalen Systemen können die schließlich zu lösenden Gleichungen auch polynomiale Ausdrücke in den gesuchten Parametern enthalten, und zwar auch dann, wenn die zugrunde liegenden partiellen Differentialgleichungssysteme linear in diesen Parametern sind.

Der Umgang mit diesen Schwierigkeiten, aber auch die Frage unter welchen Bedingungen die zur Bestimmung der Parameter verwendeten Gleichungen eindeutige Lösungen besitzen, sollten Gegenstand zukünftiger Forschungsarbeiten sein.

7 Anhang zur Operatorenrechnung

7.1 Der Körper der Mikusiński-Operatoren

Die Menge der stetigen Funktionen $[0, +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ mit der punktweise definierten Addition

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

⁴Eine Erweiterung auf Gleichungen mit ortsabhängigen Koeffizienten, insbesondere auf solche mit polynomialen Koeffizienten, scheint ebenfalls möglich.

und dem Faltungsprodukt

$$\begin{aligned} (f \star g)(t) &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau = (g \star f)(t) \end{aligned}$$

bildet einen kommutativen Ring. Er wird mit \mathcal{C} bezeichnet. Nach einem Theorem von Titchmarsh [9; 18] ist dieser Ring \mathcal{C} nullteilerfrei:

$$f \star g = 0 \iff f = 0 \text{ oder } g = 0.$$

Der Quotientenkörper \mathcal{M} von \mathcal{C} heißt Mikusiński-Körper. Seine Elemente heißen (Mikusiński-)Operatoren.

Wird eine Funktion $f \in \mathcal{C}$ als Element von \mathcal{M} aufgefasst, so schreibt man dafür häufig $\{f(t)\}$. Alternativ wird auch die bei Verwendung der Laplace-Transformation übliche Schreibweise \hat{f} für $\{f(t)\}$ benutzt. Für das Produkt $a \star b$ zweier Operatoren aus \mathcal{M} wird auch einfach ab geschrieben.

Die Operatorenrechnung kann analog auch für Funktionen mehrerer reeller Veränderlicher eingeführt werden [2]. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne $\mathbb{R}_0^n \subset \mathbb{R}^n$ die Menge $\{x \in \mathbb{R}^n | x = (x_1, \dots, x_n), x_i \geq 0\}$. Mit $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ wird die Menge der auf \mathbb{R}^n stetigen Funktionen bezeichnet. Der Träger $\text{supp } f$ einer Funktion $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ ist das Komplement (bezüglich \mathbb{R}^n) derjenigen Menge, auf der f identisch Null ist. Die Menge $\{f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) | \text{supp } f \subset \mathbb{R}_0^n\}$ wird mit $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Die Addition wird, wie für Funktionen einer Veränderlichen, punktweise definiert:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Das Faltungsprodukt auf $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ ist gemäß

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &= (g \star f)(x) \\ &= \int_0^{x_1} \dots \int_0^{x_n} f(\xi)g(x-\xi)dx_n \dots dx_1 \end{aligned}$$

definiert. Ausgestattet mit diesen Operationen bildet auch $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ einen kommutativen, nullteilerfreien Ring [8]. Deshalb ist auch hier der Übergang in den Quotientenkörper möglich, dieser wird durch $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet. Der Integrationsoperator bezüglich x_i wird mit l_i bezeichnet, d. h. für $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, \dots, n$

$$l_i = \frac{\int_0^{x_i} f(x_1, \dots, x_{i-1}, \xi, x_{i+1}, \dots, x_n)d\xi_i}{f}.$$

Damit sind die Operatoren l_i eindeutig definiert, denn es gilt in $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$

$$(l_i f)g = (l_i g)f, \quad f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n).$$

Differenzialoperatoren s_i können nun als inverse Elemente zu l_i definiert werden

$$s_i = \frac{f}{l_i f}, \quad f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n).$$

In diesem Beitrag werden lediglich die Körper $\mathcal{M}(\mathbb{R}) = \mathcal{M}$ und $\mathcal{M}(\mathbb{R}^2)$ benötigt, auf eine Nummerierung der un-

abhängigen Variablen und der zugehörigen Differenzialoperatoren wird deshalb verzichtet. Der Differenzialoperator bezüglich der Zeit wird wie im skalaren Fall mit s , jener bezüglich des Ortes mit p bezeichnet.

7.2 Algebraische Ableitung

Sei $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$, dann bezeichnet $D_i f$, $i \in \{1, \dots, n\}$ die punktweise Multiplikation von f mit $-x_i$. Diese Operation ist linear und genügt bezüglich der Multiplikation in $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ der Produktregel

$$D_i(f \star g) = (D_i f) \star g + f \star (D_i g).$$

Auf dem Ring $\mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ kann mit D_i deshalb wie mit einer Ableitung gerechnet werden. Die Operationen D_i können mit der Quotientenregel in den Körper $\mathcal{M}(\mathbb{R}^n)$ fortgesetzt werden.

Seien außerdem $s_i, i = 1, \dots, n$ wie im vorangegangenen Abschnitt definiert. Dann gilt mit der Quotientenregel

$$D_i s_j = D_i \frac{f}{l_j f} = \frac{(D_i f) \star (l_j f) - (D_i l_j f) \star f}{(l_j f)^2}.$$

Es lässt sich zeigen, dass für $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ die Beziehung

$$(D_i f) \star (l_j f) - f \star (D_i l_j f) = \begin{cases} (l_j f)^2, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

gilt. Es folgt $D_i s_j = \delta_{i,j}$, mit dem Kroneckersymbol $\delta_{i,j}$. Die Operation D_i entspricht deshalb dem formalen Differenzieren bezüglich s_i und wird algebraische Ableitung bezüglich dieses Operators genannt.

In diesem Beitrag wird auf die Nummerierung der algebraischen Ableitungen verzichtet und stattdessen D_s (bzw. D_p) für die Ableitungen bezüglich s (bzw. p) geschrieben.

7.3 Anfangsbedingungen für Totzeitgleichungen

In diesem Abschnitt wird die der Gleichung (11) zugeordnete Operatorgleichung gemäß (12) unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen hergeleitet. Dazu wird (12) zunächst integriert. Verwendet man die Zerlegung $y(t) = h(t)y(t) + h(-t)y(t)$, wobei h die Heavisidefunktion bezeichnet, so folgt

$$y(t) - y(0) = a \int_0^t h(\xi - \tau)y(\xi - \tau) + h(\tau - \xi)y(\xi - \tau)d\xi.$$

Bettet man die Funktionen aus dieser Gleichung in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ ein, so folgt nach Multiplikation mit s

$$\begin{aligned} s\hat{y} - y(0) &= ae^{-s\tau}\hat{y} + as \left\{ \int_0^t h(\tau - \xi)y(\xi - \tau)d\xi \right\} \\ &= ae^{-s\tau}\hat{y} + as \left\{ \int_0^\tau h(t - \xi)y(\xi - \tau)d\xi \right\} \\ &= ae^{-s\tau}\hat{y} + as \left\{ \int_{-\tau}^0 h(t - (\xi + \tau))y(\xi)d\xi \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

Für jede Operatorfunktion $\xi \mapsto \hat{f}(\xi)$, die der Einbettung einer Funktion $\mathbb{R}^2 \ni (\xi, t) \mapsto f(\xi, t) \in \mathbb{C}$ in $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ entspricht, folgt aus der Definition des Integrals einer Operatorfunktion [10]

$$\left\{ \int_{\xi_0}^{\xi_1} f(\xi, t) d\xi \right\} = \int_{\xi_0}^{\xi_1} \{\hat{f}(\xi)\} d\xi.$$

Somit erhält man aus (39)

$$s\hat{y} - y(0) = ae^{-s\tau}\hat{y} + as \int_{-\tau}^0 \{h(t - (\xi + \tau))\} y(\xi) d\xi.$$

Mit der Repräsentation

$$e^{-s\zeta} = \frac{\{h(t - \zeta)\}}{\{h(t)\}} = s\{h(t - \zeta)\}$$

des Totzeitoperators folgt schließlich

$$s\hat{y} - y(0) = ae^{-s\tau}\hat{y} + a \int_{-\tau}^0 e^{-s(\tau+\xi)} y(\xi) d\xi.$$

Bis auf eine Umbenennung der Integrationsvariablen entspricht diese Gleichung der in (12) angegebenen.

Literatur

- [1] BELKOURA, L., J. P. RICHARD und M. FLIESS: *On-line identification of systems with delayed inputs*. In: *Proc. 17th Symp. Math. Theory Networks Syst. (MTNS)*, Kyoto, Japan, 2006.
- [2] BOEHME, T. K.: *The support of Mikusiński operators*. *Tran. Amer. Math. Soc.*, 176:319–334, 1973.
- [3] EMIRIS, I. Z., A. GALLIGO und H. LOMBARDI: *Numerical Univariate Polynomial GCD*. In: RENEGAR, J., M. SHUB und S. SMALE (Herausgeber): *The Mathematics of Numerical Analysis*, Seiten 323–343, 1996.
- [4] FLIESS, M., S. FUCHSHUMER, K. SCHLACHER und H. SIRA-RAMÍREZ: *Discrete-time linear parametric identification: An algebraic approach*. In: *2èmes Journées Identification et Modélisation Expérimentale – JIME'2006*, 2006.
- [5] FLIESS, M., M. MBOUP, H. MOUNIER und H. SIRA-RAMÍREZ: *Questioning some paradigms of signal processing via concrete examples*. In: SIRA-RAMÍREZ, H. und G. SILVA-NAVARRO (Herausgeber): *Algebraic Methods in Flatness, Signal Processing and State Estimation*, Seiten 1–10. *Innovación Editorial Lagares, México*, 2003.
- [6] FLIESS, M., H. MOUNIER, P. ROUCHON und J. RUDOLPH: *Systèmes linéaires sur les opérateurs de Mikusiński et commande d'une poutre flexible*. In: *ESAIM Proc.*, Band 2, Seiten 183–193, 1997. (<http://www.emath.fr/proc>).
- [7] FLIESS, M. und H. SIRA-RAMÍREZ: *An algebraic framework for linear identification*. *ESAIM: COCV (Control, Optimisation and Calculus of Variations)*, 9:151–168, 2003.
- [8] MIKUSIŃSKI, J.: *Convolution of functions of several variables*. *Stud. Math.*, 20:301–312, 1960.
- [9] MIKUSIŃSKI, J.: *Operational Calculus*, Band 1. Pergamon, Oxford & PWN, Warszawa, 1983.
- [10] MIKUSIŃSKI, J. und T. K. BOEHME: *Operational Calculus*, Band 2. Pergamon, Oxford & PWN, Warszawa, 1987.
- [11] RUDOLPH, J.: *Beiträge zur flachheitsbasierten Folgeregelung linearer und nichtlinearer Systeme endlicher und unendlicher Dimension*. *Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik*. Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [12] RUDOLPH, J.: *Flachheit: Eine nützliche Eigenschaft auch für Systeme mit Totzeiten*. *at – Automatisierungstechnik*, 53(4–5):178–188, 2005.
- [13] RUDOLPH, J., J. WINKLER und F. WOITTENNEK: *Flatness based control of distributed parameter systems: Examples and computer exercises from various technological domains*. *Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik*. Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [14] RUDOLPH, J. und F. WOITTENNEK: *Flachheitsbasierte Randsteuerung von elastischen Balken mit Piezoaktuatoren*. *at – Automatisierungstechnik*, 50:412–421, 2002.
- [15] RUDOLPH, J. und F. WOITTENNEK: *Trajektorienplanung für gewisse lineare Systeme mit verteilten Parametern*. *at – Automatisierungstechnik*, 54(5), 2006.
- [16] THULL, D., D. WILD und A. KUGI: *Infinit-dimensionale Regelung eines Brückenkranes mit schweren Ketten*. *at – Automatisierungstechnik*, 53(8):400–410, 2005.
- [17] WOITTENNEK, F.: *Beiträge zum Steuerungsentwurf für lineare, örtlich verteilte Systeme mit konzentrierten Stelleingriffen*. *Berichte aus der Steuerungs- und Regelungstechnik*. Shaker Verlag, Aachen, 2007.
- [18] YOSIDA, K.: *Operational Calculus: A Theory of Hyperfunctions*, Band 55 der Reihe *Applied mathematical sciences*. Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984.

Manuskripteingang: 20. Dezember 2006.



PD Dr.-Ing. habil. Joachim Rudolph ist am Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie (Prof. K. Reinschke) der TU Dresden tätig. Hauptarbeitsgebiete: Regler- und Beobachterentwurf für nichtlineare Regelstrecken, algebraische Methoden, lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme; Anwendungen in der Mechatronik und der Verfahrenstechnik.

Adresse: Technische Universität Dresden, Fakultät Elektrotechnik und Informationstechnik, Institut für Regelungs- und Steuerungstheorie, 01062 Dresden, E-Mail: Joachim.Rudolph@tu-dresden.de



Dr.-Ing. Frank Woittennek ist Postdoktorand am Laboratoire d'Informatique der École Polytechnique in Frankreich. Hauptarbeitsgebiete: lineare und nichtlineare unendlichdimensionale Systeme, nichtlineare Steuerung und Regelung mechanischer Systeme.

Adresse: École polytechnique, Laboratoire d'informatique, 91128 Palaiseau Cedex, France, E-Mail: woittennek@lix.polytechnique.fr