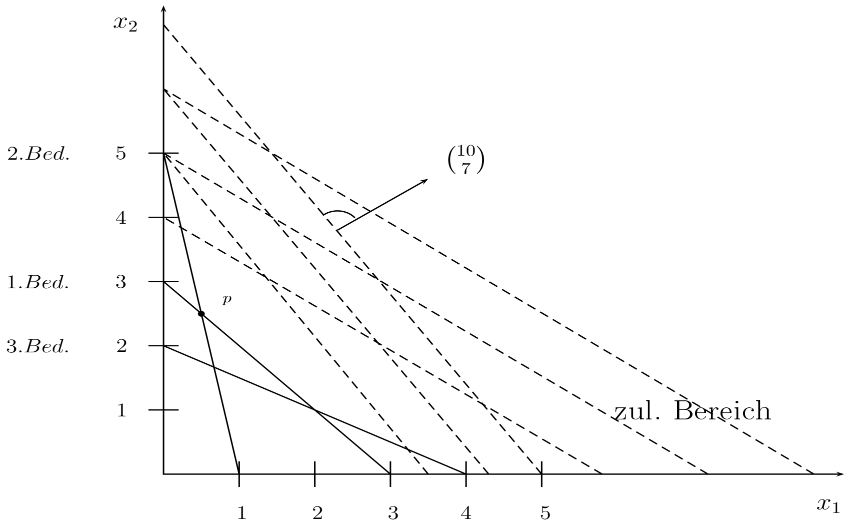
Lineare und Nichtlineare Optimierung

Skript: Dipl.-Math. Petra Schuster-Gentes

Univ.-Prof. Dr. Thomas Schuster



Universität des Saarlandes

2022

Inhaltsverzeichnis

Literatur

F.Jarre, J.Stoer: *Optimierung*, Springer, 2004

C.Geiger, C.Kanzow: *Theorie und Numerik restringierter Optimierungsaufgaben*, Springer, 2002

Ch.Großmann, J.Terno: *Numerik der Optimierung*, Teubner, 2. Auflage, 1997

P.Spellucci: *Numerische Verfahren der nichtlinearen Optimierung*, Birkhäuser, 1993

J.Nocedal, S.J.Wright: *Numerical Optimization*, 2nd Edition, Springer, 2006

M.Papageorgiou, M.Leibold, M.Buss: *Optimierung*, 3.Auflage, Springer, 2012

J.M.Borwein, A.S.Lewis: *Convex Analysis and Nonlinear Optimization*, 2nd Edition, Springer, 2010

R.T.Rockafellar: *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970

1

Anwendungen und Einteilung von Optimierungsaufgaben

Beispiele für Optimierungsaufgaben:

a) (Schulmathematik)

Finde das Rechteck mit maximalem Flächeninhalt, so dass der Umfang $U = 10m$ beträgt.
Also:

$$\max f(x,y) \;=\; x \cdot y$$

unter der Nebenbedingung

$$U(x,y) \;=\; 2x + 2y \;=\; 10\,.$$

b) (Analysis II) Lagrange – Multiplikator

Bestimme die lokalen Extrema der Funktion $f(x,y) = 4x^2 - 3xy$ auf dem Einheitskreis.
Das heißt:

$$\min(\max) f(x,y)$$

unter der Nebenbedingung

$$g(x,y) \;=\; x^2 + y^2 - 1 \;=\; 0\,.$$

Lösung: Für eine Lösung (x^*, y^*) gilt:

$$\nabla f(x^*, y^*) \;=\; \lambda \, \nabla g(x^*, y^*)$$

wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ ein Lagrange – Multiplikator ist.
Zu lösen ist also

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 8x^* - 3y^* & = & \lambda 2x^* \\ -\,3x^* & = & \lambda 2y^* \\ (x^*)^2 + (y^*)^2 - 1 & = & 0 \end{array} \right\}$$

Ergebnis: $\lambda = -\frac{1}{2}$ oder $\lambda = \frac{9}{2}$.

i) Zu $\lambda = -\frac{1}{2}$ ergeben sich die Lösungen

$$(x^*, y^*) \;=\; \left(\pm\frac{1}{\sqrt{10}} \,,\, \pm\frac{3}{\sqrt{10}} \right) .$$

ii) Zu $\lambda = \frac{9}{2}$ erhalten wir

$$(x^*, y^*) \;=\; \left(\mp \frac{3}{\sqrt{10}} \,,\, \pm \frac{1}{\sqrt{10}} \right) .$$

Im Falle $i)$ ist

$$f(x^*, y^*) \;=\; -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{lokales Minima auf dem Einheitskreis}$$

Im Falle $ii)$ ist

$$f(x^*, y^*) \;=\; \frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad \text{lokales Maxima auf dem Einheitskreis}$$

c) Angebotsauswertung

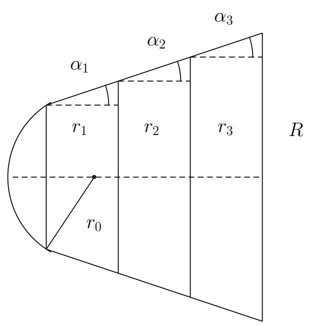
Ein Unternehmen will eine betsimmte Menge M eines Gutes einkaufen und holt Angebote von n Lieferfirmen ein, von denen keine die gewünschte Gesamtmenge liefern kann.
Annahme: Anbieter i liefert $\max_i$ Stück zum Preis $f_i(x_i)$ wobei x_i die bestellte Stückzahl ist.
Die zu Lösende Aufgabe ist demnach

$$\min f(x) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

$$\text{u.d.N.} \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i \;=\; M \quad , \quad 0 \le x_i \le \max_i \;\; , \;\; i = 1, ..., n$$

d) Design der Nase eines Flugzeugs

Zu entwerfen ist die Nase eines Flugzeuges mit dem Ziel, den Luftwiderstand bei einer vorgesehenen Reisegeschwindigkeit zu minimieren.



Die Flugzeugnase ist bei vorgegebenen Endradius R durch die Radien r_1, r_2, r_3, die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ und dem Kugelradius r_0 vollständig festgelegt.
Die Aufgabe läßt sich nun formulieren durch

$$\min LW(r_0, r_1, r_2, r_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

$$\begin{aligned} \text{u.d.N} \qquad & (i) \;\; \text{Volumen}(r_0, r_1, .., \alpha_3) \;\ge\; V_0 \\ & (ii) \;\; \text{Länge}(r_0, ..., \alpha_3) \;\le\; L_0 \\ & (iii) \;\; 0 \le r_i \le R \;\; , \; i = 0, 1, ..., 3 \\ & (iv) \;\; 0 \le \alpha_3 \le \alpha_2 \le \alpha_1 \le \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

e) Tikhonov – Phillips – Regularisierung

Sind X, Y Hilberträume und $A \in \mathrm{L}(X, Y)$ kompakt, so definiert

$$\inf_{x \in X} J_\gamma(x) \;=\; \inf_{x \in X} ||Af - g||_X^2 \;+\; \gamma^2\, ||f||_X^2 \tag{1.1}$$

eine Regularisierung der Operatorgleichung

$$Af \;=\; g\,.$$

Die Lösung f_γ von (1.1) löst auch

$$(A^* A \;+\; \gamma I)\, f_\gamma \;=\; A^* g$$

und es gilt

$$f_\gamma \;\to\; A^+ g \qquad , \quad g \in D(A^+)\;,\; \gamma \to 0\,.$$

Alle Probleme a) - e) lassen sich in der Form schreiben

$$\left\{ \begin{array}{ll} & \inf/\min f(x) \\ \text{u.d.N} & i)\;\; g_i(x) \le 0 \quad,\;\; i = 1, ..., p \\ & ii)\;\; h_j(x) = 0 \quad,\;\; j = p+1, ..., m \\ & iii)\;\; x \in \mathcal{B} \end{array} \right. \tag{1.2}$$

Dabei sind $f : X \to \mathbb{R}$, $g : X \to \mathbb{R}^p$, $h : X \to \mathbb{R}^{m-p}$ gegebene Funktionen und $\mathcal{B} \subset X$. X ist ein Vektorraum.

Wir nennen (1.2) ein nichtlineares (Optimierungs-) Problem (NLP). Die Menge $\{x \in X \,:\, x \text{ erfüllt } i) - iii)\}$ ist die Menge der zulässigen Vektoren.

Einteilung von Optimierungsproblemen:

1) Nichtrestringiertes Optimierungsproblem:
$p = m = 0\,,\, \mathcal{B} = X$.

2) Lineares Optimierungsproblem:
$f, g_1, ..., g_p, h_{p+1}, ..., h_m$ sind affin linear, $\mathcal{B} = R^n = X$.

3) Quadratisches Optimierungsproblem:
f ist quatratisch (z.B: $f(x) = \frac{1}{2}x^T Q x + c^T x + b\,, Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch, $c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}\,), \mathcal{B} = \mathbb{R}^n = X$, $g_1, ..., g_p, h_{p+1}, ..., h_m$ affin linear.

4) Konvexes Optimierungsproblem:
$f, g_1, ..., g_p$ sind konvexe Funktionen, $h_{p+1}, ..., h_m$ affin linear,
$\mathcal{B} = \mathbb{R}^n = X$.

5) Glatte, nichtlineare Optimierung:
$f, g_1, ...g_p, h_{p+1}, ..., h_m$ sind (zumindest einmal) differenzierbar,
$\mathcal{B} = \mathbb{R}^n = X$.

6) Diskrete Optimierung:
Lineare Optimierung mit $\mathcal{B} \subset \mathbb{Z}^n$ oder $\mathcal{B} \subset \{0, 1\}^n$.

Bemerkung:
a) Wegen

$$\inf\{f(x)\} = -\sup\{-f(x)\}$$

können wir uns auf Minimierungsprobleme beschränken.

b) Ist $\dim X = \infty$, so spricht man von semi-infiniten Problemen.
In dieser Vorlesung ist stehts $X = \mathbb{R}^n$.

2

Lineare Optimierung, 1. Teil: Das Simplexverfahren

2.1 Lineare Programme und geometrische Grundlagen

Die allgemeinste Form eines linearen Programmes (Optimierungsproblems) ist

$$(LP) \quad \left\{ \begin{array}{l} \min\, c^T x \\ \text{mit}\;\; x \in \mathbb{R}^n \;:\; \underline{b} \,\leq\, Ax \,\leq\, \overline{b} \\ \qquad\qquad\qquad\;\; l \,\leq\, x \,\leq u \end{array} \right.$$

für gegebene Vektoren $c \in \mathbb{R}^n$; $\underline{b}, \overline{b} \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^m$; $l, u \in (\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})^n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Anmerkung: Es sei $x \leq y \;\Leftrightarrow\; x_i \leq y_i\,,\; i = 1, ..., n$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Beispiel 2.1 *Das Diätproblem:*
Ein Bauer habe zwei Nährstoffe für die Zusammensetzung von Kuhfutter zur Auswahl:

1) Kraftfutter

2) Klee

	Kohlenhydrate	*Proteine*	*Vitamine*	*Kosten*
1 E Kraftfutter	*20 E*	*15 E*	*5 E*	*10 Euro*
1 E Klee	*20 E*	*3 E*	*10 E*	*7 Euro*
Bedarf/Tag	*60 E*	*15 E*	*20 E*	

Zu minimieren sind die Futterkosten. Das zugehörige lineare Programm sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{rl} \min & 10x_1 + 7x_2 \\ \text{u.d.N} & 20x_1 + 20x_2 \,\geq\, 60 \\ & 15x_1 + 3x_2 \,\geq 15 \\ & 5x_1 + 10x_2 \,\geq\, 20 \\ & x_1 \geq 0 \;\;,\;\; x_2 \geq 0\,, \end{array}$$

wobei x_1 die Menge an Kraftfutter und x_2 die Menge an Klee bedeutet.

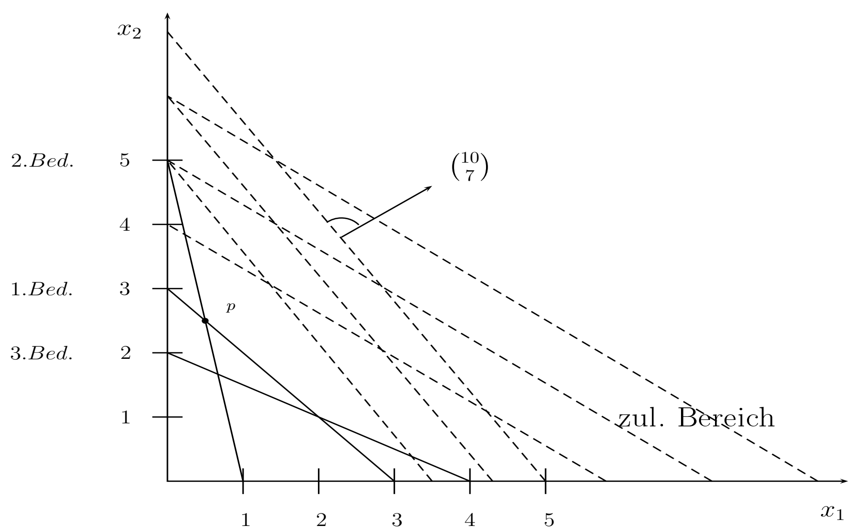
Es ist also zu lösen

$$\begin{aligned} & \min && c^T x \\ x \in \mathbb{R}^2 \ , & && Ax \geq \underline{b} \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 20 & 20 \\ 15 & 3 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \ , \ \underline{b} = (60, 15, 20)^T \ , \ c = (10, 7)$$

Graphische Lösung: Jede Nebenbedingung definiert eine Halbebene, der Schnitt der 3 Halbebenen mit dem 1. Quadranten ist der zulässige Bereich.



Wir verschieben die Geraden $c^T x = const.$ mit dem Normalenvektor c ohne den zulässigen Bereich zu verlassen in Richtung $-c$. Wir treffen so auf den Punkt $p = (0.5, 2.5)$, der das Minimierungsproblem löst.

Definition 2.2. *Eine Teilmenge $\mathbb{R}^n$ der Form $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax \leq b\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$ heißt* Polyeder. *Eine Menge der Gestalt*

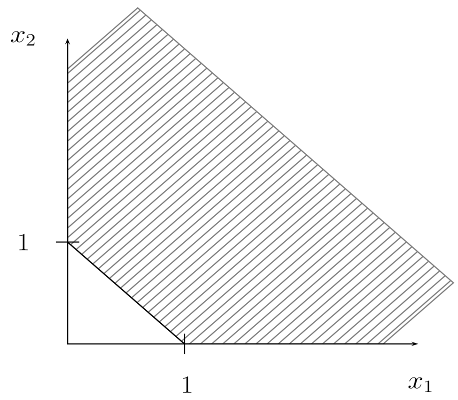
$$\mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ Ax = b \, , \, x \geq 0\}$$

nennen wir Polyeder in Normalform.

Beispiel 2.3 *Zum Beispiel ist mit* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ *und* $b = (0, 0, -1)^T$ *die Menge*

$$\begin{aligned} & \{ \ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \ : \ Ax \leq b \, \} \\ = & \{ \ (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 \ : \ -x_1 \leq 0 \, , \, -x_2 \leq 0 \, , \, -x_1 - x_2 \leq -1 \} \end{aligned}$$

ein Polyeder.



Der zulässige Bereich ist in (P) also ein Polyeder in Normalform.

Lemma 2.4. *Jedes lineare Programm der Form* (*LP*) *läßt sich in Normalform darstellen, also in der Form:*

$$(P)\quad \begin{cases} \qquad\quad \min c^T x \\ \text{u.d.N}: \quad Ax = b\ ,\ x \geq 0\,. \end{cases}$$

Beweis: In (LP) sind die Restriktionen in der Gestalt $\underline{b} \leq Ax \leq \overline{b}\ ,\ l \leq x \leq u$ gegeben.
Betrachte die j-te Komponente von $Ax \leq \overline{b}$ also:

$$a_j^T x \ \leq\ \overline{b}_j$$

Diese Restriktion läßt sich durch Einführen einer nichtnegativen *Schlupfvariablen* s_j umformulieren zu:

$$a_j^T x\ +\ s_j\ =\ \overline{b}_j \quad , \quad s_j \geq 0\,.$$

Ebenso ist eine Restriktion der Form

$$a_j^T x\ \geq\ \underline{b}_j$$

wegen

$$-a_j^T x\ \leq\ -\underline{b}_j$$

zu behandeln.
Alle Variablen x_i, die nicht vorzeichenbeschränkt sind (diese heißen *freie Variablen*) behandelt man folgendermaßen:
Es gilt:

$$x_i\ =\ x_i^+ - x_i^- \quad \text{mit} \quad x_i^+ \geq 0\,,\, x_i^- \leq 0\,.$$

Definiere dazu $x_i^+ = \max\{x_i, 0\}\,,\, x_i^- = -\min\{x_i, 0\}$.
Die Nebenbedingungen transformieren sich demnach zu

$$\tilde{A}\tilde{x}\ =\ \tilde{b} \quad , \quad \tilde{x} \geq 0\,.$$

Zu minimieren ist die Größe $\tilde{c}^T\tilde{x}$ mit einem entsprechenden Vektor $\tilde{c}$. □

Beispiel 2.5 *Die Nebenbedingungen eines linearen Programmes lauten*

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 0 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ x_1 \geq 0 \ , \ \ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Für die ersten beiden Ungleichungen führen wir Schlupfvariablen ein und die freie Variable x_3 splitten wir auf. Wir gelangen so zu der Darstellung in Normalform:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + s_1 &= 0 \\ -x_1 - x_2 - x_3^+ + x_3^- + s_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_3^+ - x_3^- &= 1 \\ x_1 \geq 0\,,\, x_2 \geq 0\,,\, x_3^+ \geq 0\,,\, x_3^- \geq 0\,,\ \ s_1 \geq 0\,,\, s_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

Beide Systeme sind äquivalent zueinander.

Nachteil: *Die Anzahl der Variablen wurde verdoppelt.*

Definition 2.6. *Sei $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\, x \geq 0\}$ ein Polyeder in Normalform, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Ein Vektor $x \in \mathcal{P}$ heißt Ecke (Extremalpunkt) von $\mathcal{P}$, wenn aus*

$$x \;=\; \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$$

für $x^1, x^2 \in \mathcal{P}$, $\lambda \in (0,1)$ bereits $x = x^1 = x^2$ folgt.
x läßt sich also nicht als echte Konvexkombination von Punkten aus $\mathcal{P}$ darstellen.

Beispiel 2.7 *a) Die Punkte $(0,1), (1,0)$ aus dem vorherigen Beispiel sind Extremalpunkte.*
b) Alle Randpunkte eines Kreises sind Extremalpunkte.

Charakterisierung der Ecken eines Polyeders ?

Satz 2.8 *Sei $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\, x \geq 0\}$ ein Polyeder in Normalform mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $x \in \mathcal{P}$ genau dann eine Ecke von $\mathcal{P}$, wenn die zu den positiven Komponenten von x zugehörigen Spalten von A linear unabhängig sind, wenn also die Spalten a_i von A mit $i \in \overline{I}(x) := \{i : x_i > 0\}$ linear unabhängig sind.*

Beweis: Sei $x \in \mathcal{P}$ eine Ecke.
Annahme: Die Spaltenvektoren $a_i, i \in \overline{I}(x)$, sind linear abhängig.
Dann gibt es $\gamma_i \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{i\in\overline{I}(x)} \gamma_i a_i \;=\; 0$$

und $\gamma_i \neq 0$ für mindestens einen Index $i \in \overline{I}(x)$. Wegen $x_i > 0$ für alle $i \in \overline{I}(x)$ existiert ein $\delta > 0$ mit $x_i \pm \delta\gamma_i \geq 0$ für alle $i \in \overline{I}(x)$.
Es sei nun

$$x_i^1 \;:=\; \begin{cases} x_i + \delta\gamma_i \ , & i \in \overline{I}(x) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

und

$$x_i^2 \;:=\; \begin{cases} x_i - \delta\gamma_i \ , & i \in \overline{I}(x) \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Es gilt $x^1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$ und

$$\begin{aligned} Ax^1 \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i^1 a_i \;&=\; \sum_{i \in \overline{I}(x)} (x_i + \delta\gamma_i) a_i \\ &=\; b + \delta \underbrace{\sum_{i \in \overline{I}(x)} \gamma_i a_i}_{=0} \;=\; 0 \end{aligned}$$

sowie $Ax^2 = b$.
Hieraus ersehen wir , dass $x^1, x^2 \in \mathcal{P}$ sind. Offenbar ist aber

$$x \;=\; \frac{1}{2}x^1 + \frac{1}{2}x^2$$

Wegen $x^1 \neq x^2$ kann dann x keine Ecke sein (Widerspruch !). Die Annahme war also falsch.
Es seien nun die Spaltenvektoren a_i, $i \in \overline{I}(x)$ linear unabhängig.
Weiter gelte

$$x \;=\; \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$$

für gewissse $x^1, x^2 \in \mathcal{P}$ und ein $\lambda \in (0,1)$.
Aus $x^1 \geq 0$, $x^2 \geq 0$ und $x_j = 0$, $j \notin \overline{I}(x)$ folgt wegen $\lambda \in (0,1)$ sofort

$$x_j^1 \;=\; x_j^2 \;=\; 0 \qquad , \quad j \notin \overline{I}(x) \;.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} 0 \;=\; b - b \;=\; Ax^1 - Ax^2 \;&=\; A(x^1 - x^2) \\ &=\; \sum_{i \in \overline{I}(x)} (x_i^1 - x_i^2) a_i \end{aligned}$$

und daher auch $x_i^1 = x_i^2$, $i \in \overline{I}(x)$, da die $a_i, i \in \overline{I}(x)$ linear unabhängig sind.
Folglich ist $x^1 = x^2$ und damit $x \in \mathcal{P}$ eine Ecke.

□

Beispiel 2.9 *Der Polyeder $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\, x \geq 0\}$ mit*

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

hat den Vektor $x = (1,2,0)^T$ als Ecke.

Definition 2.10. *Sei $\mathcal{P} := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = b,\, x \geq 0\}$ ein Polyeder in Normalform mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$. Ein zulässiger Punkt $x \in \mathcal{P}$ heißt* Basisvektor *von $\mathcal{P}$, wenn eine aus genau m Elementen bestehende Indexmenge I existiert mit $x_j = 0$ für alle $j \notin I$, so dass die Spaltenvektoren $a_i, i \in I$, linear unabhängig sind.*

Beispiel 2.11 *In dem vorangegangenen Beispiel ist $x = (1,2,0)^T$ auch Basisvektor und $I = \{1,2\}$.*

Achtung ! Unter Umständen ist $I \neq \overline{I}(x)$, da wir in Definition 2.10 nicht vorrausgesetzt haben, dass $x_i > 0$ für alle $i \in I$ gilt.

Annahme: O.B.d.A: $\quad \mathrm{Rang}(A) \;=\; m$

Satz 2.12 *Sei $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\, x \geq 0\}$ ein Polyeder in Normalform mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und Rang$(A) = m$. Dann ist x genau dann eine Ecke von $\mathcal{P}$, wenn x ein Basisvektor von $\mathcal{P}$ ist.*

Beweis: $'' \Leftarrow ''$ Ist x ein Basisvektor, so ist nach Satz 2.8 x auch eine Ecke von $\mathcal{P}$.
$'' \Rightarrow ''$ Sei $x \in \mathcal{P}$ eine Ecke und $\overline{I}(x) = \{i : x_i > 0\}$.
Aus Satz 2.8 folgt, dass die Spaltenvektoren $a_i, i \in \overline{I}(x)$ linear unabhängig sind.
Somit gilt $|\overline{I}(x)| \leq m$.
Ist $|\overline{I}(x)| = m$ so setzen wir $I := \overline{I}(x)$ und sind fertig.
Ist $|\overline{I}(x)| < m$, so können wir wegen Rang$(A) = m$ die Menge $\{a_i, i \in \overline{I}(x)\}$ zu einer m- elementigen Menge $\{a_i, i \in I\}$ mit $\overline{I}(x) \subset I$ ergänzen, die aus linear unabhängigen Vektoren a_i besteht. Somit ist x ein Basisvektor.

□

Das folgende Resultat zeigt die große Bedeutung der Basisvektoren.

Satz 2.13 (*Hauptsatz der linearen Optimierung*)
Sei $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b,\, x \geq 0\}$ ein Polyeder in Normalform mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und Rang$(A) = m$. Dann gelten:

a) Ist $\mathcal{P} \neq \emptyset$, so besitzt $\mathcal{P}$ mindestens einen Basisvektor.
b) $\mathcal{P}$ hat höchstenes endlich viele Basisvektoren.
c) Besitzt das lineare Programm

$$\min c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad x \in \mathcal{P} \tag{2.1}$$

eine Lösung, so ist auch einer der Basisvektoren von $\mathcal{P}$ Lösung von (2.1).

Beweis: a) Ist $0 \in \mathcal{P}$, so ist $x = 0$ ein Basisvektor.
Sonst: Sei $x^* \in \mathcal{P}$ ein Vektor mit einer minimalen Anzahl positiver Komponenten.
Es ist dann $\overline{I}(x^*) = \{i : x_i^* > 0\} \neq \emptyset$.
Behauptung: Die Menge $\{a_i, i \in \overline{I}(x^*)\}$ ist linear unabhängig.
Ansonsten gibt es γ_i, $i \in \overline{I}(x^*)$ mit

$$\sum_{i \in \overline{I}(x^*)} \gamma_i a_i \;=\; 0$$

und $\gamma_i \neq 0$ für ein $i \in \overline{I}(x^*)$.

$$\text{O.B.d.A:} \quad \gamma_i < 0 \quad \text{für ein} \quad i \in \overline{I}(x^*).$$

Dann existiert ein minimales $\overline{\delta} > 0$ mit $x_i(\overline{\delta}) = x_i^* + \overline{\delta}\gamma_i \geq 0$ für alle $i \in \overline{I}(x^*)$ und $x_i(\overline{\delta}) = 0$ für ein $i \in \overline{I}(x^*)$.
Der durch

$$\overline{x}_i \;=\; \begin{cases} x_i(\overline{\delta}), & i \in \overline{I}(x^*) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

festgelegte Vektor ist in $\mathcal{P}$ (Beweis wie in Satz 2.8), hat also weniger positive Komponenten wie x^* ($\Rightarrow$ Widerspruch !).
Also ist $\{a_i, i \in \overline{I}(x^*)\}$ linear unabhängig und damit $x^* \in \mathcal{P}$ eine Ecke (Satz 2.8) und nach Satz 2.12 ein Basisvektor.

b)Da es nur $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten m linear unabhänhige Spalten aus n Stück auszuwählen, kann $\mathcal{P}$ nur endlich viele Basisvektoren haben, die durch $Ax = b$ jeweils eindeutig betimmt sind.

c) Nach Vorraussetzung ist

$$f^* := \min\{c^T x \ : \ x \in \mathcal{P}\}$$

endlich. Betrachte nun das lineare Programm

$$\min c^T x \quad \text{u.d.N} \quad x \in \overline{\mathcal{P}}$$

mit

$$\overline{\mathcal{P}} = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\,, \ \ c^T x = f^*\,, \ \ x \geq 0\},.$$

$\overline{\mathcal{P}}$ ist ein Polyeder in Normalform und nach Vorraussetzung nichtleer. Nach Teil a) besitzt $\overline{\mathcal{P}}$ einen Basisvektor x^*, der nach Satz 2.12 eine Ecke ist.
Wir zeigen: x^* ist eine Ecke von $\mathcal{P}$.
Annahme: x^* ist keine Ecke von $\mathcal{P}$.
Dann gibt es $x^1, x^2 \in \mathcal{P}$, $x^1 \neq x^2$ mit

$$x^* = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$$

für ein $\lambda \in (0,1)$.
Wegen $x^1, x^2 \in \mathcal{P}$ ist

$$f^* \leq c^T x^1 \quad , \quad f^* \leq c^T x^2$$

Wegen $x^* \in \overline{\mathcal{P}}$ ist $f^* = c^T x^*$ und damit

$$f^* = c^T x^1 \quad , \quad f^* = c^T x^2$$

also $x^1, x^2 \in \overline{\mathcal{P}}$.
Da $x^* \in \overline{\mathcal{P}}$ eine Ecke ist folgt $x^1 = x^2$ ($\Rightarrow$ Widerspruch !) Also ist $x^* \in \mathcal{P}$ eine Ecke und damit Basisvektor von $\mathcal{P}$. Wegen $x^* \in \overline{\mathcal{P}}$ ist x^*auch Lösung von (2.1).

$\square$

Anmerkung: Satz 2.13 besagt, dass wir zur Lösung von (2.1) 'nur' alle Ecken des zulässigen Beriches $\mathcal{P}$ durchlaufen müssen.
($\rightarrow$ Simplex-Algorithmus)
Problem: Der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^n$,

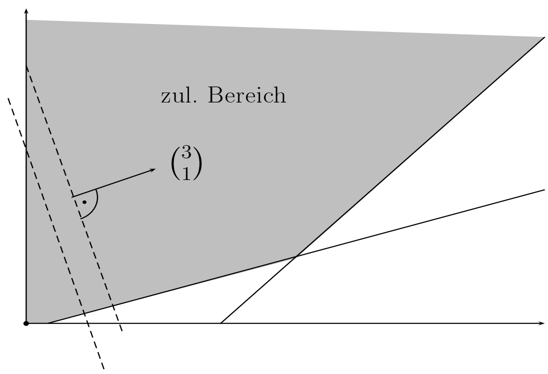
$$\{(x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 \leq x_i \leq 1\,,\, i = 1, ..., n\}$$

besitzt 2^n Ecken.

$\Rightarrow$ enorm zeitaufwändig

Beispiel 2.14 *Betrachte das lineare Programm*

$$\begin{cases} \qquad \min 3x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N} \quad x_1 - x_2 \leq 3\,,\, x_1 - 3x_2 \leq 1 \\ \qquad\quad x_1 \geq 0\,, \qquad x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{2.2}$$



optimale Lösung: $x^* = (0,0)$
In Normalform sieht das Problem so aus:

$$\begin{array}{ll} & \min 3x_1 + x_2 \\ \text{u.d.N} & x_1 - x_2 + s_1 = 3\ ,\ \ x_1 - 3x_2 + s_2 = 1 \\ & x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0 \end{array}$$

$\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{A}\tilde{x} = b\ ,\ \tilde{x} \geq 0\}$ *mit*

$$\tilde{A} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{x} = (x_1, x_2, s_1, s_2)^T \quad , \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also: $\min \tilde{c}^T\tilde{x}\ ,\ \tilde{c} = (3,1,0,0)$ u.d.N. $\tilde{x} \in \tilde{\mathcal{P}}$
Es gibt maximal $\binom{4}{2} = 6$ *Basisvektoren in* $\tilde{\mathcal{P}}$*, da* $Rang(\tilde{A}) = 2$.

Es muß gelten $|I| = Rang(\tilde{A}) = 2$

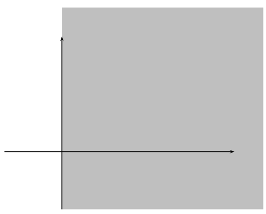
I	Basisvektor $\overline{x}$	$\tilde{c}^T x$
$\{1,2\}$	$\overline{x} = (4,1,0,0)^T$	13
$\{1,3\}$	$\overline{x} = (1,0,2,0)^T$	3
$\{1,4\}$	existiert nicht	/
$\{2,3\}$	existiert nicht	/
$\{2,4\}$	existiert nicht	/
$\{3,4\}$	$\overline{x} = (0,0,3,1)^T$	0

Nach Satz 2.13 ist $\overline{x} = (0,0,3,1)$ eine Lösung des Problems in Normalform. Dieser Lösung entspricht die Lösung $x = (0,0)$ des Ausgangsproblems.

ACHTUNG:
1) Der Polyeder $\tilde{\mathcal{P}}$ ist ungleich dem zulässigen Bereich des Ausgangsproblems.
2) Satz 2.13 ist *nicht* auf beliebiger Polyeder übertragbar. Der Polyeder

$$\{x \in \mathbb{R}^2\ :\ -x_1 \leq 0\}$$

z.B besitzt keine Ecke.



2.2 Der Simplex – Algorithmus

Sei ein lineares Programm in Normalform gegeben, d.h.

$$\min c^T x \qquad \text{u.d.N.} \qquad Ax = b \ , \ x \geq 0 \tag{2.3}$$

mit $c\,,\, x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und sei $\text{Rang}(A) = m$.

Idee: Nutze Satz 2.13 aus: Gehe von einem Basisvektor zum nächsten und zwar so, dass der Wert der Zielfunktion $c^T x$ beim Übergang abnimmt.

Sei $x \in \mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n\,,\, Ax = b\,,\, x \geq 0\}$ ein Basisvektor und I die zugehörende Indexmenge mit $|I| = m$, $x_j = 0$, $j \notin I$ und $\{a_i\,,\, i \in I\}$ linear unabhängig .

Sei $J := \{1, ..., n\} \setminus I$. Wir definieren die Basismatrix

$$B \ := \ (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

und die Nichtbasismatrix

$$N \ := \ (a_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^{m\times(n-m)}$$

I und J seien geordnet !

Weiter bezeichne für $z \in \mathbb{R}^n$

$$z_I \ := \ (z_i)_{i\in I} \in \mathbb{R}^m \ , \ z_J := (z_j)_{j\in J} \in \mathbb{R}^{n-m} \, .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} Az \ &= \ \sum_{i=1}^{n} z_i\, a_i \ = \ \sum_{i\in I} z_i\, a_i \ + \ \sum_{j\in J} z_j a_j \\ &= \ Bz_I \ + \ Nz_J \, . \end{aligned}$$

Für den Basisvektor $x \in \mathcal{P}$ gilt

$$Bx_I \ = \ b \quad , \quad x_J \ = \ 0\, . \tag{2.4}$$

Es sei nun $z \in \mathcal{P}$ ein beliebiger zulässiger Vektor (nicht unbedingt Basisvektor).

Ziel: Wähle z so, dass $c^T z < c^T x$.
Wegen $Az = b$ gilt

$$Bz_I \ + \ Nz_J \ = \ b$$

und somit:

$$z_I \ = \ B^{-1}b - B^{-1}Nz_J$$

Aus (2.4) und $(B^{-1})^T = (B^T)^{-1}$ folgt dann

$$\left\{ \begin{aligned} c^T z &= c_I^T z_I + c_J^T z_J \\ &= c_I^T (B^{-1}b - B^{-1}Nz_J) + c_J^T z_J \\ &= c_I^T x_I + (c_J^T - c_I^T B^{-1}N) z_J \\ &= c^T x + (c_J - N^T (B^T)^{-1} c_I)^T z_J \end{aligned} \right. \tag{2.5}$$

Definiere:

$$y \ := \ (B^T)^{-1} c_I \quad \in \mathbb{R}^m$$

Dann ist y (eindeutige) Lösung von

$$B^T y \;=\; c_I\,. \tag{2.6}$$

Definieren wir weiter:

$$u_j \;:=\; c_j - a_j^T y \;\;,\;\; j \in J\,, \tag{2.7}$$

so nimmt (2.5) die Gestalt

$$c^T z \;=\; c^T x \;+\; \sum_{j \in J} u_j z_j \tag{2.8}$$

an.

Lemma 2.15. (*Späteres Abbruchkriterium*)
Gilt für die durch (2.6), (2.7) *definierten Zahlen* u_j

$$u_j \geq 0 \quad \textit{für alle} \;\; j \in J\,, \tag{2.9}$$

so ist der Basisvektor x *eine Lösung des linearen Programmes* (2.3).

Beweis: Da (2.8) für alle $z \in \mathcal{P}$ gilt, folgt wegen $z_j \geq 0$ für alle $j \in J$ die Behauptung.

□

Gilt also (2.9), so sind wir fertig.

Sei nun (2.3) nicht erfüllt:
Es sei also

$$u_j < 0 \quad \text{für mindestens ein} \;\; j \in J \tag{2.10}$$

Wähle ein $r \in J$ mit $u_r < 0$ und definiere $z = z(t)$ durch

$$\begin{cases} z_r(t) := \; t > 0 \\ z_j(t) := \; 0 \;\;,\;\; j \in J \setminus \{r\} \\ z_i(t) \;\;,\; i \in I \;\; \text{wird noch festgelegt} \end{cases} \tag{2.11}$$

Aus (2.8) erhalten wir dann

$$c^T z(t) \;=\; c^T x + t u_r \;<\; c^T x\,. \tag{2.12}$$

Forderung: $z(t) \in \mathcal{P}$, also $z(t)$ muß zulässig sein.

$\Rightarrow$ Es muß gelten: $Az(t) = b \;\;,\; z(t) \geq 0$ also:

1) $Az(t) \;=\; Bz_I(t) + ta_r \;=\; b$

und somit

$$z_I(t) \;=\; B^{-1}(b - ta_r) \;=\; x_I - tB^{-1}a_r\,.$$

Wir legen also fest:

$$z_I(t) \;=\; x_I - td\,, \tag{2.13}$$

wobei $d \in \mathbb{R}^m$ das Gleichungssystem

$$Bd \;=\; a_r \tag{2.14}$$

löst.

Durch (2.11), (2.13) wird ein $z(t) \in \mathbb{R}^n$ mit $Az(t) = b$ konstruiert und $c^T z(t) \;<\; c^T x$.

2) Nun ist noch $z(t) \geq 0$ zu realisieren.

Lemma 2.16. *Gilt für den durch* (2.14) *definierten Vektor* d

$$d_i \le 0 \qquad \text{für alle } i \in I\,, \tag{2.15}$$

so ist das lineare Programm (2.3) *nicht lösbar.*

Beweis: Aus (2.11), (2.13) folgt $z(t) \ge 0$ für alle $t \ge 0$, da $z(t) \ge 0$ und wegen $x_I \ge 0$ auch $z_I(t) \ge 0$ gilt.
Folglich ist $z(t) \in \mathcal{P}$ für alle $t \ge 0$.
(2.12) besagt

$$c^T z(t) \;=\; c^T x + t u_r \qquad , \; t \ge 0$$

wobei $u_r < 0$ ist.
Also ist $\inf_{t\ge 0} c^T z(t) = -\infty$ und somit (2.3) nicht lösbar.

□

Sei nun (2.15) **nicht** erfüllt:
Es sei also

$$d_i \;>\; 0 \;\text{ für mindestens ein}\, i \in I\,.$$

Es gilt $z(t) \ge 0$ genau dann, wenn $t \ge 0$ und $x_i - t d_i \ge 0$ gilt für alle $i \in I$ mit $d_i > 0$.
Also:

$$0 \;\le\; t \;\le\; \frac{x_i}{d_i} \quad \text{für alle } \; i \in I \text{ mit } d_i > 0\,. \tag{2.16}$$

FAZIT : Durch (2.11), (2.13), (2.16) wird ein $z(t) \in \mathcal{P}$ festgelegt mit

$$c^T z(t) \;<\; c^T x\,.$$

Problem: $z(t)$ ist kein Basisvektor mehr, da $z(t)$ i.a. eine Nullkomponente weniger als x hat ($z_r(t) = t$).

Idee: Erzwinge das Auftreten einer neuen Nullkomponente durch die Festlegung

$$\hat{t} \;:=\; \min_{i\in I, d_i>0} \frac{x_i}{d_i} \;=\; \frac{x_s}{d_s} \quad \text{mit } \; s \in I,\, d_s > 0\,. \tag{2.17}$$

Es ist dann $\hat{t} \ge 0$ und

$$z_s(\hat{t}) \;=\; x_s - \hat{t} d_s \;=\; 0$$

Desweiteren ist $x^{neu} := z(\hat{t})$ ein Basisvektor.

Satz 2.17 *Sei* x *ein Basisvektor mit Indexmenge* I *und* $J = \{1, ..., n\} \setminus I$ *sowie* $B = (a_i)_{i\in I}$. *Für die aus* (2.6), (2.7) *berechneten Zahlen* u_j *sei*

$$u_j \;<\; 0 \qquad \textit{für mindestens ein } \; j \in J\,.$$

Für den zu einem r *mit* $u_r < 0$ *aus* (2.14) *berechneten Vektor* $d \in \mathbb{R}^n$ *sei*

$$d_i \;>\; 0 \qquad \textit{für mindestens ein } \; i \in I\,.$$

Werden $\hat{t} \ge 0$ *und ein* $s \in I$ *nach* (2.17) *bestimmt, so gilt für* $x^{neu} \in \mathbb{R}^n$ *mit*

$$x_i^{neu} \quad := \quad \begin{cases} x_i - \hat{t} d_i \;, & i \in I,\; i \ne s \\ \quad \hat{t} \;, & i = r \\ \quad 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

folgendes:

a) $x^{neu} \in \mathcal{P}$ *ist ein Basisvektor mit Indexmenge* $I^{neu} = (I \cup \{r\}) \setminus \{s\}$,

b) $c^T x^{neu} \;\le\; c^T x$,

Beweis: b) ist klar, ebenso wie $x^{neu} \in \mathcal{P}$ nach Konstruktion ($\hat{t} = 0$ möglich !)
Zu zeigen: x^{neu} ist ein Basisvektor.
Es ist

$$x_i^{neu} = 0 \qquad \text{für alle } \ i \notin I^{neu}$$

klar nach Definition.
Es bleibt zu zeigen: a_i, $i \in I^{neu}$ linear unabhängig.
Sei

$$\sum_{i \in I^{neu}} \gamma_i a_i = \sum_{i \in I, i \neq s} \gamma_i a_i + \gamma_r a_r = 0 \qquad \text{mit } \ \gamma_i \in \mathbb{R}\,.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i \in I, i \neq s} \gamma_i a_i + \gamma_r a_r \\ &= \sum_{i \in I, i \neq s} \gamma_i a_i + \gamma_r \, Bd \\ &= \sum_{i \in I, i \neq s} \gamma_i a_i + \gamma_r \left(\sum_{i \in I} d_i a_i \right) \\ &= \sum_{i \in I, i \neq s} (\gamma_i + \gamma_r d_i) a_i + \gamma_r d_s a_s \,. \end{aligned}$$

Da x ein Basisvektor mit Indexmenge I ist, gilt

$$\gamma_i + \gamma_r d_i = 0 \quad \text{für alle } \ i \in I, \ i \neq s \ \text{ und } \ \gamma_r d_s = 0\,.$$

Wegen $d_s > 0$ gilt $\gamma_r = 0$ und somit

$$\gamma_i = 0 \qquad \text{für alle } \ i \in I, \ i \neq s\,,$$

also

$$\gamma_i = 0 \qquad \text{für alle } \ i \in I^{neu}\,,$$

das heißt $(a_i)_{i \in I^{neu}}$ sind linear unabhängig.

□

Bemerkung: In (2.17) kann passieren, dass $\hat{t} = 0$ ist, falls $x_i = 0$ für ein $i \in I$ gilt. In diesem Fall wäre $c^T x^{neu} = c^T x$. Ein Basisvektor $x \in \mathcal{P}$ mit $x_i = 0$ für ein $i \in I$ heißt *entartet*.

Korollar 2.18 *Ist x ein nichtentarteter Basisvektor, so gilt sogar*

$$c^T x^{neu} < c^T x\,.$$

Beispiel 2.19 *Seien*

$$A = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 0\,3\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,0\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad c = (-2, -3, -4, 0, 0, 0, 0)^T\,.$$

Der Vektor $x = (2, 0, 0, 2, 6, 0, 3)^T$ ist ein Basisvektor mit Indexmenge

$$I = \{1, 4, 5, 7\}\ , \ \textit{also} \ \ J = \{2, 3, 6\}\,,$$

und somit

$$B \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad c^T x \;=\; -4\,,$$

$$x_I \;=\; (2,2,6,3) \quad , \quad c_I \;=\; (-2,0,0,0)^T\,.$$

Die Lösung von $B^T y = c_I$ *lautet* $y = (0,0,-2,0)^T$*, woraus sich* $u_2 = c_2 - a_2^T y = -3\,,\ u_3 = -4\,,\ u_6 = 2$ *ergibt.*
Wähle $r = 3 \quad (u_3 < 0)\,.$
Die Lösung von $Bd = a_3$ *ist* $d = (0,1,1,1)^T\,.$
Weiter ist

$$\begin{aligned} \min_{i\in I, d_i>0} \frac{x_i}{d_i} \;&=\; \min\left\{\frac{x_4}{d_4}, \frac{x_5}{d_5}, \frac{x_7}{d_7}\right\} \\ &=\; \min\{2,6,3\} \;=\; 2 \;=:\; \hat{t} \end{aligned}$$

und somit $s = 4\,.$
Damit wird

$$I^{neu} \;=\; \{1, \underline{3}, 5, 7\} \quad , \quad x^{neu} \;=\; (2,0,2,0,4,0,1)^T$$

und

$$c^T x^{neu} \;=\; -12 \;<\; -4 \;=\; c^T x\,.$$

ALGORITHMUS: (Simplex-Verfahren)

(S.0) Wähle einen Basisvektor x^0 von $\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n :\; Ax = b\,,\; x \geq 0\}$ mit Indexmenge I_0, $|I_0| = m$, setze $J_0 = \{1, ..., n\} \setminus I_0$.
Definiere

$$B_0 \;=\; (a_i)_{i\in I_0}$$

und $k := 0$.

(S.1) Berechne die Lösung $y^k \in \mathbb{R}^m$ von

$$B_k^T y \;=\; c_{I_k}\,.$$

(S.2) Berechne

$$u_j^k \;:=\; c_j - a_j^T y^k \qquad , \quad j \in J_k\,.$$

(S.3) Ist $u_j^k \geq 0$ für alle $j \in J_k \quad \Longrightarrow \quad$ STOP (Lemma 2.15)

(S.4) Wähle $r_k \in J_k$ mit $u_{r_k}^k < 0\,.$

(S.5) Berechne die Lösung $d^k \in \mathbb{R}^m$ von

$$B_k d^k \;=\; a_{r_k}\,.$$

(S.6) Ist $d_i^k \leq 0$ für alle $i \in I_k \quad \Longrightarrow \quad$ STOP (Lemma 2.16)

(S.7) Bestimme $t_k \geq 0$ und $s_k \in I_k$ mit $d_{s_k}^k > 0$ aus

$$t_k \;:=\; \min_{i\in I_k, d_i^k>0} \frac{x_i^k}{d_i^k} \;=\; \frac{x_{s_k}^k}{d_{s_k}^k}$$

und setze

$$
\begin{aligned}
x_i^{k+1} &= \begin{cases} x_i^k - t_k d_i^k & , \; i \in I_k \;,\; i \neq s_k \\ t_k & , \; i = r_k \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \\
I_{k+1} &:= (I_k \cup \{r_k\}) \setminus \{s_k\} \\
J_{k+1} &:= \{1, ..., n\} \setminus I_{k+1} \\
B_{k+1} &:= (a_i)_{i \in I_{k+1}}
\end{aligned}
$$

Setze $k \leftarrow k+1$ und gehe zu (S.1).

Satz 2.20 *a) Die vom Simplex-Verfahren erzeugten Vektoren x^k sind Basisvektoren von $\mathcal{P}$ und es gilt*

$$c^T x^{k+1} \leq c^T x^k \qquad , \quad k = 0, 1, 2, ...$$

b) Bricht das Verfahren in (S.3) ab, so ist x^k eine Lösung von (2.3).
c) Bricht das Verfahren in (S.6) ab, so ist (2.3) *nicht lösbar.*
d) Sind alle im Simplex-Verfahren auftretenden Basisvektoren x^k nicht entartet, so bricht das Verfahren nach endlich vielen Iterationen ab und zwar mit einer der Entscheidungen in b) oder c).

Beweis: Es bleibt nur d) zu zeigen.
Nach Korollar 2.18 ist

$$c^T x^{k+1} < c^T x^k \qquad , \quad k = 0, 1, ...$$

Ein Basisvektor x^k taucht folglich nicht zweimal auf. Nach Satz 2.13 gibt es jedoch nur endlich viele Basisvektoren. Also muß das Verfahren abbrechen.

□

Bemerkung: a) Bei der Durchführung des Simplex-Algorithmus können sogenannte Zyklen auftauchen, d.h. der Fall

$$x^k = x^{k+1} = ... = x^{k+p} \quad , \quad p \geq 2$$

und

$$I_k \to I_{k+1} \to ... \to I_{k+p} = I_k \,.$$

In diesem Fall bricht das Verfahren nicht ab. Durch folgende Zusatzforderungen können Zyklen vermieden werden:
(S.4') Wähle r_k als den kleinsten Index $j \in J_k$ mit $u_j^k < 0$.
(S.7') Bestimme $t_k \geq 0$ und s_k als den kleinsten Index $s_k \in I_k$ mit $d_i^k > 0$ aus

$$t_k = \min_{i \in I_k, d_i^k > 0} \frac{x_i^k}{d_i^k} = \frac{x_{s_k}^k}{d_{s_k}^k}$$

(Zusatzregel von Bland)

b) Die Komplexität des Simplex-Verfahrens ist schlimmstenfalls exponentiell in n (Beispiel von Klee und Minty).
Viele Beispiele haben jedoch gezeigt, dass die Anzahl der Simplex-Schritte eher polynomial mit n und m wächst.

c) Ein Start-Basisvektor x^0 zu finden ist nicht trivial. Oft wird in einem ersten Schritt (Phase I) das Simplex-Verfahren auf ein Hilfsproblem angewendet, um x^0 zu bekommen.

Satz 2.21 *In* (2.3) *sei* $b \geq 0$. *Dann gilt für das lineare Programm*

$$\min e^T z \quad \text{u.d.N.} \quad Ax + z = b\,, \quad x, z \geq 0 \tag{2.18}$$

mit $e = (1, 1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^m$ *folgendes:*

a) Der Vektor $\binom{x}{z} = \binom{0}{b}$ *ist ein Basisvektor für* (2.18) *mit* $I = \{n+1, n+2, ..., n+m\}$.

b) Sei $\binom{x^*}{z^*} \in \mathbb{R}^{n+m}$ *ein optimaler Basisvektor für* (2.18). *Ist* $z^* \neq 0$, *so besitzt* (2.3) *keinen zulässigen Punkt. Ist* $z^* = 0$ *und Rang*$(A) = m$, *so ist* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *ein Basisvektor für* (2.3).

Beweis: als Übung

Anmerkung: Man kann beweisen, dass das lineare Programm (2.18) stets lösbar ist.

3

Optimalität und Dualität

3.1 Optimalitätsbedingungen

Definition 3.1. *Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist ein* Kegel (cone)*, falls $\lambda x \in X$ gilt für alle $x \in X$ und $\lambda > 0$.*
Sind $a_1, ..., a_m \in \mathbb{R}^n$, so ist

$$\mathrm{cone}\,\{a_1, ..., a_m\} \;:=\; \{x_1 a_1 + ... + x_m a_m\;,\; x_i \geq 0\;,\; i = 1, ..., m\}$$

der durch $a_1, ..., a_m$ erzeugte (konvexe) Kegel.

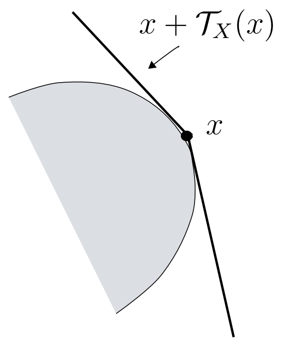
Definition 3.2. *Sei $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$. Eine Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ heißt* tangential *zu X im Punkt $x \in X$, wenn Folgen $\{x^k\} \subseteq X$ und $\{t_k\} \subseteq \mathbb{R}$ existieren mit*

$$x^k \;\longrightarrow\; x \quad , \quad t_k \searrow 0 \quad \text{und} \quad \frac{x^k - x}{t_k} \;\longrightarrow\; d \quad \text{für} \quad k \to \infty, . \tag{3.1}$$

Die Menge all dieser Richtungen

$$\mathcal{T}_X(x) \;=\; \{d \in \mathbb{R}^N \;:\; \exists\; \{x^k\} \subseteq X\;,\; \{t_k\} \subseteq \mathbb{R}\;\; \text{mit}\,(3.1)\;\}$$

heißt Tangentialkegel *von X in $x \in X$.*



Lemma 3.3. *Seien $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x \in X$. Dann ist $\mathcal{T}_X(x)$ ein abgeschlossener Kegel.*

Beweis: als Übung.

Lemma 3.4. *Seien* $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar und* x^* *ein lokales Minimum des Optimierungsproblems*

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X\,. \tag{3.2}$$

Dann gilt $\quad \nabla f(x^*)^T d \ \geq\ 0 \quad$ *für alle* $d \in \mathcal{T}_X(x^*)$.

Beweis: Sei $d \in \mathcal{T}_X(x^*)$ beliebig und $\{x^k\} \subseteq X$, $\{t_k\} \subseteq \mathbb{R}$ Folgen, die (3.1) erfüllen. Da $f \in \mathcal{C}'(\mathbb{R}^n)$ gilt mit dem MWS:

$$f(x^k) - f(x^*) \ =\ \nabla f(\xi^k)^T(x^k - x^*)$$

für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei ξ^k auf der Verbindungsstrecke von x^k und x^* liegt.
Also gilt:

$$\xi^k \to x^* \qquad \text{für} \ \ k \to \infty\,.$$

Da x^* ein lokales Minimum von (3.2) ist, gilt außerdem

$$f(x^k) - f(x^*) \ \geq\ 0 \qquad , \ \ k \geq k_0$$

und somit

$$\nabla f(\xi^k)^T(x^k - x^*) \ \geq\ 0$$

für k hinreichend groß.
Somit gilt

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\nabla f(\xi^k)^T(x^k - x^*)}{t_k} \ =\ \nabla f(x^*)^T d \quad \geq\ 0\,.$$

□

Ein Vektor $x^* \in X$ mit

$$\nabla f(x^*)^T d \geq 0 \qquad \text{für alle} \qquad d \in \mathcal{T}_X(x^*) \tag{3.3}$$

heißt *stationärer Punkt* von (3.2).

Im Falle $X = \mathbb{R}^n$ ist (3.3) äquivalent zu $\nabla f(x^*) = 0$.

Das Problem (3.2) habe von nun an die Gestalt

$$\begin{cases} & \min f(x) \\ \text{u.d.N.} & g_i(x) \ \leq\ 0 \ \ , \quad i = 1, ..., m \\ & h_j(x) = 0 \ \ , \quad j = 1, ..., p\,. \end{cases} \tag{3.4}$$

Generell gelte $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, g_i , $h_j \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., p$.
Es ist also

$$X \ =\ \{x \in \mathbb{R}^n \ :\ g_i(x) \leq 0\ ,\ i = 1, ..., m\ ,\ h_j(x) = 0\ ,\ j = 1, ..., p\}$$

Problem: Die Bedingung (3.3) ist schwer zu handhaben, denn $\mathcal{T}_X(x)$ kann eine komplizierte Struktur haben.

Definition 3.5. *Sei* $x \in X$ *ein zulässiger Punkt von* (3.4). *Dann heißt*

$$\mathcal{T}_{lin}(x) \ :=\ \{d \in \mathbb{R}^n \ :\ \nabla g_i(x)^T d \leq 0\ ,\ i \in I(x)\ ,\ \nabla h_j(x)^T d = 0\ ,\ j = 1, ..., p\}$$

lineartisierter Tangentialkegel von X *in* x*, wobei*

$$I(x) \ :=\ \{i \in \{1, ..., m\} \ :\ g_i(x) = 0\}$$

die Menge der aktiven Ungleichungsrestriktionen *in* x *ist.*

Lemma 3.6. *Sei $x \in X$ ein zulässiger Punkt von* (3.4)*. Dann gilt*

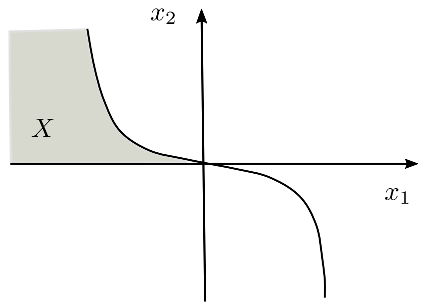
$$\mathcal{T}_X(x) \subseteq \mathcal{T}_{lin}(x)\,.$$

Beweis: als Übung mit Hinweis:
Zeige: $\nabla g_i(x^k)^T d \leq 0$, $i \in I(x)$ und verwende Lemma 3.4.

□

Beispiel 3.7

$$\min -x_1 \qquad \text{u.d.N.} \qquad \begin{aligned} x_2 + x_1^3 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$



$x^* = (0,0)^T$ ist das eindeutige Minimum.
Mit $g_1(x) = x_2 + x_1^3$, $g_2(x) = -x_2$ ist $I(x^*) = \{1,2\}$, $\nabla g_1(x) = (3x_1^2, 1)$, $\nabla g_2(x) = (0,-1)$
Daher ist

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{lin}(x^*) &= \{d \in \mathbb{R}^2 \,:\, \nabla g_1(x^*)^T d \leq 0\,,\, \nabla g_2(x^*)^T d \leq 0\} \\ &= \{(d_1, d_2)^T \in \mathbb{R}^2\,,\, d_2 = 0\} \end{aligned}$$

Aber:

$$\mathcal{T}_X(x^*) = \{(d_1, 0) \,:\, d_1 \in \mathbb{R}\,,\, d_1 \leq 0\}\,,$$

also

$$\mathcal{T}_X(x^*) \subsetneq \mathcal{T}_{lin}(x^*)\,.$$

Definition 3.8. *Ein zulässiger Punkt $x \in X$ von* (3.4) *erfüllt die* Regularitätsbedingung von Abadie (*Abadie Constraint Qualification ACQ*)*, falls $\mathcal{T}_X(x) = \mathcal{T}_{lin}(x)$ gilt.*

Definition 3.9. *a) Die durch*

$$L(x, \lambda, \mu) := f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x) \tag{3.5}$$

definierte Abbildung

$$L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$$

heißt Lagrange-Funktion *des Problems* (3.4)*.*

b) Die Bedingungen

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla_x L(x,\lambda,\mu) &= 0 \\ h(x) &= 0 \\ \lambda \geq 0\,,\ g(x) \leq 0\,,\ \lambda^T g(x) &= 0 \end{aligned} \right. \tag{3.6}$$

heißen Karusch - Kuhn - Tucker - (KKT-) Bedingungen *des Problems* (3.4) *mit*

$$\nabla_x L(x,\lambda,\mu) \;=\; \nabla f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(x)\,. \tag{3.7}$$

c) Genügt der Vektor $(x^*,\lambda^*,\mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ *den KKT - Bedingungen, so nennen wir* (x^*,λ^*,μ^*) *einen* KKT-Punkt. *Ist zusätzlich*

$$\lambda_i^* + g_i(x^*) \neq 0 \qquad \forall\, i = 1,...,m$$

so genügt der KKT - Punkt (x^*,λ^*,μ^*) *der* strikten Komplementarität.

Bemerkung: a) Zu c): Wegen (3.6) gilt für einen KKT-Punkt (x^*,λ^*,μ^*) stets $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ für alle $i = 1,...,m$, also $\lambda_i^* = 0$ oder $g_i(x^*) = 0\,,\ i = 1,...,m$.
b) Ist $m = p = 0$, so lauten die KKT-Bedingungen ganz einfach:

$$\nabla f(x^*) = 0\,.$$

c) Aus (3.7) ist zu ersehen, dass im Falle $p = 0$ für einen KKT-Punkt gilt

$$-\nabla f(x^*) \;\in\; \operatorname{cone}\{\, \nabla g_i(x^*) \;:\; i \in I(x^*)\}\,,$$

wobei $I(x^*) = \{i : g_i(x^*) = 0\}$ ist. Für $i \notin I(x^*)$ gilt $\lambda_i^* = 0$.

Lemma 3.10. (*Lemma von Farkas*)
Seien $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ *gegeben. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

a) Das System $A^T x = b\,,\ x \geq 0$ *besitzt eine Lösung.*

b) Die Ungleichung $b^T d \geq 0$ *gilt für alle* $d \in \mathbb{R}^n$ *mit* $Ad \geq 0$.

Satz 3.11 (*KKT - Bedingungen unter ACQ*)
Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ *ein lokales Minimum des Optimierungsproblems* (3.4)*, welches der ACQ genüge. Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m, \mu^* \in \mathbb{R}^p$*, so dass* (x^*,λ^*,μ^*) *ein KKT-Punkt von* (3.4) *ist.*

Beweis: Lemma 3.4 besagt, dass

$$\nabla f(x^*)^T d \geq 0 \qquad \text{für alle} \quad d \in \mathcal{T}_X(x^*)$$

ist. Wegen $\mathcal{T}_X(x^*) = \mathcal{T}_{lin}(x^*)$ (ACQ) ist dann

$$-\nabla f(x^*)^T d \;\leq\; 0$$

für alle $d \in \mathbb{R}^n$ mit $Ad \leq 0$, wobei die Zeilen von A mit $A \in \mathbb{R}^{(|I(x^*)|+2p)\times n}$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} \nabla g_i(x^*)^T \quad &, \quad i \in I(x^*)\,, \\ \nabla h_j(x^*)^T \quad &, \quad j = 1,...,p\,, \\ -\nabla h_j(x^*)^T \quad &, \quad j = 1,,,p\,. \end{aligned}$$

$(Ad \leq 0 \;\Leftrightarrow\; d \in \mathcal{T}_{lin}(x^*).)$
Das Lemma von Farkas garantiert die Existenz einer Lösung des Systems

$$A^T y \;=\; -\nabla f(x^*) \quad , \quad y \geq 0\,.$$

Definieren wir nun

$$\lambda_i^* \;=\; \begin{cases} y_i & , \; i \in I(x^*) \\ 0 & , \; i \notin I(x^*) \end{cases}$$

sowie

$$\begin{aligned} \mu_i^+ &:= y_{i+|I(x^*)|} \qquad , \quad i = 1, ..., p \\ \mu_i^- &:= y_{i+p+|I(x^*)|} \quad , \quad i = 1, ..., p \end{aligned}$$

und

$$\mu_i^* \;=\; \mu_i^+ \,-\, \mu_i^- \qquad , \quad i = 1, ..., p$$

so ist (x^*, λ^*, μ^*) ein KKT-Punkt.

□

Optimalitätsbedingungen für lineare Restriktionen:

Betrachte

$$\left\{ \begin{array}{rl} & \min f(x) \\ \text{u.d.N.} & a_i^T x \;\leq\; \alpha_i \quad i = 1, ..., m \\ & b_j^T x \;=\; \beta_j \quad\; j = 1, ..., p \end{array} \right. \tag{3.8}$$

$$f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n) \;\; , \;\; a_i, b_j \in \mathbb{R}^n \;\; , \;\; \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}\,.$$

In diesem Falle sind die KKT-Bedingungen notwendige Bedingungen für ein lokales Minimum.

Satz 3.12 (*KKT-Bedingungen für lineare Restriktionen*)
Sei x^* ein lokales Minimum von (3.8)*. Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, $\mu^* \in \mathbb{R}^p$, so dass (x^*, λ^*, μ^*) den KKT-Bedingungen*

$$\left\{ \begin{array}{cl} \nabla f(x^*) \,+\, \sum_{i=1}^m \lambda_i^* a_i \,+\, \sum_{j=1}^p \mu_j^* b_j \;=\; 0 & \\ b_j^T x^* \;=\; \beta_j & , \;\; j = 1, ..., p \\ a_i^T x^* \;\leq\; \alpha_i & , \;\; i = 1, ..., m \\ \lambda_i^*(a_i^T x^* - \alpha_i) \;=\; 0 & , \;\; i = 1, ..., m \\ \lambda_i^* \;\geq\; 0 & , \;\; i = 1, ..., m \end{array} \right. \tag{3.9}$$

von (3.8) *genügt.*

Beweis: Mit $g_i(x) := a_i^T x - \alpha_i$, $h_j(x) := b_j^T x - \beta_j$ sind (3.9) in der Tat die KKT-Bedingungen für (3.8).
Wir zeigen, dass die ACQ für (3.8) erfüllt ist, dass also $\mathcal{T}_X(x^*) = \mathcal{T}_{lin}(x^*)$ gilt. Mit Satz 3.11 folgt dann die Behauptung. Wegen Lemma 3.6 genügt es zu zeigen:

$$\mathcal{T}_{lin}(x^*) \;\subseteq\; \mathcal{T}_X(x^*)\;.$$

Sei $d \in \mathcal{T}_{lin}(x^*)$.

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} a_i^T d & \leq & 0 \ , \ \ i \in I(x^*) \\ b_j^T d & = & 0 \ , \ \ j = 1, ..., p \end{array}$$

Es sei $\{t_k\}$ eine beliebige Folge mit $t_k \searrow 0$. Setze

$$x^k := x^* + t_k d\,.$$

Für k hinreichend groß gilt dann:

$$\begin{array}{rcl} a_i^T x^k & = & a_i^T (x^* + t_k d) \ = \ \alpha_i + t_k a_i^T d \ \leq \ \alpha_i \quad , \ \forall\, i \in I(x^*) \\ a_i^T x^k & = & a_i^T (x^* + t_k d) \ = \ a_i^T x^* + t_k a_i^T d \ < \ \alpha_i \quad , \ \forall\, i \notin I(x^*)\,,\ k \geq k_0 \\ b_j^T x^k & = & b_j^T (x^* + t_k d) \ = \ b_j^T x^* + t_k b_j^T d \ = \ \beta_j \quad , \ \forall\, j = 1, ..., p \end{array}$$

Das heißt: $\{x^k\}$ ist zulässig und $x^k \to x^*$, $k \to \infty$. Wegen

$$\frac{x^k - x^*}{t^k} = d \ \to \ d$$

folgt $d \in \mathcal{T}_X(x^*)$.

$\square$

Bemerkung: Die Aussage von Satz 3.12 ist nicht erstaunlich, da $\mathcal{T}_{lin}(x^*)$ durch Linearisierung von $\mathcal{T}_X(x^*)$ entstanden ist.

Optimalitätsbedingungen für konvexe Restriktionen:

Wir betrachten das Problem

$$\left\{ \begin{array}{rl} & \min f(x) \\ \text{u.d.N.} & g_i(x) \ \leq \ 0 \quad i = 1, ..., m \\ & b_j^T x \ = \ \beta_j \quad \ j = 1, ..., p \end{array} \right. \tag{3.10}$$

wobei $f, g_i \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$ konvexe Funktionen sind, $b_j \in \mathbb{R}^n, \beta_j \in \mathbb{R}$.
Dabei heißt eine Funktion $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, falls X konvex ist und

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \ \leq \ \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

für alle $x, y \in X$ und alle $\lambda \in (0,1)$ gilt.

Lemma 3.13. *Sei $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex.*
a) Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(X)$ ist genau dann konvex, wenn für alle $x, y \in X$

$$f(x) - f(y) \ \geq \ \nabla f(y)^T (x - y) \tag{3.11}$$

gilt.
b) Ist $f : X \to \mathbb{R}$ konvex, so ist jedes lokale Minimum des Optimierungsproblems

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad x \in X$$

bereits ein globales Minimum.

Beweis: als Übung.

Definition 3.14. *Das Problem* (3.10) *genügt der Regularitätsbedingung von Slater, wenn es ein* $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ *gibt mit*

$$\begin{cases} g_i(\hat{x}) \;<0 \;, & i=1,...,m \;\; \textit{und} \\ b_j^T \hat{x} \;=\; \beta_j \;, & j=1,...,p \end{cases} \tag{3.12}$$

d.h. $\hat{x}$ *ist strikt zulässig bzgl. der Ungleichungsrestriktionen und zulässig bzgl. der Gleichheitsrestriktionen.*

Satz 3.15 (*KKT-Bedingungen unter Slater-Bedingungen*)
Sei $x^* \in \mathbb{R}^n$ *ein* (*lokales=globales*) *Minimum des Problems* (3.10) *und es gelte die Slater-Bedingung. Dann existieren Multiplikatoren* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, $\mu^* \in \mathbb{R}^p$*, so dass* (x^*, λ^*, μ^*) *den KKT-Bedingungen genügt:*

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* b_j = 0 & \\ b_j^T x^* \;=\; \beta_j & , \;\; j=1,...,p \\ g_i(x*) \;\leq\; 0 & , \;\; i=1,...,m \\ \lambda_i^* \;\geq\; 0 \;,\; \lambda_i^* g_i(x^*) \;=\; 0 & , \;\; i=1,...,m \end{cases} \tag{3.13}$$

Beweis: Aufgrund von Satz 3.11 (ACQ) genügt es wieder $\mathcal{T}_{lin}(x^*) \;\subseteq\; \mathcal{T}_X(x^*)$ zu zeigen. (X ist die zulässige Menge von (3.10) und damit konvex.) Sei

$$\mathcal{T}_{strict}(x^*) = \{d \in \mathbb{R}^n \;:\; \nabla g_i(x^*)^T d < 0 \,,\, i \in I(x^*) \,,\, b_j^T d = 0 \,,\, j=1,...,p\} \,,$$

$I(x^*) \;=\; \{i \,:\, g_i(x^*) = 0\}$.
Es gilt:

$$\mathcal{T}_{strict}(x^*) \;\subseteq\; \mathcal{T}_X(x^*)$$

(Als Übung mit Aufgabe 2.22 Kanzow/Geiger)
Aus Lemma 3.3 folgt

$$\mathrm{cl}(\mathcal{T}_{strict}(x^*)) \;\subseteq\; \mathcal{T}_X(x^*)$$

Es ist nun zu zeigen:

$$\mathcal{T}_{lin}(x^*) \;\subseteq\; \mathrm{cl}(\mathcal{T}_{strict}(x^*)) \,.$$

Sei $d \in \mathcal{T}_{lin}(x^*)$ beliebig. Sei weiter $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ ein Vektor gemäß (3.12).
Wir setzen

$$\hat{d} \;:=\; \hat{x} - x^*$$

Da g_i konvex ist, $i = 1,...,m$, gilt mit (3.11):

$$\nabla g_i(x^*)^T \hat{d} \;\leq\; g_i(\hat{x}) - g_i(x^*) \;<\; 0 \qquad , \quad i \in I(x^*) \,.$$

Und:

$$\nabla h_j(x^*)^T \hat{d} \;=\; h_j(\hat{x}) - h_j(x^*) \;=\; 0 \qquad , \quad j=1,...,p$$

$(\nabla h_j(x) = b_j\,)$.
Setzen wir $d(\delta) \;:=\; d + \delta \hat{d}$ für $\delta > 0$, so folgt

$$\nabla g_i(x^*)^T d(\delta) \;<\; 0 \qquad , \quad i \in I(x^*)$$

$$\nabla h_j(x^*)^T d(\delta) \;=\; 0 \qquad , \quad j=1,...,p$$

Daraus schließen wir:

$$d(\delta) \in \mathcal{T}_{strict}(x^*) \quad \text{für alle } \delta > 0\,.$$

Und mit $\delta \searrow 0$ sehen wir: $d \in \mathrm{cl}(\mathcal{T}_{strict}(x^*))$.
Also:

$$\mathcal{T}_{lin}(x^*)) \subseteq \mathcal{T}_X(x^*)$$

und damit

$$\mathcal{T}_{lin}(x^*)) = \mathcal{T}_X(x^*)\,.$$

□

Für konvexe Probleme sind die KKT-Bedingungen sogar hinreichend !

Satz 3.16 *Sei* (x^*, λ^*, μ^*) *ein KKT-Punkt für das Problem* (3.10)*. Dann ist* x^* (*lokales=globales*) *Minimum von* (3.10)*.*

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein zulässiger Vektor für das konvexe Problem (3.10). Aus den KKT-Bedingungen sowie (3.11) folgern wir:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq f(x^*) + \nabla f(x^*)^T(x - x^*) \\ &= f(x^*) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*)^T(x - x^*) - \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* b_j^T(x - x^*) \\ &= f(x^*) - \sum_{i \in I(x^*)} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*)^T(x - x^*) \qquad (\text{sonst } \lambda_i^* = 0) \\ &\geq f(x^*) \end{aligned}$$

wegen $\lambda_i^* \geq 0$ und

$$\nabla g_i(x^*)^T(x - x^*) \leq g_i(x) - g_i(x^*) \leq 0$$

für alle $i \in I(x^*)$ wegen (3.11).
$\Rightarrow$ x^* ist ein Minimum von (3.10).

□

Korollar 3.17 *Gegeben sei das Problem* (3.10)*, wobei jetzt auch die* $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *linear seien. Dann ist* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *genau dann ein* (*lokales=globales*) *Minimum von* (3.10)*, wenn es Lagrange-Multiplikatoren* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ *gibt, so dass das Tripel* (x^*, λ^*, μ^*) *ein KKT-Punkt von* (3.10) *ist.*

Beweis: Satz 3.12 und Satz 3.16

□

Anmerkung: In Satz (3.16) kamen wir ohne Slater-Bedingungen aus!

Alternative Charakterisierung von KKT-Punkten:

Definition 3.18. *Ein Vektor* $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ *mit* $\lambda^* \geq 0$ *heißt Sattelpunkt der Lagrange-Funktion* $\mathcal{L}$*, wenn die Ungleichungen*

$$\mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) \leq \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \leq \mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*) \tag{3.14}$$

gelten für alle $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p$.

Bemerkung: (3.14) besagt, dass x^* ein Minimum von $\mathcal{L}(\cdot, \lambda^*, \mu^*)$ auf $\mathbb{R}^n$ ist, und (λ^*, μ^*) ein Maximum von $\mathcal{L}(x^*, \cdot, \cdot)$ auf $\mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p$ darstellt. $\longrightarrow$ " Sattelpunkt ".

Satz 3.19 (*Sattelpunkt-Theorem*)
Gegeben sei das Problem (3.10). *Das Tripel* $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ *ist genau dann ein Sattelpunkt der Lagrange-Funktion* $\mathcal{L}$*, wenn* (x^*, λ^*, μ^*) *ein KKT-Punkt von* (3.10) *ist.*

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei (x^*, λ^*, μ^*) ein Sattelpunkt von $\mathcal{L}$. Aus (3.14) folgt, dass x^* globales Minimum von $\mathcal{L}(\cdot, \lambda^*, \mu^*)$ ist und somit

$$\nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \;=\; 0$$

gilt. (3.14) liefert außerdem

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^*) \;+\; \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x^*) \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) \;+\; \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(x^*) \tag{3.15}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, $\mu \in \mathbb{R}^p$ mit $h_j(x) := b_j^T x - \beta_j$.
Aus (3.15) folgt $g(x^*) \leq 0$ und $h(x^*) = 0$, da sonst für $\lambda_i \to \infty$, $|\mu_j| \to \infty$ (3.15) verletzt werden kann.
Wähle nun $\lambda = 0$ und $\mu = \mu^*$ in (3.15)

$$\Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(x^*) \;\leq\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) \;+\; \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(x^*)$$

Also gilt

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) \;\geq\; 0$$

und daher:

$$\lambda_i^* g_i(x^*) \;=\; 0 \qquad , \quad i = 1, ..., m$$

wegen $\lambda_i^* \geq 0$, $g_i(x^*) \leq 0$.
$\Longrightarrow$ (x^*, λ^*, μ^*) ist ein KKT-Punkt von (3.10).

"$\Leftarrow$" Sei (x^*, λ^*, μ^*) ein KKT-Punkt (3.10).

$$\Longrightarrow \quad \nabla_x \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \;=\; 0 \qquad \text{(1. KKT-Bed.)}$$

$\Rightarrow$ ist ein stationärer Punkt von $\mathcal{L}(\cdot, \lambda^*, \mu^*)$.
Da $\mathcal{L}(\cdot, \lambda^*, \mu^*)$ konvex ist, ist x^* ein globales Minimum von $\mathcal{L}(\cdot, \lambda^*, \mu^*)$.
Also gilt

$$\mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \;\leq\; \mathcal{L}(x, \lambda^*, \mu^*) \qquad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Unter Ausnutzung von $g_i(x^*) \leq 0$, $h(x^*) = 0$ und $\lambda_i^* g_i(x^*) = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \;&=\; f(x^*) \;+\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* g_i(x^*) \;+\; \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* h_j(x^*) \\ &=\; f(x^*) \\ &\geq\; f(x^*) \;+\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x^*) \;+\; \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x^*) \\ &=\; \mathcal{L}(x^*, \lambda, \mu) \end{aligned}$$

für alle $\lambda \geq 0$, $\mu \in \mathbb{R}^p$.
$\Longrightarrow$ (x^*, λ^*, μ^*) ist ein Sattelpunkt von $\mathcal{L}$.

□

Zusammenfassung:

Korollar 3.20 *Gegeben sei das konvexe Problem* (3.10).

(*a*) *Ist* $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m_+ \times \mathbb{R}^p$ *ein Sattelpunkt der Lagrange-Funktion* $\mathcal{L}$, *so ist* x^* *ein globales Minimum von* (3.10).

(*b*) *Ist* x^* *ein* (*lokales=globales*) *Minimum von* (3.10) *und ist die Slater-Bedingung erfüllt, so gibt es* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ *und* $\mu^* \in \mathbb{R}^p$, *so dass* (x^*, λ^*, μ^*) *ein Sattelpunkt von* $\mathcal{L}$ *ist.*

(*c*) *Sind die Funktionen* g_i, h_j *in* (3.10) *alle linear, so ist* x^* *genau dann ein* (*lokales=globales*) *Minimum von* (3.10), *wenn es Vektoren* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ *und* $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ *gibt, so dass* (x^*, λ^*, μ^*) *ein Sattelpunkt der Lagrange-Funktion ist.*

Weitere Optimalitätskriterien

Erinnerung: (3.4)

$$\begin{cases} & \min f(x) \\ \text{u.d.N.} & g_i(x) \leq 0 \ , \quad i = 1, ..., m \\ & h_j(x) = 0 \ , \quad j = 1, ..., p \end{cases}$$

Definition 3.21. *Seien* $x \in \mathbb{R}^n$ *ein zulässiger Punkt von* (3.4) *und* $I(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$.

a) Dann genügt x der Regularitätsbedingung der linearen Unabhängigkeit (*linear independence constraint qualification, LICQ*), *wenn die Gradienten*

$$\nabla g_i(x) \quad , \quad i \in I(x)$$

$$\nabla h_j(x) \quad , \quad j = 1, ..., p$$

linear unabhänhig sind.

b) Der Vektor x genügt der Regularitätsbedingung von Mangasarian-Fromovitz (*MFCQ*), *wenn gilt:*

i) Die Gradienten

$$\nabla h_j(x) \quad , \quad j = 1, ..., p$$

sind linear unabhängig.

ii) Es existiert ein Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ *mit*

$$\nabla g_i(x)^T d < 0 \qquad , \quad i \in I(x) \qquad \textit{und}$$

$$\nabla h_j(x)^T d = 0 \qquad , \quad j = 1, ..., p\,.$$

Satz 3.22 *Sei* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *ein lokales Minimum von* (3.4), *welches der LICQ oder der MFCQ genügt. Dann existieren Lagrange-Multiplikatoren* $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ *derart, dass das Tripel* (x^*, λ^*, μ^*) *ein KKT-Punkt von* (3.4) *ist. Die Multiplikatoren* λ^*, μ^* *sind im Falle der LICQ sogar eindeutig bestimmt.*

Beweis: Teile als Übung.

Optimalitätsbedingungen 2.Ordnung:

Es sei weiterhin (3.4) gegeben, wobei die Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar seien.
Weiter sei (x^*, λ^*, μ^*) ein KKT-Punkt von (3.4) und

$$I(x^*) \;=\; \{\, i : g_i(x^*) = 0 \,\}$$

Es gilt dann

$$I(x^*) \;=\; I_0(x^*) \,\cup\, I_>(x^*)$$

mit

$$\begin{aligned} I_0(x^*) \;&:=\; \{\, i \in I(x^*) \;:\; \lambda_i^* = 0 \,\}\,, \\ I_>(x^*) \;&:=\; \{\, i \in I(x^*) \;:\; \lambda_i^* > 0 \,\}\,. \end{aligned}$$

Schließlich definieren wir noch

$$\mathcal{T}(x^*) \;:=\; \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;: \begin{array}{lll} \nabla g_i(x^*)^T d \;=\; 0 & , & i \in I_>(x^*) \\ \nabla g_i(x^*)^T d \;\le\; 0 & , & i \in I_0(x^*) \\ \nabla h_j(x^*)^T d \;=\; 0 & , & j = 1, ..., p \end{array} \right.$$

Satz 3.23 (*Notwendiges Kriterium* 2. *Ordnung*)
Sein $x^* \in X$ *ein lokales Minimum von* (3.4) *welches der LICQ-Bedingung genüge.* ($I_0(x^*), I_>(x^*)$ *hängen dann nicht von* λ^* *ab, da eindeutig.*)
Dann ist

$$d^T\, \nabla_{xx}^2\, \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*)\, d \;\ge\; 0 \qquad \forall\, d \in \mathcal{T}(x^*)\,,$$

wobei $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ *und* $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ *die gemäß Satz 3.22 eindeutig bestimmten Lagrange-Multiplikatoren sind.*

Satz 3.24 (*Hinreichendes Kriterium* 2. *Ordnung*)
Sei (x^*, λ^*, μ^*) *ein KKT-Punkt von* (3.4) *mit*

$$d^T\, \nabla_{xx}^2\, \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*)\, d \;>\; 0 \qquad \forall\, d \in \mathcal{T}(x^*)\;,\; d \neq 0$$

Dann ist x^* *ein striktes Minimum von* (3.4) (*d.h.* $\exists$ *Umbebung* U *von* x^* *mit* $f(x^*) < f(x)\; \forall\, x \in U$ *zulässig* , $x \neq x^*$) .

∇_{xx}^2 bezeichnet stets die Hesse-Matrix von $\mathcal{L}$ bzgl. x !

Bemerkung: Im Falle eines unrestringierten Problems

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

stimmen die Kriterien in Satz 3.23 und Satz 3.24 wegen $\mathcal{T}(x^*) = \mathbb{R}^n$ mit den aus der Analysis bekannten Kriterien für lokale Minima überein.

3.2 Dualität

Wir betrachten wieder das lineare Programm

$$\min c^T x \quad \text{u.d.N.} \quad Ax = b \;, \; x \geq 0 \tag{3.16}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$.

Definition 3.25. *Das Maximierungsproblem*

$$\max b^T \lambda \quad \text{u.d.N.} \quad A^T\lambda \leq c \tag{3.17}$$

nennen wir das zu (3.16) duale *lineare Programm. Wir bezeichnen* (3.16) *als* primales *lineares Program.*

Durch Einführung einer nichtnegativen Schlupfvariablen geht (3.17) *über in*

$$\max b^T \lambda \quad \text{u.d.N.} \quad A^T\lambda + s = c \;, \; s \geq 0\,. \tag{3.18}$$

Satz 3.26 *Die folgenden Aussagen sind äquivalent*

(a) *Das primale Problem* (3.16) *besitzt eine Lösung* x^*.
(b) *Das duale Problem* (3.18) *besitzt eine Lösung* (λ^*, μ^*).
(c) *Die Optimalitätsbedingungen*

$$\begin{aligned} A^T\lambda + s &= c \\ Ax &= b \\ x_i s_i &= 0 \;, \quad i = 1, ..., n \\ x, s &\geq 0 \end{aligned}$$

besitzen eine Lösung (x^*, λ^*, μ^*).

Beweis: $''(a) \Leftrightarrow (c)''$
Das primale Problem (3.16) ist ein konvexes Optimierungsproblem mit linearen Nebenbedingungen. Korollar 3.17 besagt, dass $x^* \in \mathbb{R}^n$ genau dann Lösung von (3.16) ist, wenn es einen KKT-Punkt für (3.16) gibt.
KKT-Bedingungen für (3.16):

$$(3.16) \iff \min f(x) \quad \text{u.d.N.} \quad g(x) \leq 0\,,\, h(x) = 0$$

mit

$$\begin{aligned} &f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} &&,\; f(x) = c^T x &&,\; \nabla f(x) = c \\ &g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n &&,\; g(x) = -x &&,\; \nabla g(x) = -I \\ &h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m &&,\; h(x) = Ax - b &&,\; \nabla h(x) = A \end{aligned}$$

i) $\nabla_x \mathcal{L}(x, \tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \quad \nabla f(x) + \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i \nabla g_i(x) + \sum_{j=1}^m \tilde{\mu}_j \nabla h_j(x) = 0 \quad , \; \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^n \;, \; \tilde{\mu} \in \mathbb{R}^m$$

$$\Leftrightarrow \quad c + \sum_{i=1}^n \tilde{\lambda}_i(-e_i) + \sum_{j=1}^m \tilde{\mu}_j a_j = 0$$

mit $e_i = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)^T \in \mathbb{R}^n$ und $a_j \in \mathbb{R}^n = j$-te Zeile von A.

$$\Leftrightarrow \quad A^T\tilde{\mu} - \tilde{\lambda} + c \,=\, 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{\lambda} - A^T\tilde{\mu} \,=\, c$$

ii) $h(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Ax = b$

iii)

$$\begin{aligned} & \tilde{\lambda} \geq 0 \quad , \quad g(x) \leq 0 \quad , \quad \tilde{\lambda}^T g(x) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \tilde{\lambda} \geq 0 \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} \tilde{\lambda}_i x_i = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \tilde{\lambda}_i x_i = 0 \quad , \quad i = 1, ..., n \end{aligned}$$

Definiere nun $\lambda := -\tilde{\mu} \in \mathbb{R}^m$ und $s := \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^n$, so ergibt i)-iii) die Bedingungen (c).

$''(b) \Leftrightarrow (c)''$ Analog als Übung.
Beachte: (3.18) ist ein Maximierungsproblem !

□

Bemerkung: Satz 3.26 sagt nichts über die Existenz von Lösungen aus !

Beispiel 3.27

$$\min x_1 + x_2 \qquad \text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 = -1 \;\;,\;\; x_1, x_2 \geq 0$$

hat keinen zulässigen Punkt und daher keine Lösung.

Frage: Wann hat ein lineares Programm eine Lösung ?
$\hookrightarrow$ Dualitätssätze

Satz 3.28 (*Schwache Dualität*)
Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein zulässiger Punkt des primalen Problems (3.16) *und* $(\lambda, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ *ein zulässiger Punkt des dualen Problems* (3.18). *Dann gilt:*

$$b^T\lambda \,\leq\, c^T x\,.$$

Beweis: Da x und (λ, s) zulässig sind ergibt sich

$$b^T\lambda \,=\, (Ax)^T\lambda \,=\, x^T(A^T\lambda) \,=\, x^T(c - s) \,\leq\, c^T x$$

denn es ist $x^T s \geq 0$ wegen $x, s \geq 0$.

□

Satz 3.28 liefert eine untere Schranke für den Wert der Zielfunktion $f(x) = c^T x$. Sei

$$\inf(P) \,:=\, \inf\{\, c^T x \,:\, Ax = b\,,\, x \geq 0\,\}$$

und

$$\sup(D) \,:=\, \sup\{\, b^T\lambda \,:\, A^T\lambda + s = c\,, s \geq 0\,\}\,,$$

so gilt also

$$\sup(D) \,\leq\, \inf(P)\,.$$

Wir setzen $\inf(P) := \infty$ bzw. $\sup(D) := -\infty$, falls (3.16) bzw. (3.18) keine zulässigen Punkte besitzt.

Korollar 3.29 *Seien $x \in \mathbb{R}^n$ ein zulässiger Punkt für* (3.16) *und* $(\lambda, s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ *zulässig für* (3.18)*. Weiter gelte*

$$c^T x = b^T \lambda .$$

Dann ist x Lösung von (3.16) *und* (λ, s) *Lösung von* (3.18).

Beweis: Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger zulässiger Vektor von (3.16). Dann gilt mit Satz 3.28

$$c^T x = b^T \lambda \leq c^T \xi$$

Beweis für (λ, s) analog.

□

Zwischenfazit: Die schwache Dualität besagt: $c^T x - b^T \lambda \geq 0$. und Korollar 3.29: $c^T x - b^T \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad x$ ist Lösung von (3.16) und (λ, s) von (3.18), wobei $s \in \mathbb{R}^n$ so gewählt wurde, dass (λ, s) zulässig ist.
Es ist dann $\inf(P) = \sup(D)$. Gilt $\inf(P) > \sup(D)$, so spricht man von einer *Dualitätslücke*.

Satz 3.30 (*Starke Dualität*)
Besitzt (3.16) *eine Lösung x oder hat das duale Problem* (3.16) *eine Lösung* (λ, s), *so gilt* $\inf(P) = \sup(D)$ *, d.h. es existiert keine Dualitätslücke.*

Beweis: Sei x eine Lösung von (3.16). Satz 3.26 (Optimalitätsbedingungen) garantiert die Existenz von $(x, \lambda, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ mit

$$0 = s^T x = (c - A^T \lambda)^T x = c^T x - \lambda^T (Ax) = c^T x - b^T \lambda$$

Mit Korollar 3.29 folgt die Behauptung.
Analog argumentiert man für das duale Problem.

□

Satz 3.31 (*Existenzsatz*)

a) Ist $\inf(P) \in \mathbb{R}$, *so besitz das primale Programm* (3.16) *eine Lösung.*

b) Ist $\sup(D) \in \mathbb{R}$, *so besitzt das duale Programm* (3.18) *eine Lösung.*

Beweis: a) Sei $f^* := \inf(P) \in \mathbb{R}$
Annahme: Es gibt kein primal zulässiges $x \in \mathbb{R}^n$ mit $f^* = c^T x$,
also es gelte

$$c^T x > f^* \qquad \text{für alle } x \geq 0 \, , \; Ax = b \, . \tag{3.19}$$

Also besitzt das System

$$B^T x := \begin{pmatrix} c^T \\ -A \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} f^* \\ -b \end{pmatrix} =: h \in \mathbb{R}^{m+1}$$

keine Lösung $x \geq 0$, $B^T \in \mathbb{R}^{(m+1) \times n}$.
Lemma von Farkas $\Rightarrow$
Es gibt ein $d \in \mathbb{R}^{m+1}$ mit $h^T d < 0$ und $Bd \geq 0$.
Sei $d = (\alpha, \lambda)$, $d \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, so folgern wir

$$\alpha f^* - b^T \lambda < 0 \tag{3.20}$$

sowie

$$\alpha c \, - \, A^T \lambda \, \geq \, 0 \, . \tag{3.21}$$

Ist x ein primal zulässiger Vektor (der wegen $\inf(P) \in \mathbb{R}$ existiert), so folgt aus (3.21)

$$\begin{aligned} \alpha c^T x \, - \, x^T A^T \lambda \, &= \, \alpha c^T x \, - \, (Ax)^T \lambda \\ &= \, \alpha c^T x \, - \, b^T \lambda \; \geq \, 0 \end{aligned}$$

und aus (3.20) dann

$$\alpha c^T x \, \geq \, b^T \lambda \, > \, \alpha f^* \, ,$$

woraus wir $\alpha > 0$ schließen (vgl.(3.19)).
Man erhält also

$$f^* \, < \, b^T \, \overline{\lambda} \qquad \text{und} \qquad A^T \, \overline{\lambda} \, \leq \, c$$

mit $\overline{\lambda} := \lambda/\alpha$.
Mit $\overline{s} := c - A^T \, \overline{\lambda}$ ist $(\overline{\lambda}, \overline{s})$ dual zulässig mit $b^T \, \overline{\lambda} > \inf(P)$
Widerspruch zu Satz 3.28 !
b) analog.

□

Korollar 3.32 *Sind das primale und das duale Programm beide zulässig, so haben beide Programme eine optimale Lösung.*

Beweis: Aus der schwachen Dualität und der Zulässigkeit folgt

$$-\infty \, < \, \sup(D) \, \leq \, \inf(P) \, < \, +\infty$$

und mit Satz 3.31 die Behauptung.

□

ACHTUNG: Der Existenzsatz 3.31 gilt nur für lineare Probleme !
Der optimale Wert des Problems

$$\min f(x) \, = \, e^x \qquad , \quad x \in \mathbb{R}$$

ist 0 und wird von keinem $x \in \mathbb{R}$ angenommen.

Die Konstruktion von Innere-Punkte-Verfahren beruht auf dem Prinzip der Dualität.

4

Lineare Optimierung II: Innere – Punkte – Methoden

Ziel: Alternative zum Simplex-Verfahren für große lineare Programme.

Betrachte das primale Programm

$$\min c^T x \qquad \text{u.d.N} \quad Ax = b\ ,\ x \geq 0 \tag{4.1}$$

und das zugehörige duale Programm

$$\max b^T \lambda \qquad \text{u.d.N} \quad A^T\lambda + s = c\ ,\ s \geq 0 \tag{4.2}$$

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$.

Satz 3.26 besagt, dass (4.1) und (4.2) äquivalent sind zu den Optimalitätsbedingungen

$$\left\{ \begin{aligned} A^T\lambda\, +\, s &= c \\ Ax &= b \\ x_i s_i &= 0 \quad , \quad i = 1, ..., n \\ x, s &\geq 0 \end{aligned} \right. \tag{4.3}$$

Idee: Wir stören (4.3) durch ein $\tau > 0$ gemäß

$$\left\{ \begin{aligned} A^T\lambda\, +\, s &= c \\ Ax &= b \\ x_i s_i &= \tau \quad , \quad i = 1, ..., n \\ x, s &\geq 0\ , \end{aligned} \right. \tag{4.4}$$

lösen (4.4) und lassen $\tau \to 0$ konvergieren.
Die Abbildung $\tau \mapsto (x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)$ heißt der *zentrale Pfad*, wobei $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)$ eine Lösung von (4.4) ist.

Problem: Sind die zentralen Pfad-Bedingungen (4.4) überhaupt lösbar ?

Gegenbeispiel: Das lineare Programm

$$\min x_1 + x_2 \qquad \text{u.d.N.} \quad x_1 + x_2 = 0\ ,\ x_1, x_2 \geq 0$$

hat eine Lösung, die zugehörigen zentralen Pfad-Bedingungen (4.4) nicht.

Ausweg: Definiere zu (4.1) bzw. (4.2) logarithmische Barriere-Probleme

$$\min c^T x\, -\, \tau \sum_{i=1}^{n} \log(x_i) \qquad \text{u.d.N} \quad Ax = b\ ,\ x > 0 \tag{4.5}$$

$$\max b^T\lambda + \tau \sum_{i=1}^{n} \log(s_i) \qquad \text{u.d.N} \quad A^T\lambda + s = c\,,\; s > 0 \tag{4.6}$$

und zeige:
Hat (4.5) oder (4.6) eine Lösung, so auch die zentralen Pfad-Bedingungen.

Satz 4.1 *Sei $\tau > 0$ gegeben. Dann sind äquivalent:*

(a) *Das primale Barriere-Problem* (4.5) *hat eine Lödung x_τ.*
(b) *Das duale Barriere-Problem* (4.6) *hat eine Lösung (λ_τ, s_τ).*
(c) *Die zentralen Pfad-Bedingungen* (4.4) *besitzen eine Lösung $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)$.*

Beweis: Die Funktion $f : \{x \in \mathbb{R}^n : x > 0\} \to \mathbb{R}\,,\; f(x) = c^T x - \tau \sum_{i=1}^{n} \log x_i$ ist konvex und $\nabla f(x) = c - \tau X^{-1} e$ mit $X = \mathrm{diag}(x_1, ..., x_n)$ und $e = (1, 1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Das Problem (4.5) ist damit ein konvexes Problem mit linearen Nebenbedingungen.

Korollar 3.17 $\Rightarrow$ x_τ ist genau dann eine Lösung von (4.5), wenn die KKT-Bedingungen erfüllt sind:

$$\nabla f(x_\tau) + \sum_{j=1}^{m} \tilde{\lambda}_j \nabla h_j(x_\tau) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{\mu}_i \nabla g_i(x_\tau) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad c - \tau X_\tau^{-1} e + A^T \tilde{\lambda} = 0$$

da wegen $-x < 0\,,\; g_i(x)$ stets inaktiv ist und damit $\tilde{\mu}_i = 0\,,\; i = 1, ..., n$ gilt. Außerdem ist

$$h(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; Ax = b\,,\; x > 0\,.$$

Definiere $s_\tau := \tau X_\tau^{-1} e > 0\,,\; \lambda_\tau := -\tilde{\lambda}\,.$
So erhalten wir insgesamt

$$A^T\lambda_\tau + s_\tau = c \quad , \quad Ax_\tau = b \quad , \quad (x_\tau)_i (s_\tau)_i = \tau \quad , \quad s_\tau, x_\tau > 0\,.$$

Das sind die zentralen Pfad-Bedingungen (4.4) für $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)$.
$(b) \Leftrightarrow (c)$ ähnlich !

□

Fazit: Um die Existenz einer Lösung von (4.4) zu beweisen, genügt es die Existenz einer Lösung von (4.5) nachzuweisen.

Wir benötigen dazu noch zwei weitere Bezeichnungen.
Wir nennen

$$\mathcal{F} := \{\, (x, \lambda, s) : Ax = b\,,\, A^T\lambda + s = c\,,\; x, s \geq 0 \,\}$$

die *primal-dual zulässige Menge* und

$$\mathcal{F}^0 := \{\, (x, \lambda, s) \in \mathcal{F} : x > 0\,,\, s > 0 \,\}$$

die *primal-dual strickt zulässige Menge.*

Bemerkung: $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$ ist eine notwendige Bedingung dafür, dass das primale Barriere-Problem eine Lösung hat. Denn ist $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)$ eine Lösung von (4.4), so gilt offenbar $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau) \in \mathcal{F}^0$. Wäre $\mathcal{F}^0 = \emptyset$ kann (4.5) nach Satz 4.1 keine Lösung haben.
Diese Bedingung ist auch hinreichend !

Satz 4.2 *Sei $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Dann besitzt das primale Barriere-Problem* (4.5) *für jedes $\tau > 0$ eine Lösung.*

Beweis: Sei $\tau > 0$ und $(\hat{x}, \hat{\lambda}, \hat{s}) \in \mathcal{F}^0$ gegeben, d.h.

$$\begin{cases} A^T\hat{\lambda} + \hat{s} = c \\ A\,\hat{x} = b \\ \hat{x}\,,\, \hat{s} > 0\,. \end{cases} \tag{4.7}$$

Sei weiter

$$B_\tau(x) := c^T x - \tau \sum_{i=1}^n \log(x_i)\,,$$

$$\mathcal{L}_\tau := \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax = b\,,\, x \geq 0\,,\, B_\tau(x) \leq B_\tau(\hat{x}) \,\}\,.$$

Es zeigt sich, dass aus $B_\tau(x) \leq B_\tau(\hat{x})$ schon $x > 0$ folgt.
Wir wollen zeigen: $\mathcal{L}_\tau$ ist kompakt.
Offenbar: $\mathcal{L}_\tau$ ist abgeschlossen.
Noch zu zeigen : $\mathcal{L}_\tau$ ist beschränkt.
Für $x \in \mathcal{L}_\tau$ gilt mit (4.7) :

$$\begin{aligned} B_\tau &= c^T x - \tau \sum_{i=1}^n \log(x_i) \\ &= c^T x - \hat{\lambda}^T(Ax - b) - \tau \sum_{i=1}^n \log(x_i) \\ &= c^T x - x^T A^T \hat{\lambda} + b^T\hat{\lambda} - \tau \sum_{i=1}^n \log(x_i) \\ &= c^T x - x^T(c - \hat{s}) + b^T\hat{\lambda} - \tau \sum_{i=1}^n \log(x_i) \\ &= x^T\hat{s} + b^T\hat{\lambda} - \tau \sum_{i=1}^n \log(x_i) \\ &\leq B_\tau(\hat{x}) \end{aligned}$$

Also:

$$\sum_{i=1}^n (\hat{s}_i x_i - \tau \log(x_i)) \leq B_\tau(\hat{x}) - b^T\hat{\lambda} := k$$

wobei k eine Konstante ist.
Die Funktionen $k_i(x_i) := \hat{s}_i x_i - \tau \log(x_i)$ erfüllen

$$\lim_{x_i \to +\infty} k_i(x_i) = \lim_{x_i \to 0^+} k_i(x_i) = +\infty$$

und sind stetig und konvex (also nach unten beschränkt).
Also ist $\mathcal{L}_\tau$ beschränkt und damit kompakt.

$$\Rightarrow \quad \min B_\tau \quad \text{u.d.N.} \quad x \in \mathcal{L}_\tau$$

hat eine Lösung $x_\tau > 0$. Wegen $x_\tau \in \mathcal{L}_\tau$ ist dies auch eine Lösung von (4.5).

□

Satz 4.3 *Es sei $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$. Dann besitzen die Bedingungen* (4.4) *für jedes $\tau > 0$ eine Lösung $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)$, wobei x_τ und s_τ eindeutig bestimmt sind. Besitzt A vollen Rang, so ist auch λ_τ eindeutig bestimmt.*

Beweis: Da $\mathcal{F}^0 \neq \emptyset$ folgt mit Satz 4.2, dass (4.5) eine Lösung x_τ besitzt für alle $\tau > 0$. Daraus folgt wiederum, dass die Bedingungen (4.4) eine Lösung $(x_\tau, \lambda_\tau, s_\tau)$ besitzen für alle $\tau > 0$ (Satz 4.1).
Da $B_\tau(x) = c^T x - \tau \sum_{i=1}^n \log(x_i)$ strikt konvex ist, ist x_τ eindeutig bestimmt.
$\Rightarrow$ s_τ eindeutig bestimmt wegen $(x_\tau)_i (s_\tau)_i = \tau\,,\ i = 1, ..., n$.
Besitzt A vollen Rang, so ist auch λ_τ eindeutig bestimmt aus $A^T \lambda_\tau + s_\tau = c$ und zwar ist $\lambda_\tau = (AA^T)^{-1} A(c - s_\tau)$.

□

Ziel: Anwendung des Newton-Verfahrens auf die zentralen Pfad- Bedingungen (4.4).

Newton-Verfahren: Sei $F \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^p)$ gegeben.
Zu lösen: $F(\omega) = 0$ durch Iterationsverfahren. Ist ω^k gegeben so verwendet man die Linearisierung $F_k(\omega)$ von F um ω^k, d.h

$$F_k(\omega) := F(\omega^k) + F'(\omega^k)(\omega - \omega^k)\,.$$

Die Forderung $F_k(\omega^{k+1}) = 0$ führt zu:

$$\omega^{k+1} := \omega^k - F'(\omega^k)^{-1} F(\omega^k)\,.$$

Also: Ist ω^0 gegeben, so berechne $\omega^{k+1} := \omega^k + \triangle\omega^k$ mit

$$F'(\omega^k) \triangle \omega^k = -F(\omega^k)\,.$$

Häufig setzt man

$$\omega^{k+1} = \omega^k + t_k \triangle \omega^k$$

mit $t_k > 0$.

Hier:

$$F_\tau(\omega) := F_\tau(x, \lambda, s) := \begin{pmatrix} A^T\lambda + s - c \\ Ax - b \\ XSe - \tau e \end{pmatrix}\,,$$

mit $X = \operatorname{diag}(x_1, ..., x_n)\,,\ S = \operatorname{diag}(s_1, ..., s_n)\,,\ e = (1, ..., 1)^T$.
Also: $F_\tau(x, \lambda, s) = 0 \Leftrightarrow (x, \lambda, s)$ genügt den Bedingungen (4.4) (bis auf $x, s > 0$)
Es ist dann

$$F'_\tau(x, \lambda, s) = \begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S & 0 & X \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2n+m)\times(2n+m)}\,. \tag{4.8}$$

Frage: Wann existiert $F'_\tau(x, \lambda, s)^{-1}$?

Satz 4.4 *Sei $\omega := (x, \lambda, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ ein gegebener Vektor mit $x, s > 0$. Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ habe vollen Rang. Dann ist $F'_\tau(\omega)$ für jedes $\tau > 0$ regulär.*

Beweis: Sei $p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ gegeben mit

$$F'_\tau(x, \lambda, s)p = 0\,.$$

Aus (4.8) lesen wir ab:

$$A^T p^{(2)} + p^{(3)} = 0\,, \tag{4.9}$$

$$Ap^{(1)} = 0\,, \tag{4.10}$$

$$Sp^{(1)} + Xp^{(3)} = 0\,. \tag{4.11}$$

Aus (4.9) und (4.10) erhalten wir

$$0 \;=\; {p^{(1)}}^T A^T p^{(2)} \;+\; {p^{(1)}}^T p^{(3)} \;=\; {p^{(1)}}^T p^{(3)}\,.$$

Aus (4.11) leiten wir ab:

$$p^{(3)} \;=\; -X^{-1} S p^{(1)} \tag{4.12}$$

und somit

$${p^{(1)}}^T X^{-1} S p^{(1)} \;=\; 0\,.$$

Da $X^{-1}S$ positiv definit ist, gilt dann

$$p^{(1)} \;=\; 0$$

und aus (4.12) folgt $p^{(3)} = 0$.
Da A vollen Rang hat, erhalten wir aus (4.9) schließlich $p^{(2)} = 0$, also $p = 0$.

□

Bemerkung: Die Iterierten (x^k, λ^k, s^k) werden stets so bestimmt, dass $x^k, s^k > 0$ gilt.

Innere Punkte-Methode: (vorläufige Version)
Zu gegebenen $\omega^k = (x^k, \lambda^k, s^k)$ und $\tau_k > 0$ löse

$$F'_{\tau_k}(\omega^k) \triangle \omega^k \;=\; -F_{\tau_k}(\omega^k)\,,$$

also

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^k & 0 & X^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \triangle x^k \\ \triangle \lambda^k \\ \triangle s^k \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} -A^T\lambda^k - s^k + c \\ -Ax^k + b \\ -X^k S^k e + \tau_k e \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

mit

$$X^k \;=\; \operatorname{diag}(x_1^k, ..., x_n^k)\,,$$
$$S^k \;=\; \operatorname{diag}(s_1^k, ..., s_n^k)\,,$$
$$\omega^{k+1} \;:=\; \omega^k \;+\; t_k \triangle \omega^k \qquad \text{für ein } t_k > 0\,. \tag{4.14}$$

Lemma 4.5. *Gelten für $\omega^0 = (x^0, \lambda^0, s^0)$ die Beziehungen $A^T\lambda^0 + s^0 = c$, $Ax^0 = b$, so folgt schon für alle aus (4.13), (4.14) gewonnenen $\omega^k = (x^k, \lambda^k, s^k)$, dass*

$$A^T\lambda^k \;+\; s^k \;=\; c \quad , \quad Ax^k \;=\; b\,.$$

Beweis: Die Behauptung gelte für ein $k \geq 0$.
Aus (4.13), 1.Zeile, folgt dann

$$A^T \triangle \lambda^k \;+\; \triangle s^k \;=\; 0\,.$$

(4.14) garantiert dann:

$$\begin{aligned} A^T\lambda^{k+1} \;+\; s^{k+1} \;-\; c \;&=\; A^T(\lambda^k + t_k \triangle \lambda^k) \;+\; (s^k + t_k \triangle s^k) \;-\; c \\ &=\; A^T\lambda^k \;+\; s^k \;-\; c \;+\; t_k(A^T \triangle \lambda^k + \triangle s^k) \\ &=\; 0\,. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der 2.Zeile von (4.13) erhält man analog:

$$Ax^{k+1} \;=\; Ax^k \;+\; t_k A \triangle x^k \;=\; b\,.$$

□

Wählen wir also ein $\omega^0 = (x^0, \lambda^0, s^0)$ aus

$$\mathcal{F}^0 \;:=\; \{\,(x,\lambda,s)\;:\; Ax=b\,,\; A^T\lambda+s=c\,,\;\; x,s>0\,\}$$

so können wir die rechte Seite von (4.13) durch $(0,0,-X^kS^ke+\tau_k e)$ ersetzen.

ALGORITHMUS: (allgemeine Innere Punkte-Methode)

(S.0) Wähle $\omega^0 := (x^0,\lambda^0,s^0)\in\mathcal{F}^0$, $\varepsilon\in(0,1)$ und setze $k:=0$.

(S.1) Ist $\mu_k := (x^k)^T s^k/n \;\le\; \varepsilon \quad\longrightarrow\quad$ STOP

(S.2) Wähle $\sigma_k\in[0,1]$ und bestimme die Lösung $\triangle\omega^k := (\triangle x^k,\triangle\lambda^k,\triangle s^k)$ von

$$\begin{pmatrix} 0 & A^T & I\\ A & 0 & 0\\ S^k & 0 & X^k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\triangle x^k\\ \triangle\lambda^k\\ \triangle s^k\end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix}0\\ 0\\ -X^kS^ke+\sigma_k\mu_k e\end{pmatrix}.$$

(S.3) Setze

$$\omega^{k+1} := \omega^k + t_k\,\triangle\,\omega^k \quad,\quad k\leftarrow k+1$$

und gehe zu (S.1).
t_k bezeichne eine Schrittweite, die $x^{k+1}>0$, $s^{k+1}>0$ garantiert.

Bemerkungen:
a) Aufgrund von Lemma 4.5 und (S.3) ist nur noch die Bedingung

$$(x^k)^T s^k \;\longrightarrow\; 0 \qquad \text{für } k\to 0$$

zu garantieren, um alle Optimalitätsbedingungen (4.3) zu erfüllen.
Da $\omega^k\in\mathcal{F}^0$ für alle k gilt, haben wir

$$\begin{aligned}(x^k)^T s^k \;&=\; (x^k)^T(c-A^T\lambda^k)\\ &=\; c^Tx^k \;-\; (Ax^k)^T\lambda^k\\ &=\; c^Tx^k \;-\; b^T\lambda^k\,.\end{aligned}$$

Der Ausdruck $(x^k)^Ts^k$ ist also die Dualitätslücke, $\mu^k = (x^k)^Ts^k/n$ somit die gewichtete Dualitätslücke.

b) Die Wohldefiniertheit des Algorithmus, wenn A vollen Rang hat, wird durch die Existenz eines t_k wie in (S.3) und durch Satz 4.4 garantiert.

c) Der Algorithmus beinhaltet 2 Freiheitsgrade. Die Wahl von t_k und von σ_k. Dabei bedeutet $\sigma_k=0$ ein Newtonschritt für die Optimalitätsbedingungen (4.3), führt aber zu kleinen Schrittweiten t_k.
$\sigma_k=1$ bringt uns weiter von (4.3) weg, läßt aber größere Schrittweiten t_k zu. Das Produkt $\mu_k\sigma_k$ spielt die Rolle von τ_k.
Spezielle Wahlen von t_k,σ_k führen zu *Pfad-Verfolgungs-Verfahren.*

5

Nichtlineare Optimierung I: Nichtrestringierte Probleme

5.1 Abstiegsmethoden

Wir betrachten das Problem

$$\min f(x) \tag{5.1}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Wir nennen (5.1) ein *nichtrestringiertes Minimierungsproblem.*
Sei

$$g(x) := \nabla f(x)\,.$$

Betrachte für eine Richtung $d \in \mathbb{R}^n$, $||d|| = 1$, die differenzierbare Funktion $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$\varphi(t) \;:=\; f(x + td)\,.$$

Dann ist $\varphi'(0) = \nabla f(x)^T d \;=\; g(x)^T d$ und $|\varphi'(0)| \;\leq\; ||g(x)||$. Demnach wird $\varphi'(0)$ für $d := \frac{g(x)}{||g(x)||}$ maximal und für $d := \frac{-g(x)}{||g(x)||}$ minimal, falls $g(x) \neq 0$ ist.

Da $\varphi'(0)$ die Änderung von f in x beschreibt, ist $g(x)$ die Richtung des steilsten Auf- und $-g(x)$ die Richtung des steilsten Abstiegs.
Ist $g(x) = 0$, so ist x stationärer Punkt und nach Lemma 3.4 ein Kandidat für ein Minimum.

1.Idee: Sei x^0 gegeben.
Löse

$$x'(t) \;=\; -g(x(t)) \qquad , \quad x(0) = x^0\,.$$

Längs der Kurve $x(t)$ nehmen die Funktionswerte streng monton mit wachsenden t ab.
Beweis: Ist $\varphi(t) = f(x(t))$, so gilt

$$\varphi'(t) \;=\; g(x(t))x'(t) \;=\; -\,\langle g(x), g(x)\rangle \;\leq\; 0\,.$$

Problem: $\lim_{t\to\infty} x(t)$ muß nicht existieren.

2. Idee: Sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$ gegeben sowie eine Suchrichtung $s^0 \in \mathbb{R}^n, ||s|| = 1$.
Bezeichne

$$\varphi(t) \;:=\; f(x^0 \;+\; ts^0)$$

und untersuche das Verhalten von φ für $t \geq 0$. Ziel ist es ein $\lambda_0 > 0$ zu finden, so dass

$$\varphi(\lambda_0) \;=\; f(x^0 + \lambda_0 s^0) \;<\; f(x^0) \;=\; \varphi(0)$$

gilt. Dabei soll garantiert werden, dass λ_0 nicht "zu klein" ist ($\rightarrow$ sonst zu aufwendig).
Iteriere so lang bis $g(x^k) = 0$ für ein $x^k \in \mathbb{R}^n$ gilt.
Da nur die Gerade $x^k + ts^k$ in Betracht gezogen wird, spricht man von *line search*.

ALGORITHMUS: (line search)

Wähle $0 < c_2 \leq c_1 < 1$ (in der Regel $c_1 \leq \frac{1}{2}$) und $0 < \gamma \leq 1$.
Gegeben sei $x^0 \in \mathbb{R}^n$.
Für $k = 0, 1, ...$

1) Ist $g_k := g(x^k) = 0 \quad \rightarrow$ STOP

2) Sonst wähle Suchrichtung $s^k \in \mathbb{R}^n$, $||s^k|| = 1$ und $-g_k^T s^k \ \geq \ \gamma ||g_k||_2$

3) Bestimme eine Schrittweite $\lambda_k > 0$ und $x^{k+1} := x^k + \lambda_k s^k$ so, dass

$$\begin{cases} f(x^{k+1}) \leq \ f(x^k) \ + \ \lambda_k c_1 g_k^T s^k \\ g_{k+1}^T s^k \ \geq \ c_2 g_k^T s^k \end{cases} \tag{5.2}$$

Bemerkungen:

a) Schritt 2 verlangt, dass der Winkel zwischen s^k und der steilsten Abstiegsrichtung $< 90°$ ist. Für $\gamma = 1$ kommt nur $s^k = -g(x^k)/||g(x^k)||$ in Frage.

b) Der erste Teil von (5.2) garantiert wegen $\lambda_k c_1 g_k^T s^k \ < \ 0$, dass

$$f(x^{k+1}) \ < \ f(x^k)$$

gilt. Wegen

$$g_{k+1}^T s^k \ \geq \ c_2 g_k^T s^k \ \geq \ c_1 g_k^T s^k \ \geq \ \frac{f(x^{k+1}) - f(x^k)}{\lambda_k} \quad \xrightarrow{\lambda_k \searrow 0} \quad g_k^T s^k$$

ist der zweite Teil in (5.2) für sehr kleine $\lambda_k > 0$ nicht mehr erfüllt $\longrightarrow \lambda_k$ nicht "zu klein".

c) Es wurde offengelassen, wie man λ_k findet.
Eine Möglichkeit ist die *exakte line search*.

$$\lambda_k \ := \ \operatorname{argmin} \{ \, f(x^k + \lambda s^k \ : \ \lambda > 0 \, \} \, .$$

Satz 5.1 *Sei* $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $x^0 \in \mathbb{R}^n$ *und* $K := \{x : f(x) \leq f(x^0)\}$ *kompakt. Dann läßt sich der Algotihmus anwenden und bricht entweder nach endlich vielen Schritten mit einem* x^k *mit* $g(x^k) = 0$ *ab, wobei*

$$f(x^k) \ < \ f(x^{k-1}) \ < \ ... \ < \ f(x^0)$$

ist oder erzeugt eine unendliche Folge $\{x^k\}_k$ *mit*

1) $f(x^{k+1}) \ < \ f(x^k) \qquad , \quad k \geq 0 \, ,$
2) $\{x^k\}_k$ *besitzt mindestens einen Häufungspunkt* x^* ,
3) jeder Häufungspunkt x^* *erfüllt* $g(x^*) = 0$.

Die Menge K heißt Niveaumenge.

CG-Verfahren

Ziel: Abstiegsverfahren "mit Gedächtnis" für konvexe quadratische Funktionen.
Also sei

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2}x^T Ax \;+\; b^T x \;+\; c$$

mit $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit. Dann ist f konvex (Übung).

Definition 5.2. *Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit. Die Vekroren $s_1, ..., s_m \in \mathbb{R}^n$ heißen* A-konjugiert, *falls $s_i \neq 0$ für $1 \leq i \leq m$ und $s_i^T A s_j = 0$ für $i \neq j$ gilt.*

Bemerkung: A-konjungierte Vektoren $s_i, i = 1, ..., m$, sind stets linear unabhängig.
Denn aus $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i = 0$ folgt

$$0 \;=\; s_k A^T \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i s_i \right) \;=\; \alpha_k \underbrace{s_k^T A s_k}_{>0}$$

und damit $\alpha_k = 0\,,\; k = 1, ..., m$.

Satz 5.3 *Die Vektoren $s_0, ..., s_{n-1}$ seien A-konjugirert und $x^0 \in \mathbb{R}^n$ beliebig.*
Für $k = 0, 1, ..., n-1$ sei $x^{k+1} := x^k + \lambda_k s_k$ mit

$$\lambda_k \;:=\; \mathrm{argmin}_{\lambda\in\mathbb{R}}\, f(x^k + \lambda s_k)\,.$$

Dann gilt

$$f(x^n) \;=\; \min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$$

Beweis: Übung.

Also: x^n ist Optimallösung.

Idee: Verwende A-konjugierte Suchrichtungen.

ALGORITHMUS: (CG-Verfahren)

Es bezeichne $g(x) := \nabla f(x) = Ax + b$ den Gradienten von f.
Start: Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^n$, setze $g_0 := g(x^0)\,,\; s^0 := -g_0\,.$
Für $i = 0, 1, ...$

1) Ist $g_i = g(x^i) = 0 \quad \rightarrow \quad$ STOP
   x^i ist Minimum von f.

2) Sonst setze $x^{i+1} := x^i + \lambda_i s^i$, wobei gilt

$$\lambda_i \;:=\; \mathrm{argmin}_{\lambda\geq 0} f(x^i + \lambda s^i) \;=\; -\frac{g_i^T s_i}{s_i^T A s_i}$$

3) Berechne $\gamma_{i+1} := g_{i+1}^T g_{i+1} / g_i^T g_i$ und setze $s_{i+1} := -g_{i+1} + \gamma_{i+1} s_i\,.$

Bemerkung: a) λ_i ist wohldefiniert, da $s_i^T A s_i > 0$ gilt für $g_i \neq 0$.
b) γ_{i+1} wurde gerade so gewählt, dass die Richtungen $s_i, i = 0, 1, \ldots$ A-konjugiert sind. Nach Satz 5.3 stoppt das Verfahren daher nach endlich vielen Iterationen mit der exakten Lösung (wenn Rundungsfehler unberücksichtigt bleiben).
c) Man kann zeigen, dass

$$\frac{||x^k - x^*||_A}{||x^0 - x^*||_A} \leq 2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\kappa} + 1}\right)^k$$

gilt mit $||x||_A = \sqrt{\langle x, Ax \rangle}$ und $\kappa = ||A||_2 ||A^{-1}||_2$.

5.2 Trust – Region – Verfahren

Wir betrachten wieder das Optimierungsproblem

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)$$

für ein $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$. Es sei stets

$$g(x) := \nabla f(x) \quad , \quad H(x) := \nabla^2 f(x) \in \mathbb{R}^{n \times n} .$$

Es sei weiter eine Iterierte x^k gegeben und wieder $g_k = g(x^k), f_k = f(x^k)$.

Es gilt (Taylor-Entwicklung)

$$\begin{aligned} f(x^k + d) &= f(x^k) + g(x^k)^T d + \frac{1}{2} d^T H(x^k) d + O(||d||^3) \\ &\approx f_k + g_k^T d + \frac{1}{2} d^T B_k d =: \phi_k(d) \end{aligned}$$

wobei $||d||$ "klein" ist und $B_k = B_k^T \approx H(x^k)$ eine Approximation an die Hesse-Matrix.
Um f in einer Umgebung von x^k zu minimieren, lösen wir jetzt

$$\min_{||d||_2 \leq \Delta_k} \Phi_k(d) \tag{5.3}$$

für $\Delta_k > 0$. Ist Δ_k klein, so approximiert $\phi_k(d)$ den Wert $f(x^k + d)$ sehr gut und die Lösung von (5.3) ist eine gute Näherung für

$$\min_{||z||_2 \leq \Delta_k} f(x^k + z)$$

Der Bereich $\{z : ||z|| \leq \Delta_k\}$ heißt Vertrauensbereich (*trust region*), das Problem (5.3) ist das *Trust-Region Problem.*

Idee des Algorithmus:

- s_k sei die Optimallösung von (5.3).
- $\text{pred}_k := \Phi_k(0) - \Phi_k(s_k) =$ vorhergesagte Verkleinerung beim Übergang von x^k zu $x^k + s_k$.
- $\text{ared}_k := f(x^k) - f(x^{k+1})$, $x^{k+1} = x^k + s_k$, tatsächliche Verkleinerung

- $r_k := \text{ared}_k/\text{pred}_k$ Maß für die Übereinstimmung.
- Berechne s^k
- Ist r_k "klein", mache Nullschritt und setze $x^{k+1} := x^k$, verkleinere Δ_k.
- Ist r_k "groß", gehe über zu $x^{k+1} = x^k + s_k$ und vergrößere Δ_k.

ALGORITHMUS: (Trust-Region-Verfahren)

Gegeben seien Konstanten $0 < c_3 < c_4 < 1 < c_1$, $0 \le c_0 \le c_2 < 1$ mit $c_2 > 0$ sowie $\varepsilon > 0$.

1) Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $B_0 = B_0^T$, $\Delta_0 > 0$, setze $k := 0$.

2) Ist $||g_k|| \le \varepsilon \;\rightarrow\;$ STOP x^k (näherungsweise stationär)

3) Bestimme eine Näherungslösung s_k von (5.3) .

4) Berechne $r_k := \text{ared}_k/\text{pred}_k$ und setze

$$x^{k+1} := \begin{cases} x^k & , \text{ falls } r_k \le c_0 \quad \text{(Nullschritt)} \\ x^k + s_k & , \text{ sonst} \quad . \end{cases}$$

Wähle $B_{k+1} = B_{k+1}^T$ und $\Delta_{k+1} > 0$ mit

$$\Delta_{k+1} \in \begin{cases} [c_3\, ||s_k||_2 \,,\, c_4\Delta_k] & , \text{ falls } r_k \le c_2 \\ [\Delta_k \,,\, c_1\Delta_k] & , \text{ sonst} \quad . \end{cases}$$

Setze $k \rightarrow k+1$.

GOTO 2.

Bemerkungen:
a) Typische Konstanten sind $c_0 = 0$, $c_1 = 2$, $c_2 = c_3 = \frac{1}{4}$, $c_4 = \frac{1}{2}$.
b) Man wird versuchen B_{k+1} durch eine (möglichst einfache) Vorschrift aus B_k zu bestimmen. Hierzu gibt es sogenannte "Update-Verfahren".

Satz 5.4 (*Schulz, Schnabel, Byrd, 1985*)
Sei $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ und $||\nabla^2 f(x)|| \le M$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Sei weiter $c_0 > 0$ und $\varepsilon = 0$ im Algorithmus. Die Näherungslösungen s_k von (5.3) *mögen zusätzlich*

$$\phi_k(0) \;-\; \phi_k(s_k) \;\ge\; \tau||s_k||\min\left\{\Delta_k \,,\; \frac{||g_k||}{||B_k||}\right\}$$

für ein $\tau > 0$ erfüllen. Weiter seien auch die $B_k = B_k^T$, $k \ge 0$, beschränkt mit $||B_k|| \le M$ für alle k. Schließlich sei $\inf_k f(x^k) > -\infty$. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} g(x^k) \;=\; 0 \;,$$

es ist also jeder Häufungspunkt x^k von $\{x^k\}_k$ stationärer Punkt von f.

5.3 Nichtlineare Ausgleichsprobleme: Gauß– Newton – Verfahren

Es sei jetzt $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$,

$$f(x) \;=\; \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$$

mit $m \geq n$.
Für $m > n$ ist die Gleichung $f(x) = 0$ überbestimmt und braucht keine Lösung zu haben.

Idee: Definiere

$$\phi(x) \;:=\; \frac{1}{2}\,||f(x)||_2^2 \;=\; \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m f_i(x)^2$$

und suche ein x^* mit

$$x^* \;:=\; \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n}\,\phi(x)\,. \tag{5.4}$$

(5.4) ist ein nichtlineares Ausgleichsproblem, ”least-squares-Problem”.

Notwendige Bedingung für ein Minimum x^*

$$\nabla\phi(x^*) \;=\; 0 \quad , \quad \nabla^2\phi(x^*) \;\geq\; 0$$

mit

$$\nabla\phi(x) \;=\; J(x)^T f(x) \quad , \quad J(x) \;=\; Df(x)\,,$$

wobei $J(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ die Jacobi-Matrix von f ist.
Die Hesse-Matrix hat die Gestalt

$$\nabla^2\phi(x) \;= J(x)^T J(x) \;+\; B(x) \quad \in\; \mathbb{R}^{n\times n}$$

mit

$$B(x) \;=\; \sum_{i=1}^m f_i(x)\nabla^2 f_i(x) \quad \in\; \mathbb{R}^{n\times n}\,.$$

Gesucht ist demnach eine Lösung x^* von

$$\nabla\phi(x^*) \;=\; J(x^*)^T f(x^*) \;=\; 0\,. \tag{5.5}$$

Die Gleichungen (5.5) heißen *Normalgleichungen* von (5.4).

Bemerkung: Ist f affin linear, also $f(x) = Ax - b$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ so ist $Df(x) = A$ und die Normalgleichungen (5.5) haben die Gestalt

$$A^T(Ax - b) \;=\; 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; A^T Ax \;=\; A^T b\,. \tag{5.6}$$

Ist $\mathrm{Rang}(A) = n$, so ist $A^T A$ positiv definit und die Lösung von (5.6) ein Minimum von $\phi(x) = \frac{1}{2}||Ax - b||_2^2$ (da $A^T A = \nabla^2\phi(x)$).

Idee zur Lösung von (5.5)**:**
Wende das Newton-Verfahren an mit *line search*

$$x^{k+1} \;=\; x^k \;+\; \lambda_k d_k$$

mit

$$d_k \;:=\; -\nabla^2\phi(x^k)^{-1}\nabla\phi(x^k)\,.$$

Dabei wird die Schrittweite $\lambda_k > 0$ so bestimmt, dass

$$\phi(x^{k+1}) \;\approx\; \min\{\,\phi(x^k) + \lambda d_k \;:\; \lambda > 0\,\}$$

gilt.

Nachteil: Berechnung von $B(x)$ in $\nabla^2\phi(x)$ sehr aufwendig!

Ausweg: Ersetze $\nabla^2\phi(x)$ durch $J(x)^T J(x)$ (und lasse $B(x)$ weg)!

Dies entspricht der Linearisierung von f um x^k, d.h. wir ersetzen f durch

$$F(x) \;\approx\; f(x^k) \;+\; J(x^k)(x - x^k) \qquad \text{(Taylor)}\,.$$

Denn mit $f_k := f(x^k)$, $J_k := J(x^k)$ und

$$\phi_k(x) \;:=\; \frac{1}{2}||f_k \;+\; J_k(x - x^k)||^2$$

erhält man

$$\begin{aligned} \nabla\phi_k(x) \;&=\; J_k^T(f_k + J_k(x - x^k))\,, \\ \nabla^2\phi_k(x) \;&=\; J_k^T J_k\,. \end{aligned}$$

Das Minimum von ϕ_k wird angenommen, falls

$$\nabla\phi_k(x^*) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad J_k^T J_k(x^* - x^k) \;=\; -J_k^T f_k$$

gilt, also:

$$x^* \;=\; x^k + d_k \qquad \text{mit } \; d_k \;=\; -(J_k^T J_k)^{-1} J_k^T f_k\,.$$

Folglich ist

$$J_k^T J_k d_k \;=\; -J_k^T f_k$$

und damit die Lösung von

$$\min_d \;\frac{1}{2}||f_k \;+\; J_k d||_2^2\,.$$

Das legt folgendes Verfahren nahe:

$$x^{k+1} \;:=\; x^k + \lambda_k d_k \qquad , \qquad d_k \;:=\; -(J_k^T J_k)^{-1} J_k^T f_k$$

mit $\lambda_k > 0$, so dass

$$\phi(x^{k+1}) \;\approx\; \min_{\lambda > 0} \phi(x^k + \lambda d_k)\,.$$

Das ist das *Gauß-Newton-Verfahren mit line search.* Für $\lambda_k = 1$, $k = 0, 1, \ldots$ erhält man das klassische Gauß-Newton-Verfahren.

ALGORITHMUS: (Gauß-Newton-Verfahren mit line search)

Sei $x^0 \in \mathbb{R}$ beliegig.
Für $k = 0, 1, \ldots$

1) Berechne $d_k \;:=\; -(J_k^T J_k)^{-1} J_k^T f_k$ mit $J_k = J(x^k)$, $f_k = f(x^k)$.

2) Bestimme $x^{k+1} \;:=\; x^k + \lambda_k d_k$, $\lambda_k > 0$, so dass

$$\phi(x^{k+1}) \;\approx\; \min_{\lambda > 0} \;\phi(x^k + \lambda d_k)$$

ist.

Satz 5.5 *Wird λ_k wie in Satz 5.1 (Abstiegsverfahren) bestimmt, ist $K := \{x : \phi(x) \leq \phi(x^0)\}$ kompakt und $J(x)^T J(x)$ auf K positiv definit, so erzeugt der Algorithmus eine Folge $\{x^k\}_k$, deren Häufungspunkte stationäre Punkte von ϕ sind.*

Anmerkung:
Definiert man $\varphi(\lambda) := \phi(x^k + \lambda d_k)$, so ist

$$\varphi'(0) \;=\; d_k^T(J_k^T f_k) \;=\; -d_k^T J_k^T J_k d_k \;=\; -||J_k d_k||^2 \;<\; 0$$

da

$$J_k d_k = J_k(J_k^T J_k)^{-1} J_k^T f_k = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; J_k^T f_k \;=\; 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; x^k \text{ stationärer Punkt von } \phi\,.$$

$\Rightarrow$ d_k ist eine Abstiegsrichtung für ϕ.

6

Nichtlineare Optimierung II: Restringierte Optimierungsaufgaben:

6.1 Penalty – Methoden

Idee: Behandele ein restringiertes Problem durch Folge unrestringierter Probleme.

Betrachte

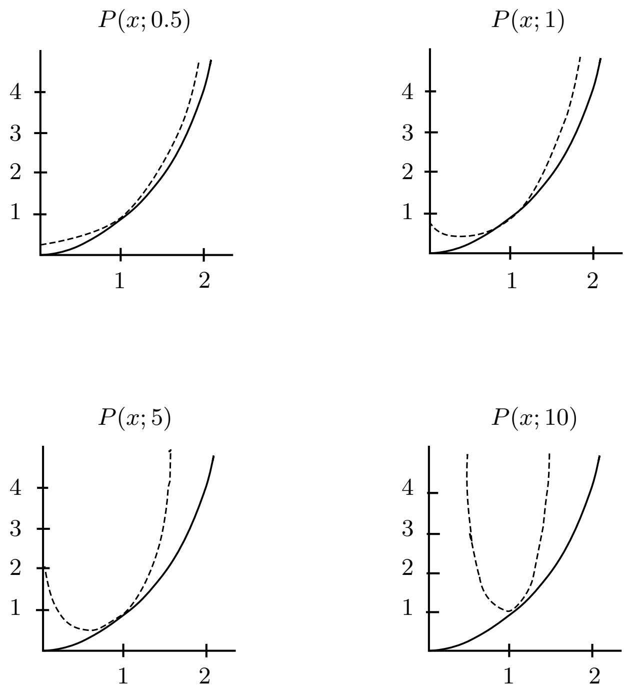
$$\min\ f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad h_j(x) = 0\,,\ j = 1, ..., p \tag{6.1}$$

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ stetig.
Definiere eine Penalty-Funktion

$$P(x;\alpha)\ :=\ f(x)\ +\ \frac{\alpha}{2}||h(x)||^2\,.$$

Offenbar: $\quad x$ zulässig $\ \Rightarrow\ P(x;\alpha) = f(x)$

Beispiel 6.1 $\quad \min\ x^2 \qquad$ u.d.N. $\qquad x - 1 = 0 \ \Rightarrow\ x^* = 1$ *ist Lösung.*



$$\begin{array}{lll} \alpha \ \textit{klein} & \Rightarrow & \min P(x;\alpha) \ \textit{weit weg von} \ \min f(x) = 1 \\ \alpha \ \textit{groß} & \Rightarrow & \min P(x;\alpha) \approx 1 \end{array}$$

Daher: Konstuiere $\{\alpha_k\}$ streng monoton wachsend und dazu

$$x_k := \operatorname{argmin}_{x \in \mathbb{R}^n} P(x;\alpha_k)\,,$$

ALGORITHMUS: (Penalty-Verfahren)

1) Wähle $\alpha_0 > 0$ und setze $k := 0$.

2) Definiere $x_k := \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} P(x;\alpha_k)$.

3) $h(x_k) = 0 \;\; \rightarrow$ STOP

4) Bestimme $\alpha_{k+1} > \alpha_k$, setze $k \to k+1$ und gehe zu 1).

Satz 6.2 *Seien f, h stetig, $\{\alpha_k\}$ streng monoton wachsend mit $\alpha_k \to \infty$, die zulässige Menge $X := \{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0\}$ nicht leer und $\{x_k\}$ die durch das Penalty-Verfahren definierte Folge.*

a) Die Folgen $\{P(x^k;\alpha_k)\}$, $\{f(x_k)\}$ sind monoton wachsend.
b) Die Folge $\{||h(x_k)||\}$ ist monoton fallend mit $\lim_{k\to\infty} h(x_k) = 0$.
c) Jeder Häufungspunkt der Folge $\{x_k\}$ ist eine Lösung von (6.1).

Es gilt offenbar, falls $X \neq \emptyset$ ist:

$$P(x^k;\alpha_k) \;\leq\; \inf_{x\in X} P(x;\alpha_k) \;=\; \inf_{x \in X} f(x) \;=:\; f^* \quad < +\infty \tag{6.2}$$

und damit

$$f(x^k) \;\leq\; P(x^k;\alpha_k) \;\leq\; f^*\,.$$

Ist x^k zulässig, so gilt natürlich auch

$$f(x^k) \;\geq\; f^* \quad \text{also} \quad f(x^k) \;=\; f^*$$

und somit ist x^k eine Lösung.
Dies rechtfertigt das Abbruchkriterium in 3).

Seien nun f , $h_j \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, $j = 1, ..., p$. Offenbar gilt

$$0 \;=\; \nabla P(x^k;\alpha_k) \;=\; \nabla f(x^k) \;+\; \alpha_k \sum_{j=1}^{p} h_j(x^k) \nabla h_j(x^k) \tag{6.3}$$

da x^k globales Minimum ist.
Ist $(x^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ein KKT-Punkt von (6.1), so gilt

$$0 \;=\; \nabla f(x^*) \;+\; \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla h_j(x^*)$$

Frage: Konvergiert

$$\mu_j^k \;:=\; \alpha_k h_j(x^k)\,, \qquad j = 1, ..., p\,, \tag{6.4}$$

gegen μ_j^* ?

Satz 6.3 *Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $\{x^k\}$ eine durch das Penalty-Verfahren erzeugte Folge mit $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$, $\{\nabla h_1(x^*), ..., \nabla h_p(x^*)\}$ seien linear unabhängig und $\{\mu^k\}$ gemäß(6.4) definiert. Dann gilt*
a) $\{\mu^k\}$ konvergiert gegen ein $\mu^* \in \mathbb{R}^p$.
b) (x^*, μ^*) mit μ^* aus a) ist ein KKT-Punkt von (6.1), d.h. μ^* ist der wegen Satz 3.22 eindeutig bestimmte Lagrange-Multiplikator zur Lösung x^* von (6.1)

Bemerkungen:
a) Die Probleme

$$x^k \;=\; \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} P(x;\alpha_k)$$

sind im allgemeinen nicht exakt lösbar.
Außerdem gilt für die Hesse-Matrix $\nabla^2_{xx} P(x^k;\alpha_k)$, daß für $\lim_k \alpha_k = +\infty$ auch

$$\lim_{k\to\infty} ||\nabla^2_{xx} P(x^k;\alpha_k)||_2 = +\infty$$

ist. $\Rightarrow$ Problem schlecht konditioniert

b) Ein allgemeines Problem

$$\min f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad h(x) = 0\,,\; g(x) \le 0$$

läßt sich umformulieren in der Gestalt

$$\min f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad h(x) = 0\,,\; \max\{0, g(x)\} = 0$$

mit

$$\max\{0, g(x)\} \;:=\; (\max\{0, g_1(x)\}, ..., \max\{0, g_m(x)\})^T \;\in \mathbb{R}^m\,.$$

Die zugehörige Penalty-Funktion lautet

$$P(x,\alpha) \;:=\; f(x) \;+\; \frac{\alpha}{2}\,||h(x)||^2 \;+\; \frac{\alpha}{2}\sum_{i=1}^m \max{}^2\{0, g_i(x)\}\,.$$

6.2 Barriere – Methoden

Problem: Bei Penalty-Verfahren sind die iterierten $\{x^k\}$ i.a. nicht zulässig.
Betrachte

$$\min f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad g(x) \le 0$$

mit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
Die logarithmische Barriere-Funktion

$$B(x;\alpha) \;:=\; f(x) \;-\; \alpha \sum_{i=1}^m \ln(-g_i(x))$$

und die inverse Barriere-Funktion

$$B(x;\alpha) \;:=\; f(x) \;-\; \alpha \sum_{i=1}^m \frac{1}{g_i(x)}$$

führen zu den Barriere-Verfahren:

1) Wähle eine Folge $\{\alpha_k\}$ mit $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = 0$.

2) Definiere $x^k := \operatorname{argmin}_{x\in\mathbb{R}^n} B(x;\alpha_k)$.

Hier gilt wegen

$$\lim_{z\to 0^-} (-\ln(-z)) = \lim_{z\to 0^-} \left(-\frac{1}{z}\right) = +\infty$$

stets

$$x^k \quad \text{ist zulässig} \quad (\Leftrightarrow\ g(x^k) \le 0\,).$$

6.3 Multiplier – Penalty – Methoden

Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad h(x) = 0 \tag{6.5}$$

mit gegebenen Funktionen $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$, $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.
Jedes lokale Minimum $x^* \in \mathbb{R}^n$ von (6.5) ist auch lokales Minimum von

$$\min \left\{ f(x) + \frac{\alpha}{2}\,||h(x)||^2 \right\} \qquad \text{u.d.N.} \qquad h(x) = 0 \tag{6.6}$$

für $\alpha > 0$ beliebig. Die Lagrange-Funktionen

$$\mathrm{L}_a(x,\mu;\alpha) := f(x) + \frac{\alpha}{2}||h(x)||^2 + \mu^T h(x)$$

von (6.6) heißt *erweiterte Lagrange-Funktion* (*augmented Lagrangian, Multiplier-Penalty-Funktion*).

Lemma 6.4. *Es sei $Q^T = Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ positiv semidefinit und $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch positiv definit auf $N(Q)$, d.h.*

$$x^T P x > 0 \qquad \textit{für alle} \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

mit $x \in N(Q)$. Dann existiert ein endliches $\overline{\alpha} > 0$, so dass $P + \alpha Q$ symmetrisch positiv definit ist für alle $\alpha \ge \overline{\alpha}$.

Beweis: Annahme: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_k \in \mathbb{R}^n$ mit $x_k \neq 0$ und

$$x_k^T P x_k + k x_k^T Q x_k \le 0\,.$$

Wir können dabei $||x_k|| = 1$ annehmen.
Dann existiert eine Teilfolge $\{x_{k_j}\}_j$ mit $\lim_{j\to\infty} x_{k_j} = x_*$ und $||x_*|| = 1$.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow\ x_*^T P x_* + \lim_{j\to\infty} \sup k_j x_{k_j}^T Q x_{k_j} \\ &= \lim_{j\to\infty} \sup \left(x_{k_j}^T P x_{k_j} + k_j x_{k_j}^T Q x_{k_j} \right) \le 0\,. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Wegen $x_{k_j}^T Q x_{k_j} \ge 0$ folgt hieraus

$$x_*^T Q x_* \;=\; \lim_{j\to\infty} x_{k_j}^T Q x_{k_j} \;=\; 0\,.$$

$\Rightarrow$ x_* ist lokales Minimum der Funktion $q(x) = \frac{1}{2}x^T Q x$
$\Rightarrow$ $\nabla q(x_*) \,=\, 0$
$\Rightarrow$ $Qx_* \,=\, 0 \;\Leftrightarrow\; x_* \in N(Q)$
$\Rightarrow$ $x_*^T P x_* \,>\, 0$ nach Vorraussetung
$\Rightarrow$ Widerspruch zu (6.7) □

Satz 6.5 *Es sei* (x^*, μ^*) *ein KKT-Punkt von* (6.5)*, so dass die hinreichende Optimalitätsbedingung 2.Ordnung aus Satz 3.24 erfüllt ist. Dann existiert ein endliches* $\overline{\alpha} > 0$*, so dass* x^* *für jedes* $\alpha \geq \overline{\alpha}$ *ein striktes lokales Minimum der Funktion* $\mathrm{L}_a(\cdot, \mu^*; \alpha)$ *ist.*

Beweis: Mit $\mathrm{L}(x,\mu) := f(x) + \mu^T h(x)$ gilt

$$\nabla_x \mathrm{L}_\alpha(x,\mu;\alpha) \;=\; \nabla_x \mathrm{L}(x,\mu) \;+\; \alpha \sum_{j=1}^{p} h_j(x) \nabla h_j(x)\,,$$

$$\nabla^2_{xx} \mathrm{L}_\alpha(x,\mu;\alpha) \;=\; \nabla^2_{xx} \mathrm{L}(x,\mu) \;+\; \alpha \sum_{j=1}^{p} \big(h_j(x) \nabla^2 h_j(x), + \nabla h_j(x) \nabla h_j(x)\big)\;.$$

Definieren wir $\mathrm{B}_* := \nabla h(x_*)^T$, so gilt

$$\nabla^2_{xx} \mathrm{L}_\alpha(x^*,\mu^*;\alpha) \;=\; \nabla^2_{xx} \mathrm{L}(x^*,\mu^*) \;+\; \alpha \mathrm{B}_*^T \mathrm{B}_*\,.$$

Nach Voraussetzuung gilt

$$d^T \nabla^2_{xx} \mathrm{L}(x^*,\mu^*) d \;>\; 0 \qquad \forall\, d \neq 0 \;\; \text{mit} \;\; \nabla h_j(x^*)^T d = 0\,.$$

$\Rightarrow$ $\nabla^2_{xx} \mathrm{L}(x^*,\mu^*)$ ist symmetrisch positiv definit auf $N(B_*) \,=\, N(B_*^T B_x)$.
Nach Lemma 6.4 existiert ein endliches $\overline{\alpha} > 0$, so dass $\nabla^2_{xx} \mathrm{L}(x^*,\mu^*;\alpha)$ symmetrisch positiv definitist für alle $\alpha \geq \overline{\alpha}$.
Da (x^*, μ^*) ein KKT-Punkt von (6.5) ist, gilt zudem

$$\nabla_x \mathrm{L}_\alpha(x^*,\mu^*,\alpha) \;=\; \nabla_x \mathrm{L}(x^* \mu^*) \;+\; \alpha \sum_{j=1}^{p} h_j(x^*) \nabla h_j(x^*) \;=\; 0\,.$$

$\Rightarrow$ x^* ist striktes, lokales Minimum von $\mathrm{L}_\alpha(\cdot, \mu^*, \alpha)\;\; \forall\, \alpha \geq \overline{\alpha}$.

□

Idee: Löse an Stelle von (6.5) das unrestringierte Problem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \; \mathrm{L}_\alpha(x,\mu^*;\alpha)\,.$$

Im Gegensatz zu den Penalty-Verfahren muss gemäß Satz 6.4 nun nicht mehr $\alpha \to \infty$ gelten, um ein exaktes Minimum x^* zu erhalten.

Problem: Die Werte μ^* und $\overline{\alpha}$ sind im Allgemeinen nicht bekannt!

Ausweg: Annahme: α sei hinreichend groß, so dass Satz 6.5 anwendbar ist. Gesucht ist eine Approximation μ^k an μ^*.

Sei dazu x^{k+1} Lösung von

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \; \mathrm{L}_\alpha(x,\mu^k;\alpha)\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_x \mathrm{L}_\alpha(x^{k+1}, \mu^k; \alpha) \\ &= \nabla f(x^{k+1}) + \sum_{j=1}^{p} \left(\mu_j^k + \alpha\, h_j(x^{k+1})\right) \nabla h_j(x^{k+1})\,. \end{aligned}$$

Ist (x^*, μ^*) ein KKT-Punkt von (6.5) ist, so gilt

$$0 = \nabla_x \mathrm{L}(x^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla h_j(x^*)\,.$$

Ein Vergleich legt nahe, die Aufdatierung

$$\mu^{k+1} := \mu^k + \alpha\, h(x^{k+1})$$

zu verwenden (Hestenes-Powell-Vorschrift). Wir erhalten so das Multiplier-Penalty-Verfahren:

Algorithmus: Multiplier-Penalty-Methode

(S.0) Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\mu^0 \in \mathbb{R}^p$, $\alpha_0 > 0$, $c \in (0,1)$ und setze $k := 0$.

(S.1) Ist (x^k, μ^k) KKT-Punkt von (6.5) $\rightarrow$ STOP

(S.2) Bestimme x^{k+1} als Lösung von: $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \mathrm{L}_a(x, \mu^k; \alpha_k)$.

(S.3) Setze $\mu^{k+1} := \mu^k + \alpha_k\, h(x^{k+1})$.

(S.4) Ist $\|h(x^{k+1})\| \geq c\, \|h(x^k)\|$,
so setze $\alpha_{k+1} := 10\alpha_k$ ansonsten setze $\alpha_{k+1} := \alpha_k$.

(S.5) Setze $k \leftarrow k+1$ und gehe zu (S.1).

6.4 SQP-Verfahren

Die SQP (= Sequentielle Quadratische Programmierung) -Verfahren gehören zu den wichtigsten Verfahren der nichtlinearen Optimierung.

6.4.1 Das Newton-Verfahren (reloaded)

Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Gesucht ist eine Lösung $x^* \in \mathbb{R}^n$ von

$$F(x) \;=\; 0\,.$$

Es sei bereits $x^k \approx x^*$ gegeben. Betrachte die lineare Approximation

$$F_k(x) \;:=\; F(x^k) \;+\; F'(x^k)(x - x^k) \;\approx\; F(x)$$

mit $F'(x^k) = J_F(x^k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und bestimme x^{k+1} durch

$$\begin{aligned} & F_k(x^{k+1}) \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow\; & F(x^k) \;+\; F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow\; & F'(x^k)(x^{k+1} - x^k) \;=\; -F(x^k)\,. \end{aligned}$$

So ergibt sich die Newton-Iteration

$$x^{k+1} \;=\; x^k \;+\; d^k \qquad , \quad k = 0, 1, \ldots$$

Mit $F'(x^k)d^k \;=\; -F(x^k)$.

Algorithmus: Newton-Verfahren

(S.0) Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^n$, setze $k := 0$.

(S.1) Ist $F(x^k) = 0 \;\;\rightarrow\;\;$ STOP

(S.2) Bestimme $d^k \in \mathbb{R}^n$ als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$F'(x^k)\,d^k \;=\; -F(x^k)\,.$$

(S.3) Setze $x^{k+1} \;:=\; x^k \;+\; d^k \qquad k \leftarrow k+1\,;$ gehe zu (S.1).

Bemerkung: Im Allgemeinen bricht das Newton-Verfahren nicht nach endlich vielen Schriten ab. Auf Grund der linearen Approximation ist die Konvergenz im Allgemeinen lokal.

Wie sieht es mit der Konvergenzgeschwindigkeit aus ?

Lemma 6.6. (*Störungslemma*)
Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\|I - BA\| < 1$. Dann sind A und B regulär und es gilt

$$\left\|B^{-1}\right\| \;\leq\; \frac{\|A\|}{1 - \|I - BA\|}\,.$$

Lemma 6.7. *Seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $x^* \in \mathbb{R}^n$ und $F'(x^*)$ regulär. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $F'(x)$ für alle $x \in U_\varepsilon(x^*) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x^*\| < \varepsilon\}$ regulär ist. Ferner gibt es eine Konstante $c > 0$, so dass*

$$\|F'(x)^{-1}\| \;\leq\; c$$

gilt für alle $x \in U_\varepsilon(x^*)$.

Beweis: Da F' stetig in x^* ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\|F'(x^*) - F'(x)\| \;\le\; \frac{1}{2\,\|F'(x^*)^{-1}\|}$$

für alle $x \in U_\varepsilon(x^*)$.

$$\Rightarrow \quad \|I - F'(x^*)^{-1}F'(x)\| \;\le\; \|F'(x^*)^{-1}\|\,\|F'(x^*) - F'(x)\| \;\le\; \frac{1}{2}$$

für alle $x \in U_\varepsilon(x^*)$.
Nach Lemma 6.6 ist $F'(x)$ regulär für alle $x \in U_\varepsilon(x^*)$ und

$$\begin{aligned}\|F'(x)^{-1}\| \;&\le\; \frac{\|F'(x^*)^{-1}\|}{1 - \|I - F'(x^*)^{-1}F'(x)\|}\\ &\le\; 2\,\|F'(x^*)^{-1}\| \;=:\; c\end{aligned}$$

□

Lemma 6.8. *Seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und eine Folge $\{x^k\} \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$ gegeben. Dann gilt*

a) Ist F stetig differentierbar, so ist

$$\|F(x^k) - F(x^*) - F'(x^k)(x^k - x^*)\| \;=\; o\left(\|x^k - x^*\|\right)$$

für $k \to \infty$.

b) Ist F stetig differenzierbar und F' lokal Lipschitz-stetig, so gilt

$$\|F(x^k) - F(x^*) - F'(x^k)(x^k - x^*)\| \;=\; O\left(\|x^k - x^*\|^2\right)$$

für $k \to \infty$.

Beweis: a) Es gilt

$$\begin{aligned}\|F(x^k) - F(x^*) - F'(x^k)(x^k - x^*)\| \;&\le\; \|F(x^k) - F(x^*) - F'(x^*)(x^k - x^*)\|\\ &\quad + \|F'(x^*) - F'(x^k)\|\,\|x^k - x^*\|\,.\end{aligned}$$

Da F in x^* differenzierbar ist, gilt

$$\|F(x^k) - F(x^*) - F'(x^*)(x^k - x^*)\| \;=\; o\left(\|x^k - x^*\|\right)$$

für alle $k \to \infty$.
Da F' in x^* auch stetig ist gilt zudem $\lim_{k\to\infty} \|F'(x^*) - F'(x^k)\| = 0$.

b) Aus dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt

$$\begin{aligned}&F(x^k) - F(x^*) - F'(x^k)(x^k - x^*)\\ &= \int_0^1 F'(x^* + t\,(x^k - x^*))(x^k - x^*)\,\mathrm{d}t \;-\; F'(x^k)(x^k - x^*)\\ &= \int_0^1 \left[F'(x^* + t(x^k - x^*)) - F'(x^k)\right]\,(x^k - x^*)\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Für k hinreichend groß folgt aus der lokalen Lipschitz-Stetigkeit von F'

$$
\begin{aligned}
&\|F(x^k) - F(x^*) - F'(x^k)(x^k - x^*)\| \\
&\leq \int_0^1 \|F'(x^* + t\,(x^k - x^*)) - F'(x^k)\| \,\mathrm{d}t \,\|x^k - x^*\| \\
&\leq \mathrm{L}\,\|x^k - x^*\| \int_0^1 \|(t-1)(x^k - x^*)\| \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{L}{2}\,\|x^k - x^*\|^2 \;=\; O\left(\|x^k - x^*)\|^2\right)
\end{aligned}
$$

für $k \to \infty$.

□

Satz 6.9 (*Konvergenz des Newton-Verfahrens*)
Seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $x^* \in \mathbb{R}^n$ mit $F(x^*) = 0$ und $F'(x^*)$ regulär. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für jedes $x^0 \in U_\varepsilon(x^*)$ gilt:
a) Das Newton-Verfahren

$$x^{k+1} \;=\; x^k \;-\; F'(x^k)^{-1}F(x^k) \qquad k = 0, 1, ...$$

ist wohldefiniert und es gilt $\lim_{k\to\infty} x^k = x^*$.
b) Die Konvergenzrate ist superlinear, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|} \;=\; 0\,.$$

c) Ist F' sogar lokal Lipschitz-stetig, so ist die Konvergenzrate quadratisch,d.h.

$$\|x^{k+1} - x^*\| \;=\; O\left(\|x^k - x^*\|^2\right)$$

für $k \to \infty$.

Beweis: Nach Lemma 6.7 existiert ein $\varepsilon_1 > 0$, so dass $F'(x)$ für alle $x \in U_{\varepsilon_1}(x^*)$ regulär ist mit

$$\|F'(x)^{-1}\| \;\leq\; c \qquad \forall\, x \in U_{\varepsilon_1}(x^*)$$

für ein $c > 0$.
Nach Lemma 6.8 a) existiert ein $\varepsilon_2 > 0$ mit

$$\|F(x) - F(x^*) - F'(x)(x - x^*)\| \;\leq\; \frac{1}{2c}\,\|x - x^*\|$$

für alle $x \in U_{\varepsilon_2}(x^*)$.

Wähle nun $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ und ein $x^0 \in U_\varepsilon(x^*)$. Dann ist x^1 wohldefiniert und

$$
\begin{aligned}
\|x^1 - x^*\| \;&=\; \|x^0 - x^* - F'(x^0)^{-1}F(x^0)\| \\
&\leq\; \|F'(x^0)^{-1}\|\,\|F(x^0) - F(x^*) \;-\; F'(x^0)(x^0 - x^*)\| \\
&\leq\; c\,\frac{1}{2c}\,\|x^0 - x^*\| \;=\; \frac{1}{2}\,\|x^0 - x^*\|\,.
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \quad x^1 \in U_\epsilon(x^*)$.
Induktiv folgt: x^k ist wohldefiniert und

$$\|x^k - x^*\| \;\leq\; \left(\frac{1}{2}\right)^k \|x^0 - x^*\| \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow\; \lim_{k\to\infty} x^k = x^*\,.$

b) Analog zum Beweis von a) erhält man

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\| &= \|x^k - x^* - F'(x^k)^{-1}F(x^k)\| \\ &\leq \|F'(x^k)^{-1}\| \, \|F(x^k) - F(x^*) - F'(x^k)(x^k - x^*)\| \\ &\leq c \, \|F(x^k) - F(x^*) - F'(x^k)(x^k - x^*)\| \,. \end{aligned}$$

Aus Lemma 6.8 folgt dann die Behauptung b) und ebenso c).

□

Bemerkung: Mit Hilfe des Newton-Verfahrens lassen sich auch unrestringierte Probleme der Form

$$\min f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

lösen, indem man das Verfahren auf die notwendige Bedingung

$$F(x^*) \,:=\, \nabla f(x^*) \,=\, 0$$

anwendet.

6.4.2 Lagrange-Newton-Iteration

Wir betrachten die Minimierung mit Gleichungsrestriktionen

$$\min f(x) \quad \text{u.d.N} \quad h(x) = 0 \,,$$

wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ zweimal stetig differenzierbar seien.
Die Lagrange-Funktion ist gegeben durch

$$\mathrm{L}(x, \mu) \,=\, f(x) \,+\, \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x) \,.$$

Die KKT-Bedingungen sind dann gegeben durch

$$\Phi(x, \mu) \,=\, 0$$

mit $\Phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.

$$\Phi(x, \mu) \,=\, \begin{pmatrix} \nabla_x \mathrm{L}(x, \mu) \\ h(x) \end{pmatrix}$$

und

$$\nabla_x \mathrm{L}(x, \mu) \,=\, \nabla f(x) \,+\, \sum_{j=1}^{p} \mu_j \nabla h_j(x) \,.$$

Zu lösen ist also ein nichtlineares Gleichungssystem in $(n+p)$ Variablem (x, μ). Die entsprechende Newton-Iteration lautet

$$(x^{k+1}, \mu^{k+1}) \,=\, (x^k, \mu^k) \,-\, \Phi'(x^k, \mu^k)^{-1} \, \Phi(x^k, \mu^k) \qquad k = 0, 1, ...$$

(Lagrange-Newton-Iteration).

Algorithmus: Lagrange-Newton-Verfahren

(S.0) Wähle $(x^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$, setze $k := 0$.

(S.1) Ist $\Phi(x^k, \mu^k) = 0 \;\; \rightarrow \quad$ STOP

(S.2) Berechne $(\Delta x^k, \Delta\mu^k)$ als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\Phi'(x^k, \mu^k) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\mu \end{pmatrix} = -\Phi(x^k, \mu^k)\,.$$

(S.3) Setze $(x^{k+1}, \mu^{k+1}) := (x^k, \mu^k) + (\Delta x^k, \Delta\mu^k) \qquad k \leftarrow k+1\,;\;$ gehe zu (S.1).

Wann ist $\Phi'(x^k, \mu^k)$ regulär?

Satz 6.10 *Es sei $(x^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ ein KKT-Punkt des Minimierungsproblems und es gelte*

a) Die Gradienten $\nabla h_1(x^*), ..., \nabla h_p(x^*)$ sind linear unabhängig (LICQ-Bedingung).

b) Es ist $d^T \nabla^2_{xx} L(x^*, \mu^*) d > 0$ für alle $d \neq 0$ mit $\nabla h_j(x^*)^T d = 0$ für $j = 1, ..., p$ (hinreichende Bedingung 2. Ordnung).

Dann ist die Jacobi-Matrix $\Phi'(x^*, \mu^*)$ regulär.

Beweis: Annahme: $\Phi'(x^*, \mu^*)q = 0$ für ein $q = (q^{(1)}, q^{(2)}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$.
Wegen

$$\Phi'(x^*, \mu^*) = \begin{pmatrix} \nabla^2_{xx} L(x^*, \mu^*) & h'(x^*)^T \\ h'(x^*) & 0 \end{pmatrix}$$

gilt dann

$$\nabla^2_{xx} L(x^*, \mu^*) q^{(1)} + \sum_{j=1}^{p} q_j^{(2)} \nabla h_j(x^*) = 0 \quad \text{und} \quad \nabla h_j(x^*)^T q^{(1)} = 0 \quad j = 1, ..., p$$

$$\Rightarrow \quad q^{(1)T} \nabla_{xx} L(x^*, \mu^*) q^{(1)} + \sum_{j=1}^{p} q_j^{(2)} \nabla h_j(x^*)^T q^{(1)} = q^{(1)} \nabla_{xx} L(x^*, \mu^*) q^{(1)} = 0$$

$$\overset{b)}{\Longrightarrow} \quad q^{(1)} = 0\,.$$

Hieraus ergibt sich aber auch

$$\sum_{j=1}^{p} q_j^{(2)} \nabla h_j(x^*) = 0$$

$$\overset{a)}{\Rightarrow} \quad q_j^{(2)} = 0 \quad , \quad j = 1, ..., p$$

$$\Longrightarrow \quad q = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi'(x^*, \mu^*) \text{ regulär}\,.$$

□

Nach Satz 6.9 konvergiert somit die Lagrange-Newton Iteration für $(x^0, \mu^0) \in U_\epsilon(x^*, \mu^*)$ für ein $\epsilon > 0$.

Wie werden zusätzliche Ungleichungsrestriktionen behandelt?
Es sei nun

$$\min f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad h(x) \,=\, 0\,,\, g(x) \,\leq\, 0$$

zu lösen, wobei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig differenzierbar seien.
Die KKT-Bedingungen lauten nun

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x,\lambda,\mu) \,&=\, 0 \\ h(x) \,&=\, 0 \\ g_i(x) \,\leq\, 0\,,\ \lambda_i \,\geq\, 0 \quad,\quad \lambda_i g_i(x) \,&=\, 0\,, \quad i=1,...,m \end{aligned}$$

mit

$$L(x,\lambda,\mu) \,=\, f(x) \,+\, \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \,+\, \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x)\,.$$

Um die KKT-Bedingungen wieder als Nullstellenproblem zu interpretieren benötigen wir die

Definition 6.11. *Eine Funktion* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *heißt* NCP-Funktion (*Nonlinear Complementary Problem*)*, falls*

$$\varphi(a,b) \,=\, 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \geq 0\,,\ b \geq 0 \quad \textit{und} \quad ab = 0$$

gilt.

Beispiele:
a) $\varphi(a,b) = 2\min\{a,b\}$,
b) Fischer-Burmeister-Funktion $\varphi(a,b) \,=\, a + b - \sqrt{a^2+b^2}\,.$

Die KKT-Bedingungen können mit Hilfe einer NCP-Funktion φ umformuliert werden zu

$$\begin{aligned} \nabla_x L(x,\lambda,\mu) \,&=\, 0 \\ h(x) \,&=\, 0 \\ \varphi(-g_i(x),\lambda_i) \,&=\, 0 \quad, \quad i=1,...,m\,. \end{aligned}$$

Wir erhalten so das nichtlineare Gleichungssystem

$$\Phi(x,\lambda,\mu) \,=\, 0$$

mit

$$\Phi(x,\lambda,\mu) \,=\, \begin{pmatrix} \nabla_x L(x,\lambda,\mu) \\ h(x) \\ \phi(-g(x),\lambda) \end{pmatrix}$$

und

$$\phi(-g(x),\lambda) \,=\, \left(\varphi(-g_1(x),\lambda_1),...,\varphi(-g_m(x),\lambda_m)\right)^T \quad \in \mathbb{R}^m\,.$$

Probleme: a) Viele NCP-Funktionen φ sind nicht überall differenzierbar. Zur iterativen Lösung von $\Phi(x,\lambda,\mu) = 0$ werden daher im Allgemeinen nicht glatte Newton-Verfahren verwendet.
b) Das Lagrange-Newton-Verfahren ziehlt generell auf die Berechnung eines KKT-Punktes ab, die Funktion $f(x)$ taucht nur indirekt über $\nabla f(x)$ auf. Daher ist das

Verfahren sinnvollerweise nur auf konvexe Probleme anwendbar. Einen Ausweg liefern die SQP-Verfahren.

6.4.3 Das (lokale) SQP-Verfahren

Wir betrachten wieder

$$\min\ f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad h(x) = 0\,,$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ zeimal stetig differenzierbar.
Beim Lagrange-Newton-Verfahren berechneten wir

$$x^{k+1} := x^k + \Delta x^k \quad , \quad \mu^{k+1} := \mu^k + \Delta\mu^k\,,$$

wobei $(\Delta x^k, \Delta\mu^k)$ Lösung von

$$\Phi'(x^k, \mu^k) \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\mu \end{pmatrix} = -\Phi(x^k, \mu^k)$$

ist. Ausformuliert bedeutet dies

$$\begin{aligned} H_k\Delta x + h'(x^k)^T\Delta\mu &= -\nabla_x L(x^k, \mu^k) \\ \nabla h_j(x^k)^T\Delta x &= -h_j(x^k) \qquad , \quad j = 1, ..., p \end{aligned}$$

mit $H_k := \nabla^2_{xx} L(x^k, \mu^k)$.

Es sei nun auch $H_k \approx \nabla^2_{xx} L(x^k, \mu^k)$ zugelassen.
Setzen wir $\mu^+ := \mu^k + \Delta\mu$, so folgt

$$\begin{aligned} H_k\Delta x + h'(x^k)^T\mu^+ &= -\nabla f(x^k) \\ \nabla h_j(x^k)^T\Delta x &= -h_j(x^k) \qquad j = 1, ..., p\,. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Dies sind die KKT-Bedingungen des quadratischen Optimierungsproblems

$$\min_{\Delta x} \left\{ \nabla f(x^k)^T\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^T H_k \Delta x \right\}$$

$$\text{u.d.N.} \quad h_j(x^k) + \nabla h_j(x^k)^T\Delta x = 0 \qquad j = 1, ..., p\,.$$

In der Tat sind mit $y := \Delta x$, $F(y) := \nabla f(x^k)^T y + \frac{1}{2} y^T H_k y$, $H(y) := h(x^k) + \nabla h(x^k)^T y$ die KKT-Bedingungen von

$$\min_y\ F(y) \qquad \text{u.d.N.} \qquad H(y) = 0$$

gegeben durch

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla F(y) + \textstyle\sum_{j=1}^p \mu_j \nabla H_j(y) &= 0 \\ H(y) &= 0 \quad , \end{aligned} \right.$$

was wegen $\nabla F(y) = \nabla f(x^k) + H_k y$ und $\nabla H_j(y) = \nabla h_j(x^k)$ gerade (6.8) entspricht.
Diese Beobachtung motiviert nun für das allgemeine Optimierungsproblem

$$\min\ f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad g(x) \le 0\,,\ h(x) = 0$$

das quadratische Teilproblem

$$\left\{\begin{array}{ll} \min_{\Delta x} & \nabla f(x^k)^T \,\Delta x \,+\, \frac{1}{2}\Delta x^T H_k \Delta x \\ \text{u.d.N.} & g_i(x^k) \,+\, \nabla g_i(x^k)^T \Delta x \,\leq\, 0 \\ & h_j(x^k) \,+\, \nabla h_j(x^k)^T \Delta x = 0 \\ & i = 1, ..., m \;,\; j = 1, ..., p \end{array}\right. \tag{6.9}$$

für die Berechnung von Δx^k zu betrachten, um dann

$$x^{k+1} \;:=\; x^k + \Delta x^k$$

zu iterieren.

Bemerkung: Das Optimierungsproblem (6.9) entspricht einer quadratischen Approximation der Zielfunktion $f(x)$ und linearisierten Restriktionen bei $x = x^k$ (vgl. Newton-Verfahren!) $\rightsquigarrow$ Sequential Quadratic Programming (SQP).

Algorithmus: SQP-Verfahren

(S.0) Wähle $(x^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \,, H_0 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ symmetrisch, setze $k := 0$.

(S.1) Ist (x^k, λ^k, μ^k) KKT-Punkt $\;\to\;$ STOP

(S.2) Berechne eine Lösung $\Delta x^k \in \mathbb{R}^n$ von

$$\begin{array}{ll} & \min \, \nabla f(x^k)^T \,\Delta x \,+\, \frac{1}{2}\Delta x^T H_k \Delta x \\ \text{u.d.N.} & g_i(x^k) \,+\, \nabla g_i(x^k)^T \Delta x \,\leq\, 0 \\ & h_j(x^k) \,+\, \nabla h_j(x^k)^T \Delta x = 0 \\ & i = 1, ..., m \;,\; j = 1, ..., p \end{array}$$

mit zugehörigem Lagrange-Multiplikatoren λ^{k+1} , μ^{k+1}.

(S.3) Setze $x^{k+1} \;:=\; x^k \;+\; \Delta x^k$
Wähle $H_{k+1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch.
Setze $k \leftarrow k+1$; gehe zu (S.1).

Falls $H_k \;=\; \nabla^2_{xx} L(x^k, \lambda^k, \mu^k)$ ist, so sind im Sinne der Lagrange-Newton-Iteration bessere Konvergenzergebnisse zu erwarten. Allerdings muss H_k nicht auf ganz $\mathbb{R}^n$ positiv definit sein; es kann also mehrere KKT-Punkte von (6.9) geben.

Algorithmus: SQP-Verfahren mit $H_k = \nabla^2_{xx} L(x^k, \lambda^k, \mu^k)$

(S.0) Wähle $(x^0, \lambda^0, \mu^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$. Setze $k := 0$.

(S.1) Ist (x^k, λ^k, μ^k) KKT-Punkt $\;\to\;$ STOP

(S.2) Berechne mit $H_k = \nabla^2_{xx} L(x^k, \lambda^k, \mu^k)$ einen KKT-Punkt $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1})$ von

$$\begin{cases} \min \nabla f(x^k)^T(x - x^k) + \frac{1}{2}(x - x^k)^T H_k (x - x^k) \\ \text{u.d.N.} \;\; g_i(x^k) + \nabla g_i(x^k)^T(x - x^k) \le 0 \\ h_j(x^k) + \nabla h_j(x^k)^T(x - x^k) = 0 \\ i = 1, ..., m \;,\; j = 1, ..., p \end{cases} \tag{6.10}$$

Besitzt (6.10) mehrere KKT-Punkte, so wähle $(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1})$, so dass

$$\|(x^{k+1}, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}) - (x^k, \lambda^k, \mu^k)\|$$

minimal ist.

(S.3) Setze $k \leftarrow k + 1$ und gehe zu (S.1).

Satz 6.12 *Sei (x^*, λ^*, μ^*) ein KKT-Punkt von*

$$\min_x f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad g(x) \le 0\,,\; h(x) = 0$$

mit

i) $g_i(x^*) + \lambda_i^* \neq 0$ für alle $i = 1, ..., m$

ii) Die Gradieten $\nabla g_i(x^*)\,,\; i \in I(x^*) = \{i : g_i(x^*) = 0\}$ und $\nabla h_j(x^*)\,,\; j = 1, ..., p$ sind linear unabhänhig (LICQ-Bedingung).

iii) Es ist $d^T \nabla_{xx} L(x^*, \lambda^*, \mu^*) d > 0$ für alle $d \neq 0$ mit $\nabla h_j(x^*)^T d = 0\,,\; j = 1, ...p$ und $\nabla g_i(x^*)^T d = 0\,,\; i \in I(x^*)$.

Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass für $(x^0, \lambda^0, \mu^0) \in U_\varepsilon(x^*, \lambda^*, \mu^*)$ gilt:

a) Das SQP-Verfahren ist wohldefiniert und $\lim_{k\to\infty}(x^k, \lambda^k, \mu^k) = (x^*, \lambda^*, \mu^*)$.

b) Die Konvergenzrate ist superlinear.

c) Sind $\nabla^2 f\,,\; \nabla^2 g_i\;(i = 1, ..., m)$ und $\nabla^2 h_j\;(j = 1, ..., p)$ lokal Lipschitz-stetig, so ist die Konvergenzrate quadratisch.

Bemerkung: a) Die Behauptungen werden plausibel, wenn man folgendes bedenkt: Durch die Forderung i) kann man die in x^* inaktiven Restriktionen vernachlässigen. Das SQP-Verfahren ist daher lokal (mehr oder weniger) äquivalent zum Lagrange-Newton-Verfahren für

$$\min f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad h(x) = 0\,,\; g_i(x) = 0\,,\; i \in I(x^*)\,.$$

Unter den Bedingungen ii) iii) erbt dieses das Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrenns.
b) In der vorliegenden Form ist das SQP-Verfahren nur lokal konvergent (siehe Satz 6.12). Ein global konvergentes SQP-Verfahren erhält man mit Hilfe der l_1-Penalty-Funktion

$$P_1(x; \alpha) = f(x) + \alpha \left(\sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} + \sum_{J=1}^p |h_j(x)| \right),$$

da sich die Lösung Δx^k des quadratischen Problems (6.9) mit einer positiv definiten Matrix H_k unter bestimmten Vortraussetzungen als Abstiegsrichtung von $P_1(x; \alpha)$ interpretieren lässt.

7

Nichtglatte Optimierung

Ziel: Lösungsverfahren für Optimierungsprobleme mit nicht diffenzierbaren Zielfunktionen und Nebenbedingungen.

7.1 Lagrange – Dualität

Wir betrachten das Optimierungsproblem

$$\min f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad x \in X\,,\; g(x) \le 0\,,\; h(x) = 0 \tag{7.1}$$

mit gegebenen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $X \subset \mathbb{R}^n$, $X \neq \emptyset$.
Es sei weiter

$$\mathrm{L}(x, \lambda, \mu) \;:=\; f(x) \;+\; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \;+\; \sum_{j=1}^{p} \mu_i h_i(x)$$

die zu (7.1) gehörende Lagrange-Funktion. (Die Restriktion $x \in X$ wurde dabei nicht aufgenommen.)
Der Sattelpunktsatz 3.18 besagt, dass, falls

$$\mathrm{L}(x^*, \lambda, \mu) \;\le\; \mathrm{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*) \;\le\; \mathrm{L}(x, \lambda^*, \mu^*)$$

für alle $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ mit $\lambda \ge 0$ gilt für ein $(x^*, \lambda^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ mit $\lambda^* \ge 0$, x^* unter bestimmten Bedingungen (siehe Korollar 3.19) eine Lösung von (7.1) mit $X = \mathbb{R}^n$ ist.

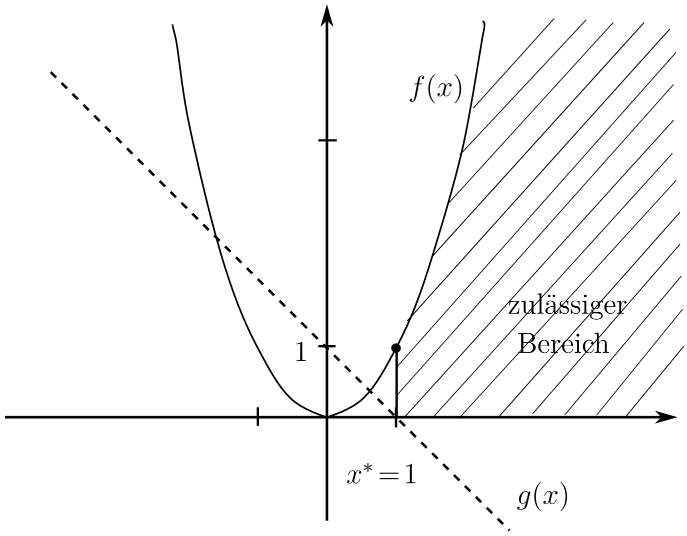
Beispiel: Seien $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, $m = 1$, $p = 0$, $g(x) = 1 - x$. (7.1) hat also die Form

$$\min x^2 \qquad \text{u.d.N} \qquad 1 - x \;\le\; 0\,,$$

Lagrange-Funktion

$$\mathrm{L}(x, \lambda) \;=\; x^2 \;+\; \lambda(1 - x)\,.$$

Was ist ein Sattelpunkt von L ?



Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ fest. Minimiere $\mathrm{L}(\cdot, \lambda)$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{L}(x, \lambda) \;=\; 2x - \lambda \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad x(\lambda) \;=\; \frac{\lambda}{2}$$

Maximiere $\mathrm{L}(x(\lambda), \lambda)$:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{\, L(x(\lambda), \lambda)\right\} \;=\; \frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{\left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 + \lambda\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\right\} \;=\; \frac{\partial}{\partial \lambda}\left\{-\frac{\lambda^2}{4} + \lambda\right\}$$

$$= -\frac{\lambda}{2} + 1 \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \;=\; 2$$

$\Rightarrow \quad (x^*, \lambda^*) \;=\; (1, 2)$ ist ein Sattelpunkt von L.

Diese Betrachtungsweise führt zu

Definition 7.1. *Die Funktion*

$$q(\lambda, \mu) \;:=\; \inf_{x \in X} \mathrm{L}(x, \lambda, \mu)$$

heißt die duale Funktion *von* (7.1)*; das Optimierungsproblem*

$$\max\, q(\lambda, \mu) \qquad \text{u.d.N.} \qquad \lambda \geq 0\,,\; \mu \in \mathbb{R}^p \tag{7.2}$$

heißt das duale Problem (D) *zu* (7.1). (*Lagrange-Dualität*)

Bemerkung: Die Restriktionen von (D) sind sehr einfach. Dafür ist jedoch q unter Umständen aufwändig zu berechnen und im Allgemeinen nicht differenzierbar. Es kann vorkommen, dass

$$q(\lambda, \mu) \;=\; \inf_{x \in X} L(x, \lambda, \mu) \;=\; -\infty$$

ist. Wir definieren daher

$$\mathrm{dom}(q) \;:=\; \{\, (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \;:\; \lambda \geq 0\,,\; q(\lambda, \mu) > -\infty \,\}\,.$$

Beispiele: a) $X = \mathbb{R}^2$ und

$$\min f(x) := x_1^2 - x_2^2 \quad \text{u.d.N.} \quad g(x) := x_1^2 + x_2^2 - 1 \;\leq\; 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad q(\lambda) \;&=\; \inf_{x \in X} L(x,\lambda) \\ &=\; \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \{\, x_1^2 - x_2^2 \;+\; \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)\,\} \\ &=\; \inf_{x \in \mathbb{R}^2} \{\, (1+\lambda)x_1^2 + (-1+\lambda)x_2^2 \;-\; \lambda \,\} \\ &=\; \begin{cases} -\infty & , \text{ falls } 0 \leq \lambda < 1 \\ -\lambda & , \text{ falls } \lambda \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \; dom(q) \;=\; [1, +\infty)$$

Duales Problem:

$$\max \; q(\lambda) \qquad \text{u.d.N} \qquad \lambda \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \lambda^* \;=\; 1 \quad , \quad q(\lambda^*) \;=\; -1$$

Lösung des primalen Problems:

$$x^* \;=\; (0, \pm 1) \quad , \quad f(x^*) = -1$$

b) Das zum linearen Programm

$$\min c^T x \qquad \text{u.d.N.} \qquad Ax = b \;,\; x \geq 0$$

gehörende duale Programm ist

$$\max \; b^T \mu \qquad \text{u.d.N.} \qquad A^T \mu \leq c\,.$$

Beweis als Übung (vergleiche auch Abschnitt 3.2).

Die Ergebnisse in diesem Abschnitt verallgemeinern also die Ergebnisse aus Abschnitt 3.2.

Satz 7.2 (*Schwache Dualität*)
Ist $x \in \mathbb{R}^n$ zulässig für das primale Problem (P) (7.1) und $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ zulässig für das duale Problem (D) (7.2) , so ist

$$q(\lambda, \mu) \;\leq\; f(x)\,.$$

Definieren wir weiter

$$\inf(P) \;:=\; \inf \left\{\, f(x) \,:\, x \in X \,,\, g(x) \leq 0 \,,\, h(x) = 0 \,\right\}$$

$$\sup(D) \;:=\; \sup \left\{\, q(\lambda, \mu) \,:\, \lambda \geq 0 \,,\, \mu \in \mathbb{R}^p \,\right\}$$

so gilt

$$\sup(D) \;\leq\; \inf(P)\,.$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} q(\lambda,\mu) &= \inf_{z\in X} \mathrm{L}(z,\lambda,\mu) \\ &\leq \mathrm{L}(x,\lambda,\mu) \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j h_j(x) \\ &\leq f(x)\,. \end{aligned}$$

□

Im Gegensatz zu linearen Programmen (vgl. Satz 3.28) können - wie in der Übung gezeigt- durchaus Dualitätslücken auftauchen.

Lemma 7.3. *Die duale Funktion q und der Bereich* $\mathrm{dom}(q)$ *besitzen folgende Eigenschaften*
a) $\mathrm{dom}(q)$ *ist konvex.*
b) Die Funktion $q : \mathrm{dom}(q) \to \mathbb{R}$ *ist konkav.*

Beweis: Für $x \in X$, $(\lambda^1,\mu^1) \in \mathrm{dom}(q)$, $(\lambda^2,\mu^2) \in \mathrm{dom}(q)$, $\alpha \in (0,1)$ gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(x,\alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2\,,\, \alpha\mu^1 + (1-\alpha)\mu^2) &= f(x) + \sum_{i=1}^{m} \left[\alpha\lambda_i^1 + (1-\alpha)\lambda_i^2\right] g_i(x) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{p} \left[\alpha\mu_j^1 + (1-\alpha)\,\mu_j^2\right] h_j(x) \\ &= \alpha\,\mathrm{L}(x,\lambda^1,\, u^1) + (1-\alpha)\,\mathrm{L}(x,\lambda^2,\mu^2) \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} &\inf_{x\in X} \mathrm{L}(x,\alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2\,,\, \alpha\mu^1 + (1-\alpha)\mu^2) \\ &\geq \alpha \inf_{x\in X} L(x,\lambda^1,\mu^1) + (1-\alpha) \inf_{x\in X} L(x,\lambda^2,\mu^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \; q\,(\alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2\,,\, \alpha\mu^1 + (1-\alpha)\mu^2) \\ &\geq \alpha\, q\,(\lambda^1,\mu^1) + (1-\alpha)\, q\,(\lambda^2,\mu^2) \end{aligned}$$

Also ist mit $(\lambda^1,\mu^1),(\lambda^2,\mu^2) \in \mathrm{dom}(q)$ auch $(\alpha\lambda^1 + (1-\alpha)\lambda^2\,,\, \alpha\mu^1 + (1-\alpha)\mu^2) \in \mathrm{dom}(q)$. Also ist $\mathrm{dom}(q)$ konvex und q ist auf $\mathrm{dom}(q)$ konkav.

□

Lemma 7.3 besagt, dass das duale Problem

$$(D) \qquad \max\, q(\lambda,\mu) \qquad \text{u.d.N.} \qquad \lambda \geq 0$$

ein konkaves Maximierungsproblem und somit

$$\min\, -q(\lambda,\mu) \qquad \text{u.d.N} \qquad \lambda \geq 0$$

ein konvexes Minimierungsproblem ist ! Jede lokale Lösing von (D) ist also schon globale Lösung. Dies gilt, auch wenn (P) nicht konvex ist !

Definition 7.4. *Wir bezeichnen mit*

$$\operatorname{aff}(X) := \bigcap_{V \in U(X)} V \qquad , \quad X \subseteq \mathbb{R}^n ,$$

wobei $U(X) = \{ V \subset \mathbb{R}^n : X \subseteq V , V$ *ist affiner Unterraum*$\}$ *die* affine Hülle *von* X *und mit*

$$\operatorname{rel} \mathring{X} := \{ x \in X : \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \cap \operatorname{aff}(X) \subseteq X \}$$

das relative Innere *von* X.

Satz 7.5 (*Starke Dualität*)
Es seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvex,* $X \neq \emptyset$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., m$ *konvex und* $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ *sei affin linear, d.h.* $h_j(x) = b_j^T x - \beta_j$, *für* $b_j \in \mathbb{R}^n$, $\beta_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, ..., p$. *Ist* $\inf(P) < \infty$ *und gibt es ein* $\hat{x} \in \operatorname{rel} \mathring{X}$ *mit*

$$g_i(\hat{x}) < 0 \text{ für } i = 1, ..., m$$

und $h(\hat{x}) = 0$ (*Slater-Bedingung*), *so ist das duale Problem lösbar und es gilt die starke Dualität*

$$\sup(D) = \inf(P) .$$

7.2 Das konvexe Subdifferential

Ziel: Verallgemeinerter Ableitungsbegriff

Bezeichnung: Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Menge

$$\mathring{X} = \{ x \in X : \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } U_\varepsilon(x) \subset X \}$$

das *Innere* von X.

Satz 7.6 *Seien* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *konvex und* $f : X \to \mathbb{R}$ *eine konvexe Funktion. Dann ist* f *lokal Lipschitzstetig auf* $\mathring{X}$, *d.h. zu jedem* $x \in \mathring{X}$ *existiert ein* $\delta = \delta(x) > 0$ *und ein* $\mathrm{L} = \mathrm{L}(x) > 0$ *mit*

$$\|f(y_1) - f(y_2)\| \le \mathrm{L}\|y_1 - y_2\|$$

$\forall\, y_1, y_2 \in U_\delta(x)$.

Wir beweisen nun, dass für jedes konvexe $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die Richtungsableitung existiert. Dabei ist die Richtungsableitung von f im Punkt $x \in X$ in Richtung $d \in \mathbb{R}^n$ definiert durch

$$f'(x; d) = \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + td) - f(x)}{t} .$$

Lemma 7.7. *Es seien* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen und konvex und* $f : X \to \mathbb{R}$ *eine konvexe Funktion und* $x \in X$, $d \in \mathbb{R}^n$. *Dann gilt* *a) Der Differenzenquotient*

$$q(t) := \frac{f(x+td)-f(x)}{t}$$

ist monoton fallend für $t \to 0^+$, *also* $q(t_1) \leq q(t_2)\ \forall\ 0 < t_1 < t_2$ *mit* $x+t_2d \in X$.

b) Die Richtungsableitung von f *in* x *in Richtung* d *existiert und es gilt*

$$f'(x;d) = \inf_{t>0} \frac{f(x+td)-f(x)}{t}.$$

Beweis: a) Seien $0 < t_1 < t_2$ und $x + t_2\, d \in X$ $(\Rightarrow\ x + t_1 d \in X)$.
Aus der Konvexität von f folgt

$$f(x+t_1d) = f\left(\frac{t_1}{t_2}(x+t_2d) + (1-\frac{t_1}{t_2})\,x\right) \leq \frac{t_1}{t_2}\, f(x+t_2d) + (1-\frac{t_1}{t_2})f(x)$$

$$\Rightarrow\quad q(t_1) = \frac{f(x+t_1d)-f(x)}{t_1} \leq \frac{f(x+t_2d)-f(x)}{t_2} = q(t_2)$$

$\Rightarrow$ *a*).
b) Seien $t, \tau > 0$ mit $x - \tau d \in X$ und $x + td \in X$ gegeben. Aus der Konvexität von f folgt nun

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{t}{t+\tau}(x-\tau d) + \frac{\tau}{t+\tau}(x+td)\right) \\ &\leq \frac{t}{t+\tau} f(x-\tau d) + \frac{\tau}{t+\tau} f(x+td) \\ &\quad \Rightarrow\ q(t) = \frac{f(x+td)-f(x)}{t} \geq \frac{f(x)-f(x-\tau d)}{\tau} \\ &\quad \Rightarrow\ q(t) \geq \frac{1}{\tau}(f(x)-f(x-\tau d)) \end{aligned}$$

für $t \to 0^+$ und nach Teil a) gilt, dass $q(t)$ für $t \to 0^+$ monoton fallend ist. Also existiert $\lim_{t\to 0^+} q(t) = f'(x;d)$ und

$$f'(x;d) = \lim_{t\to 0^+} q(t) = \inf_{t>0} \frac{f(x+td)-f(x)}{t}$$

□

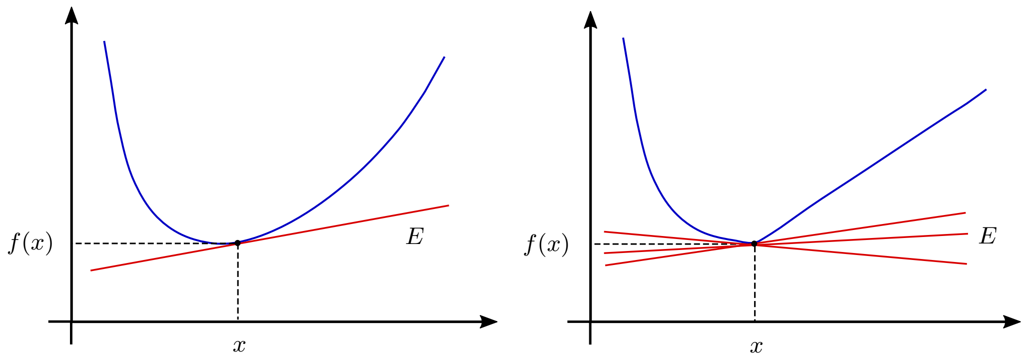
Für konvexe, stetig differenzierbare Funktionen $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gilt nach Lemma 3.13 a)

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y-x) \qquad \forall\, y \in X.$$

Das bedeutet, dass die Tangentialhyperebene durch den Punkt $(x, f(x))$

$$E = \{\, (y,x) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \,:\, z = f(x) + \nabla f(x)^T(y-x)\,\}$$

unterhalb des Graphen von f liegt und es gibt nur diese eine Hyperebene mit dieser Eigentschaft. Ist f in X nicht differenzierbar, kann es unendlich vieler solcher Hyperebenen geben.



f konvex, glatt $\qquad$ f konvex, nicht differenzierbar

Das motiviert die folgende

Definition 7.8. *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : X \to \mathbb{R}$ konvex und $x \in X$. Ein Vektor $s \in \mathbb{R}^n$ heißt* Subgradient *von f in x, wenn*

$$f(y) \;\geq\; f(x) \,+\, s^T(y-x) \qquad \forall\, y \in X \tag{7.3}$$

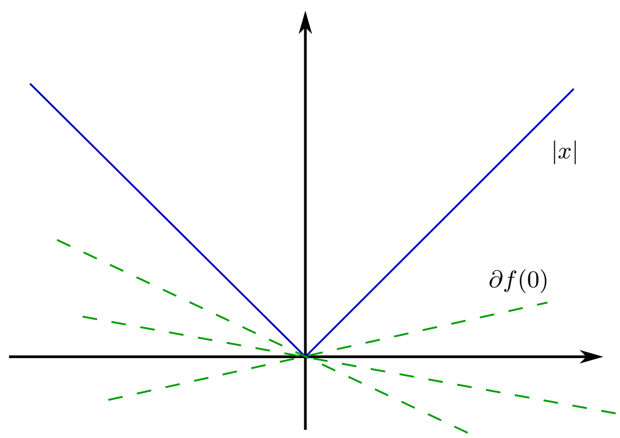
gilt. Die Menge

$$\partial f(x) \;:=\; \{\, s \in \mathbb{R}^n \;:\; s \text{ erfüllt } (7.3)\,\}$$

heißt (konvexes) Subdifferential *von f in x.*

Beispiel 7.9 $X = \mathbb{R}\,,\; f(x) = |x|\,.$
Dann ist

$$\partial f(0) \;=\; \{\, s \in \mathbb{R} \,:\, |y| \;\geq\; sy \quad \forall\, y \in \mathbb{R}\,\} \;=\; [-1, 1]\,.$$



Lemma 7.10. *Ist f in x differenzierbar, so gilt*

$$\partial f(x) \;=\; \{\, \nabla f(x) \,\}\,.$$

Beweis: Ist $s \in \partial f(x)$, so gilt

$$f(x+td) - f(x) \;\geq ts^T d \qquad \forall\, d \in \mathbb{R}^n$$

und für alle $t > 0$ mit $x + td \in X$. Daraus folgt

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \;=\; \nabla f(x)^T d \;\geq\; s^T d$$

für alle $d \in \mathbb{R}^n$.
Setzen wir $d = s - \nabla f(x)$, so ergibt dies

$$\begin{aligned} & \nabla f(x)^T\big(s - \nabla f(x)\big) \;\geq\; s^T\big(s - \nabla f(x)\big) \\ \Leftrightarrow\;& 0 \;\geq\; \|s^2\|^2 \;-\; 2s^T\nabla f(x) \;+\; \|\nabla f(x)\|^2 \\ \Leftrightarrow\;& \|s - \nabla f(x)\|^2 \;=\; 0 \\ \Leftrightarrow\;& s \;=\; \nabla f(x)\,. \end{aligned}$$

Da $\partial f(x) \neq \emptyset$ (Satz 7.11 a)) folgt die Behauptung.

□

Satz 7.11 (*Eigenschaften des Subdifferentials*)
Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f\,:\,X \to \mathbb{R}$ konvex und $x \in X$.
Dann gilt:

a) $\partial f(x)$ ist eine nichtleere, konvexe und kompakte Menge.

b) $\partial f(x) \;=\; \{s \in \mathbb{R}^n \,:\, s^T d \;\leq\; f'(x;d) \quad \forall\, d \in \mathbb{R}^n\}\,.$

c) $f'(x;d) \;=\; \max_{s\in\partial f(x)} s^T d \qquad \forall d \in \mathbb{R}^n\,.$

Beweis: (nur Teile)
b) Nach Lemma 7.7 b) existiert $f'(x;d)\;\;\forall\, d \in \mathbb{R}^n$ und aus dem Beweis von Lemma 7.10 folgt direkt $f'(x;d) \geq s^T d\;\;\forall\, d \in \mathbb{R}^n$.

a) Ist für $x \in X$, $d \in \mathbb{R}^n$, $H_x(d) := \{s \in \mathbb{R}^n : s^T d \leq f'(x;d)\,\}$ ein abgeschlossener, konverxer Halbraum, so ist wegen

$$\partial f(x) \;=\; \bigcap_{d\in\mathbb{R}^n} H_x(d)$$

ebenfalls abgeschlossen und konvex.
Aus b) folgt auch, dass

$$\|s\|_\infty \;\leq\; \max_{i=1,\dots,n} f'(x;\pm e_i)$$

gilt $\forall\, s \in \partial f(x)$ (wobei $e_i \in \mathbb{R}^n$ der i-te Standart Einheitsvektor ist). Demnach ist $\partial f(x)$ auch beschränkt und somit kompakt.

□

Satz 7.12 (*Optimalitätsbedingung*)
Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f : X \to \mathbb{R}$ konvex und $x^* \in X$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) $f(x) \;\geq\; f(x^*) \qquad \forall\, x \in X\,,$

b) $0 \in \partial f(x^*)$,

c) $f(x^*; d) \;\geq\; 0 \qquad \forall\, d \in \mathbb{R}^n$.

Beweis: $a) \Rightarrow c)$: Ist x^* ein globales Minimum von f, so gilt

$$f'(x^*; d) \;=\; \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x^* + td) - f(x^*)}{t} \;\geq\; 0 \qquad \forall\, d \in \mathbb{R}^n$$

$c) \Rightarrow b)$ folgt aus Satz 7.11 b).
$b) \Rightarrow a)$ folgt aus der Definition von $\partial f(x)$.

□

Lemma 7.13. *Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt.*
Dann ist die Bildmenge

$$\partial f(B) \;:=\; \{\, s \in \mathbb{R}^n \;:\; \exists\, x \in B \text{ mit } s \in \partial f(x) \,\}$$

ebenfalls beschränkt.

Beweis: Zu $s \in \partial f(B)$ existiert ein $x_s \in B$ mit

$$f(y) \;\geq\; f(x_s) \,+\, s^T(y - x_s) \qquad \forall\, y \in \mathbb{R}^n\,.$$

Wählen wir $y = x_s + \frac{s}{\|s\|}$, so folgt

$$\|s\| \;\leq\; f\left(x_s + \frac{s}{\|s\|}\right) \,-\, f(x_s)$$

Ist $Q_r \,:=\, \{\, u \in \mathbb{R}^n \,:\, \|u\|_\infty \leq r \,\}$ ein Quader mit $\{x \in \mathbb{R}^n \,:\, \operatorname{dist}(x, B) \;\leq\; 1\,\} \subset Q_r$, so folgt die Behauptung, da f nach Satz 7.6 auf jedem Q_r stetig und damit beschränkt ist.

□

Satz 7.14 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $f_1, ..., f_r : X \to \mathbb{R}$ konvex und $\alpha_1, ..., \alpha_r > 0$. Dann gilt*

$$\partial\left(\sum_{i=1}^r \alpha_i f_i\right)(x) \;=\; \sum_{i=1}^r \alpha_i \partial f_i(x) \qquad \forall\, x \in X\,.$$

Lemma 7.15. *Es sei $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(u) = \max_{i=1,\ldots,m} u_i$*
Dann gilt

$$g'(u; p) \;=\; \max_{i \in I(u)} p_i\,,$$

wobei $I(u) := \{i \in \{1, ..., m\} : u_i = g(u)\}$ ist.

Beweis: Seien $u, p \in \mathbb{R}^m$. Ist $i \notin I(u)$, so ist $u_i < g(u)$ und somit $u_i + tp_i < g(u + tp)$ für $t \to 0$ hinreichend klein, da g stetig ist. Hieraus folgt

$$g(u + tp) \;=\; \max_{i \in I(u)} (u_i + tp_i)$$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{g(u+tp)-g(u)}{t} &= \frac{\max_{i\in I(u)}(u_i+tp_i)-g(u)}{t} \\ &= \max_{i\in I(u)} \frac{(u_i+tp_i)-g(u)}{t} \\ &= \max_{i\in I(u)} \frac{(u_i+tp_i)-u_i}{t} = \max_{i\in I(u)} p_i\,. \end{aligned}$$

□

Bezeichnung: Es ist für $a_1, ..., a_k \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{conv}\{a_1,...,a_k\} := \left\{ s \in \mathbb{R}^n : s = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \text{ mit } \lambda_i \geq 0 \quad \forall\, i\,,\ \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1 \right\}$$

die *konvexe* Hülle der Vektoren $a_1, ..., a_k$.

Satz 7.16 *Seien $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und konvex, $F_i : X \to \mathbb{R}$, $i = 1,...,m$ konvexe, stetig differenzierbare Funktionen und*

$$f(x) := \max_{i=1,...,m} F_i(x) \qquad , \quad x \in X$$

sowie $I(x) := \{i \in \{1,...,m\} : F_i(x) = f(x)\}$
Dann gilt:

a) $f'(x;d) = \max_{i\in I(x)} \nabla F_i(x)^T d\,,$

b) $\partial f(x) = \mathrm{conv}\{\nabla F_i(x) \,:\, i \in I(x)\}\,.$

Lemma 7.15 und Satz 7.16 sind hilfreich, um Subdifferentiale von Funktionen zu berechnen, die sich als Maximum konvexer oder affin-linearer Funktionen schreiben lassen. Zum Beispiel gilt für $f(x) = \|Ax - b\|_\infty$, $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$:

$$\partial f(x) = \mathrm{conv}\{\,\mathrm{sgn}(a_j^T x - b_j)a_j \,:\, j \in J(x)\,\}\,,$$

$$J(x) = \{\, j \in \{1,...,m\} \,:\, |a_j^T x - b_j| = f(x)\,\}\,.$$

Für die duale Funktion

$$q(\lambda,\mu) = \inf_{x\in X} \mathrm{L}(x,\lambda,\mu) = \inf_{x\in X} \big(f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)\big)$$

gilt, dass $-q$ konvex ist auf $\mathrm{dom}(q)$ (Lemma 7.3). Wir können daher den Subgradienten von $-q$ im Funkt (λ,μ) berechnen.

Lemma 7.17. *Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ Funktionen, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $x = x(\lambda,\mu)$ eine Lösung von*

$$\min \big(f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)\big) \qquad \text{u.d.N.} \qquad x \in X$$

(bei festem λ,μ), so ist

$$(-g(x), -h(x)) \in \partial(-q)(\lambda,\mu)\,.$$

Beweis: Nach Voraussetzung gilt $q(\lambda,\mu) = f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x)$. Außerdem gilt für alle $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\beta \in \mathbb{R}^p$

$$q(\alpha,\beta) \;\leq\; f(x) + \alpha^T g(x) + \beta^T h(x)\,.$$

Demnach gilt für alle $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$

$$\begin{aligned} -q(\alpha,\beta) &\geq -f(x) - \alpha^T g(x) - \beta^T h(x) \\ &= -q(\lambda,\mu) + f(x) + \lambda^T g(x) + \mu^T h(x) - f(x) - \alpha^T g(x) - \beta^T h(x) \\ &= -q(\lambda,\mu) + \begin{pmatrix} -g(x) \\ -h(x) \end{pmatrix}^T \left[\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Also $(-g(x), -h(x)) \in \partial(-q)(\lambda,\mu)$.

□

7.3 Die Subgradientenmethode

Gegeben sei

$$\min f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad x \in X \tag{7.4}$$

mit $f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $\emptyset \neq X \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und konvex. Dann ist die metrische Projektion $\mathcal{P}_X : \mathbb{R}^n \to X$ mit

$$\|x - \mathcal{P}_X(x)\|_2 \;=\; \min_{y \in X} \|x - y\|_2$$

wohldefiniert und

$$\|\mathcal{P}_X(x) - \mathcal{P}_X(y)\| \;\leq\; \|x - y\| \qquad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n\,.$$

Ist f differenzierbar , so ist ein mögliches Verfahren zur Lösung von (7.4) das projezierte Abstiegsverfahren

$$x^{k+1} \;:=\; \mathcal{P}_X(x^k - t_k \nabla f(x^k)) \qquad k = 0, 1, ...$$

mit Schrittweite $t_k > 0$.
Für nichtglattes, konvexes f ist daher die Subgradientenmethode definiert durch

$$x^{k+1} \;:=\; \mathcal{P}_X(x^k + t_k d^k) \qquad k = 0, 1, ...$$

mit $d^k = -s^k/\|s^k\|$ und einem $s^k \in \partial f(x^k)$.

Problem: Die Richtung d^k ist im Allgemeinen keine Abstiegsrichtung!

Beispiel 7.18 $X = \mathbb{R}^2$, $f(x) = \max\{-x_1, x_1 + 2x_2, x_1 - 2x_2\}$, $x^k = (1,0)^T$
Nach Satz 7.16 gilt

$$\partial f(x^k) \;=\; \operatorname{conv}\{\, \nabla F_i(x^k)\,,\; i \in I(x^k)\,\}\,,$$

$$F_1(x) = -x_1 \;\;,\;\; F_2(x) = x_1 + 2x_2 \;\;,\;\; F_3(x) = x_1 - 2x_2\,,$$

$$I(x) \;=\; \{\, i = \{1,2,3\} \;:\; F_i(x) = f(x)\,\}\,.$$

$$\begin{aligned}
f(x^k) \quad &= \quad \max\{-1,1,1\} \;=\; 1 \\
&\Rightarrow \quad I(x^k) \;=\; \{2,3\} \\
&\Rightarrow \quad \partial f(x^k) \;=\; \operatorname{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \\
&\Rightarrow \quad s^k \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \;\in\; \partial f(x^k) \\
\text{Wähle} \quad & d = -\frac{s^k}{\|s^k\|} \;=\; -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\
&\Rightarrow \quad f(x^k + t_k d) \\
&= \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - t_k \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \right) \\
&= \quad \max\left\{ -1 + t_k \frac{1}{\sqrt{5}} \,,\, 1 - \frac{5}{\sqrt{5}} t_k \,,\, 1 + \frac{3}{\sqrt{5}} t_k \right\} \\
&= \quad 1 + \frac{3}{\sqrt{5}} t_k \;>\; 1 \;=\; f(x) \qquad \forall\, t_k > 0
\end{aligned}$$

Für das Subgradientenverfahren wird daher eine Hilfsfolge eingeführt.

ALGORITHMUS: (Subgradientenverfahren)

(S.0) Wähle $x^0 \in X$, berechne $m_0 := f(x^0)$, setze $k := 0$.

(S.1) Genügt x^k einem geeigneten Abbruchkriterium $\Rightarrow$ *STOP*

(S.2) Berechne $s^k \in \partial f(x^k)$, setze

$$d^k \;:=\; -\frac{s^k}{\|s^k\|} \quad \text{und}$$

$$x^{k+1} \;:=\; \mathcal{P}_X(x^k + t_k d^k)$$

für eine Schrittweite $t_k > 0$.

(S.3) Berechne $m_{k+1} := \min\{f(x^{k+1}), m_k\}$.

(S.4) Setze $k \leftarrow k+1$ und gehe zu (S.1).

Bemerkung: a) Wir dürfen $s^k \neq 0$ annehmen, da $0 \in \partial f(x^k)$ bedeuten würde, dass x^k ein globales Minimum wäre (Satz(7.12) .
b) Das Subgradientenverfahren ist einfach zu implementieren, falls s^k und $\mathcal{P}_X$ einfach zu bestimmen sind.

Satz 7.19 *Das konvexe Optimierungsproblem besitze eine nichtleere Lösungsmenge und es sei*

$$f^* \;:=\; \min\{\, f(x) \;:\; x \in X \,\}\,.$$

Seien $\{x^k\}$ und $\{m_k\}$ die vom Subgradientenverfahren erzeugten Folgen und möge für $t_k > 0$ die Bedingungen

$$t_k \searrow 0 \qquad \textit{und} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} t_k = +\infty$$

gelten. Dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \; m_k \;=\; f^*\,.$$

Beweis: Nach Konstruktion und Voraussetzung gilt

$$m_{k+1} \;\le\; m_k \quad , \quad m_k \;\ge\; f^* \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}_0$$

$\Rightarrow\;$ $\{m_k\}$ ist konvergent.
Sei $m_* := \lim_{k\to\infty}\; m_k$. Offenbar ist $m_* \;\ge\; f^*$.
Annahme: $m_* \;>\; f^*$.
Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $f^* < \alpha < m_*$ und $\mathcal{L}_\alpha := \{\, x \in \mathbb{R}^n \;:\; f(x) \le\; \alpha \,\}$.
Sei nun $\hat{x} \in X$ mit $f(\hat{x}) < \alpha$ beliebig.
Da $f : X \to \mathbb{R}$ konvex ist, ist $\hat{x} \in \mathring{\mathcal{L}}_\alpha$ (vgl. Satz 7.6).
$\Rightarrow\;$ Es gibt ein $\delta > 0$ mit $x \in \mathcal{L}_\alpha$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ mit $\|x - \hat{x}\| \;\le \delta$.
Definiere

$$z^k \;:=\; \hat{x} \;+\; \delta\frac{s^k}{\|s^k\|}$$

$\Rightarrow\;$ $z^k \in \mathcal{L}_\alpha \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$.
Aus $s^k \in \partial f(x^k)$ folgt andererseits

$$f(z^k) \;\ge\; f(x^k) + (s^k)^T(z^k - x^k)\,.$$

Wegen $f(x^k) \ge m_k > \alpha$ folgt daraus

$$(z^k - x^k)^T s^k \;\le\; f(z^k) - f(x^k) \;\le\; \alpha - m_k \;<\; 0\,.$$

Mit $d^k = -\frac{s^k}{\|s^k\|}$ und $z^k = \hat{x} - \delta d^k$ ergibt dies

$$\begin{aligned}
& -(x^k - z^k)^T\; \frac{s^k}{\|s^k\|} \;<\; 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x^k - \hat{x} + \delta d^k)^T\, d^k \;<\; 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x^k - \hat{x})^T d^k \;<\; -\delta\,.
\end{aligned}$$

Wegen $\|\mathcal{P}_X(x) - \mathcal{P}_X(y)\| \;\le\; \|x - y\| \;\;\forall\, x, y \in X$ gilt

$$\begin{aligned}
\|x^{k+1} - \hat{x}\|^2 \;&=\; \|\mathcal{P}_X(x^k + t_k d^k) - \mathcal{P}_X(\hat{x})\|^2 \\
&\le\; \|x^k + t_k d^k - \hat{x}\|^2 \\
&=\; \|x^k - \hat{x}\|^2 \;+\; t_k^2 \;+\; 2t_k(x^k - \hat{x})^T d^k \\
&<\; \|x^k - \hat{x}\|^2 \;+\; t_k(t_k - 2\delta)\,.
\end{aligned}$$

Wegen $t_k \searrow 0$ gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $t_k \le \delta \;\;\forall\; k \ge k_0$.

$$\Rightarrow\quad \|x^{k+1} - \hat{x}\|^2 \;\le\; \|x^k - \hat{x}\|^2 - \delta t_k \qquad \forall\;\; k \ge k_0\,.$$

$\Rightarrow$ Aufsummieren ergibt

$$\begin{aligned} \delta \sum_{j=k_0}^{r} t_j &\leq \sum_{j=k_0}^{r} \left(\|x^j - \hat{x}\|^2 - \|x^{j+1} - \hat{x}\|^2 \right) \\ &= \|x^{k_0} - \hat{x}\|^2 - \|x^{r+1} - \hat{x}\|^2 \\ &\leq \|x^{k_0} - \hat{x}\|^2 \qquad \forall \ r \geq k_0 \,. \end{aligned}$$

Aber:

$$\lim_{r\to\infty} \sum_{j=k_0}^{r} t_j \ = \ +\infty \qquad \text{Widerspruch !}$$

Die Annahme war also falsch.

□

Problem: Eine mögliche Wahl der Schrittweite ist

$$t_k \ = \ \frac{1}{k+1} \,.$$

Dies führt jedoch im Allgemeinen zu einer sehr langsamen Konvergenz. Ziel ist es daher, eine praktisch brauchbare Wahl von t_k zu finden.

Lemma 7.20. *Es sei x^* eine Lösung von* (7.4) *und $\{x^k\}$ durch das Subgradientenverfahren erzeugt, wobei die Schrittweite t_k die Bedingung*

$$0 \ < \ t_k \ < \ \frac{2(f(x^k) - f(x^*))}{\|s^k\|}$$

erfüllen möge. Dann gilt

$$\|x^{k+1} - x^*\| \ < \ \|x^k - x^*\| \qquad \forall \ k \in \mathbb{N} \,.$$

Bemerkung: Die Folge $\{f(x^k)\}$ ist nicht notwendigerweise monoton fallend !

Beweis: von Lemma 7.20

Sei wieder $d^k \ = \ -\frac{s^k}{\|s^k\|}$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \ \|x^k + t_k d^k - x^*\|^2 \\ &= \ \|x^k - x^*\|^2 - 2t_k (x^* - x^k)^T d^k + t_k^2 \|d^k\|^2 \\ &= \ \|x^k - x^*\|^2 + 2t_k (x^* - x^k)^T \frac{s^k}{\|s^k\|} + t_k^2 \qquad \forall \ k \in \mathbb{N} \,. \end{aligned}$$

Aus $s^k \in \partial f(x^k)$ folgt

$$(x^* - x^k)^T s^k \ \leq \ f(x^*) - f(x^k)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ \|x^k + t_k d^k - x^*\|^2 \ &\leq \ \|x^k - x^*\|^2 + 2t_k \frac{f(x^*) - f(x^k/}{\|s^k\|} + t_k^2 \\ = \ \|x^k - x^*\|^2 + t_k &\left(-2\frac{f(x^k) - f(x^*)}{\|s^k\|} + t_k \right) \qquad \forall \ k \in \mathbb{N} \,. \end{aligned}$$

Für $t_k < \frac{1}{\|s^k\|} 2 \left(f(x^k) - f(x^*) \right)$ gilt

$$t_k \left(-2 \frac{f(x^k) - f(x^*)}{\|s^k\|} + t_k \right) \;<\; 0\,.$$

$\Rightarrow\;\|x^k + t_k d^k - x^*\| \;<\; \|x^k - x^*\|$
$\Rightarrow\;\|x^{k+1} - x^*\| \;=\; \|\mathcal{P}_X(x^k + t_k d^k) - \mathcal{P}_X(x^*)\|$
$\le\;\|x^k + t_k d^k - x^*\| \;<\; \|x^k - x^*\|\,.$

□

Bemerkung: Die Bedingung

$$t_k \;=\; \frac{f(x^k) - f^*}{\|s^k\|}$$

ist in der Regel nicht implementierbar, da $f^* = f(x^*)$ im Allgemeinen nicht bekannt ist. Kennt man f^*, so ist diese Wahl von t_k oft besser als $t_k = \frac{1}{k+1}$.
Die Konvergenz der Subgradientenmethode ist unter den Bedingungen von Satz 7.19 langsamer als R-linear.

$$\big(x^k \to x^* \;\; R\text{-linear} :\Leftrightarrow \; \exists\, q \in (0,1)\,,\; c > 0 \;\text{ mit }\; \|x^k - x^*\| \;\le\; cq^k \text{ für } \; k \to \infty.\big)$$

Ein weiteres Problem besteht darin, ein geeignetes Abbruchkriterium zu finden.

7.4 Schnittebenenmethoden

Wir betrachten wieder das Optimierungsproblem (7.4)

$$\min\; f(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad x \in X\,,$$

$f : X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, konvex, $X \neq \emptyset$.

Annahme: Es sind bereits Iterierte $x^j \in X\,,\; j = 1, ..., k$ mit $s^j \in \partial f(x^j)\,,\; j = 1, ..., k$ vorhanden.
Es gilt also

$$f(x) \;\ge\; f(x^j) + (s^j)^T (x - x^j) \qquad \forall\, j = 1, ..., k$$

und damit

$$f(x) \;\ge\; \max_{j=1,\dots,k} \left\{ f(x^j) + (s^J)^T (x - x^j) \right\}$$

$\Rightarrow$ die stückweise lineare Funktion

$$f_k^{SE}(x) \;:=\; \max_{j=1,\dots,k} \left\{ f(x^j) + (s^j)^T (x - x^j) \right\}$$

kann als untere Approximation an $f(x)$ angesehen werden.

Idee: Ersetze (7.4) durch das Teilproblem

$$\min\; f_k^{SE}(x) \qquad \text{u.d.N.} \qquad x \in X$$

und bestimme dadurch x^{k+1}.

ALGORITHMUS: (Schnittebenenverfahren, cutting plane method)

(S.0) Wähle $x^0 \in X$, setze $k := 0$.

(S.1) Genügt x^k einem geeigneten Abbruchkriterium $\Rightarrow$ *STOP*

(S.2) Berechne $s^k \in \partial f(x^k)$ und setze

$$f_k^{SE}(x) := max_{j=1,\dots,k} \left\{ f(x^j) + (s^j)^T (x - x^j) \right\}$$

(S.3) Berechne eine Lösung x^{k+1} von

$$\min f_k^{SE}(x) \qquad u.d.N \qquad x \in X. \tag{7.5}$$

(S.4) Setze $k \leftarrow k + 1$ und gehe zu (S.1).

Bemerkung: Die Funktionen f_k^{SE} sind konvex, aber nicht differenzierbar. Es stellt sich also die Frage, ob die Probleme (7.5) einfacher als (7.4) zu lösen sind.

Lemma 7.21. *Ein Vektor $x^{k+1} \in \mathbb{R}^n$ löst (7.5) genau dann, wenn $(x^{k+1}, \xi^{k+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ mit $\xi^{k+1} := f_k^{SE}(x^{k+1})$ eine Lösung des Problems*

$$\min \xi \qquad \text{u.d.N.} \qquad f(x^j) + (s^j)^T (x - x^j) \le \xi\,, \qquad j = 1, ..., k \tag{7.6}$$

ist.

Beweis: $'' \Rightarrow ''$ Sei x^{k+1} Lösung von (7.5) und $\xi^{k+1} = f_k^{SE}(x^{k+1})$.
$\Rightarrow$ (x^{k+1}, ξ^{k+1}) ist zulässig für (7.6).
Annahme: (x^{k+1}, ξ^{k+1}) ist nicht optimal für (7.6).
Dann gibt es einen zulässigen Vektor $(\tilde{x}, \tilde{\xi}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ für (7.6) mit $\tilde{\xi} < \xi^{k+1}$. Daraus folgt

$$f_k^{SE}(\tilde{x}) = \max_{j=1,\dots,k} \{ f(x^j) + (s^j)^T (\tilde{x} - x^j) \} \le \tilde{\xi} < \xi^{k+1} = f_k^{SE}(x^{k+1})\,.$$

Wegen $\tilde{x} \in X$ ist das ein Widerspruch dazu, dass x^{k+1} eine Lösung von (7.5) ist.
$'' \Leftarrow ''$ Sei $(x^{k+1}, \xi^{k+1}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ eine Lösung von (7.6) mit $\xi^{k+1} = f_k^{SE}(x^{k+1})$.
Dann ist x^{k+1} zulässig für (7.5).
Annahme: es gibt ein $\tilde{x} \in X$ mit $f_k^{SE}(\tilde{x}) < f_k^{SE}(x^{k+1})$. Dann gilt für $\tilde{\xi} := f_k^{SE}(\tilde{x})$, dass $(\tilde{x}, \tilde{\xi})$ zulässig für (7.6) ist mit

$$\tilde{\xi} = f_k^{SE}(\tilde{x}) < f_k^{SE}(x^{k+1}) = \xi^{k+1}\,,$$

was einen Widerspruch zur Optimalität von (x^{k+1}, ξ^{k+1}) darstellt.

□

Bemerkung: a) Wird X durch lineare Ungleichungen beschrieben, wie z.B. bei dem dualen Problem

$$\max q(\lambda, \mu) \qquad \text{u.d.N.} \qquad \lambda \ge 0\,,\, \mu \in \mathbb{R}^p\,,$$

so ist (7.6) ein lineares Optimierungsproblem und daher viel einfacher zu lösen als (7.4).

b) Zur Veranschaulichung der Schnittebenenmethode: In der Iteration $k+1$ wird die Restriktion

$$\xi \;\geq\; f(x^{k+1}) + (s^{k+1})^T(x - x^{k+1})$$

zu (7.6) hinzugefügt. Würde der aktuelle Punkt (x^{k+1}, ξ^{k+1}) mit $\xi^{k+1} = f_k^{SE}(x^{k+1})$ diese Restriktion erfüllen, so ergäbe dies

$$f(x) \;\geq\; f_k^{SE}(x) \;\geq\; f_k^{SE}(x^{k+1}) \;=\; \xi^{k+1} \;\geq\; f(x^{k+1})$$

und x^{k+1} wäre Lösung von (7.4). Durch die neue Restriktion wird demnach vom zulässigen Bereich von (7.6) ein bestimmter Teil abgeschnitten.

Satz 7.22 *Jeder Häufungspunkt einer von der Schnittebenenmethode erzeugten Folge $\{x^k\}$ ist eine Lösung des konvexen Optimierungsproblems* (7.4).

Beweis: Sei x^* ein Häufungspunkt von $\{x^k\}$ und $\{x^{k_i+1}\}_i$ eine Teilfolge mit $\lim_{i\to\infty} x^{k_i+1} = x^*$. Wegen $x^k \in X \;\forall\; k \in \mathbb{N}$ gilt $x^* \in X$, da X abgeschlossen ist.
$\Rightarrow \quad x^*$ ist zulässig für (7.4). Ferner gilt nach Konstruktion für alle $x \in X$ und $j \in \{0, 1, 2, ..., k\}$:

$$\begin{aligned} f(x) \;&\geq\; f_k^{SE}(x) \;\geq\; f_k^{SE}(x^{k+1}) \\ &= \max_{j=0,..,k} \{\, f(x^j) + (s^j)^T(x^{k+1} - x^j)\,\} \\ &\geq\; f(x^j) + (s^j)^T(x^{k+1} - x^j)\,. \end{aligned}$$

Ersetzen wir k durch k_i und bilden $i \to \infty$, so erhalten wir

$$f(x) \;\geq\; f(x^j) + (s^j)^T(x^* - x^j)$$

für alle $x \in X$ und $j = 0, 1, 2, ...$ Ist $\{x^{j_i}\}_i$ eine Teilfolge mit $\lim_{i\to\infty} = x^*$ und bilden wir $i \to \infty$, so folgt schließlich

$$f(x) \;\geq\; f(x^*) \qquad \forall\, x \in X\,,$$

da die Teilfolge der Subgradienten $\{s^{j_i}\}_i$ nach Lemma 7.13 beschränkt ist (da $\{x^{j_i}\}_i$ konvergent und somit beschränkt ist).

□

Wie sieht eigentlich ein geeignetes Abbruchkriterium aus ?

Lemma 7.23. *Das Problem* (7.4) *besitze mindestens eine Lösung. Seien $\{x^k\}$ die vom Schnittebenenverfahren erzeugte Folge und $\xi^{k+1} := f_k^{SE}(x^{k+1})$*
Gilt für ein $\varepsilon > 0$

$$f(x^{k+1}) \;-\; \xi^{k+1} \;\leq\; \varepsilon$$

so folgt

$$f(x^{k+1}) - f^* \;\leq\; \varepsilon$$

wobei $f^* = \inf\{\, f(x) : x \in X \,\}$ ist.

Beweis: Sei $x^* \in X$ eine Lösung von (7.4). Dann ist $f^* = f(x^*)$. Wegen $s^j \in \partial f(x^j)$ gilt außerdem

$$f(x^j) + (s^j)^T(x^* - x^j) \;\leq\; f(x^*) \qquad \forall\, j \in \{0, ..., k\}\,.$$

$\Rightarrow$ (x^*, f^*) ist zulässig für (7.6).
Nach Lemma 7.21 ist aber (x^{k+1}, ξ^{k+1}) Lösung von (7.6)
$\Rightarrow$ $\xi^{k+1} \leq f^*$
$\Rightarrow$ $f(x^{k+1}) - f^* \leq f(x^{k+1}) - \xi^{k+1} \leq \varepsilon$

□

Lemma 7.23 legt das Abruchkriterium

$$f(x^{k+1}) - \xi^{k+1} \leq \varepsilon$$

mit $\xi^{k+1} = f_k^{SE}(x^{k+1})$ nahe (bzw. (x^{k+1}, ξ^{k+1}) Lösung von (7.6)).

Nachteile der Schnittebenenmethode:

a) Die Teilprobleme (7.5) können unlösbar sein.
Ausweg: Ersetze die Zielfunktion durch

$$f_k^{SE}(x) + \frac{1}{2\gamma_k} \|x - x^k\|^2 .$$

So gibt es immer eine eindeutig bestimmte Lösung.
$\Rightarrow$ Proximal-Cutting-Plane-Methode

b) Nach jeder Iteration wird in (7.6) eine Restriktion hinzugefügt.
$\Rightarrow$ Probleme werden immer komplexer.

7.5 Bundle-Methoden

Ein Problem der Subgradientenmethode besteht datin, dass

$$d^k = -\frac{s^k}{\|s^k\|} \quad \text{mit} \quad s^k \in \partial f(x^k)$$

keine Abstiegsrichtung zu sein braucht. Außerdem ist unter Umständen

$$f(x^k + t_k d^k) < f(x^k)$$

nur für sehr kleine $t_k > 0$.

$\Rightarrow$ Lockerung des Subdifferentialbegriffs

Definition 7.24. *Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \geq 0$. Die Menge*

$$\partial_\varepsilon f(x) := \{ s \in \mathbb{R}^n : f(y) \geq f(x) + s^T(y - x) - \varepsilon \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^n \}$$

heißt ε-Subdifferential *von f in x.*

Offenbar gilt:

$$\partial f(x) = \partial_0 f(x)\,,$$

$$\partial f(x) \subset \partial_\varepsilon f(x) \qquad \forall\, \varepsilon \geq 0\,.$$

Beispiel: $f(x) = |x| \;\Rightarrow$

$$\partial_\varepsilon f(x) = \begin{cases} [-1,1] & ,\ |x| \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ [1-\frac{\varepsilon}{x},1] & ,\ x > \frac{\varepsilon}{2} \\ [-1,-1-\frac{\varepsilon}{x}] & ,\ x < -\frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Definition 7.25. *Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $x, d \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon \geq 0$.*
Dann heißt

$$f'_\varepsilon(x;d) := \inf_{t>0} \frac{f(x+td) - f(x) + \varepsilon}{t}$$

die ε-Richtungsableitung *von f in x in Richtung d.*

Bemerkung: Man beachte, dass in Definition 7.25 inf nicht durch lim ersetzt werden darf.

Lemma 7.26. *Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $x, d \in \mathbb{R}^n$.*
Dann gilt:

a) $f'(x;d) = f'_o(x;d)$,

b) $f'(x;d) \leq f'_\varepsilon(x;d) \qquad \forall\, \varepsilon \geq 0$.
Insbesondere ist $f'_\varepsilon(x;d)$ endlich für alle $\varepsilon \geq 0$.

Beweis: Teil a) folgt direkt aus Lemma 7.7. Außerdem gilt

$$f'(x;d) \leq \frac{f(x+td) - f(x)}{t} \leq \frac{f(x+td) - f(x) + \varepsilon}{t}$$

für alle $t > 0$ und $\varepsilon \geq 0 \;\Rightarrow\;$ b).

□

Satz 7.27 *Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt*

a) $\partial_\varepsilon f(x)$ *ist eine nichtleere, konvexe und kompakte Menge.*

b) $\partial_\varepsilon f(x) = \{\, s \in \mathbb{R}^n \,:\, s^T d \leq f'_\varepsilon(x;d) \quad \forall\, d \in \mathbb{R}^n \,\}$.

c) $f'_\varepsilon(x;d) = \max_{s \in \partial_\varepsilon f(x)} s^T d \quad \forall\, d \in \mathbb{R}^n$.

Satz 7.28 (*$\varepsilon-$optimale Punkte*)
Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $x^* \in \mathbb{R}^n$.
Dann sind äquivalent:

a) $f(x^*) \leq \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \varepsilon$, *d.h. x^* ist ein $\varepsilon-$optimaler Punkt.*

b) $0 \in \partial_\varepsilon f(x^*)$.

c) $f'_\varepsilon(x^*;d) \;\geq\; 0 \quad \forall\, d \in \mathbb{R}^n\,.$

Das $\varepsilon-$Subdifferential $\partial_\varepsilon f(x)$ enthält Informationen des Subdifferentials $\partial f(y)$ für Punkte y aus einer Umgebung von x.

Satz 7.29 *Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $x \in \mathbb{R}^n$ und $\rho > 0$. Dann gibt es ein von x unabhängiges $\varepsilon > 0$ mit*

$$\bigcup_{y \in \overline{U_\rho(x)}} \partial f(y) \;\subseteq\; \partial_\varepsilon f(x)$$

Dabei ist $\overline{U_\rho(x)} = \{\, y \in \mathbb{R}^n : \|x - y\| \leq \rho\,.$

Beweis: Da f nach Satz 7.6 lokal Lipschitz-stetig und $\overline{U_\rho(x)}$ kompakt ist, gibt es ein $L > 0$ mit

$$|f(x^1) - f(x^2)| \;\leq\; L\, \|x^1 - x^2\| \qquad \forall\, x^1, x^2 \in \overline{U_\rho(x)}\,.$$

Nach Lemma 7.13 ist $\partial f(\overline{U_\rho(x)})$ zudem beschränkt, also gibt es ein $\eta > 0$ mit

$$\bigcup_{y \in \overline{U_\rho(x)}} \partial f(y) \;\subseteq\; \overline{U_\eta(0)}\,.$$

Sei nun $\varepsilon := (L + \eta)\rho$. Dann gilt für alle $y \in \overline{U_\rho(x)}\,,\ s \in \partial f(y)\,,\ z \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}
s^T(z - x) \;&=\; s^T(z - y) \;+\; s^T(y - x) \\
&\leq\; f(z) - f(y) \;+\; s^T(y - x) \\
&=\; f(z) - f(x) + f(x) - f(y) + s^T(y - x) \\
&\leq\; f(z) - f(x) \;+\; L\|x - y\| \;+\; \|s\|\|y - x\| \\
&\leq\; f(z) - f(x) \;+\; (L + \eta)\rho \\
&=\; f(z) - f(x) + \varepsilon
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad s \in \partial_\varepsilon f(x)\,.$

□

Wir betrachten nun das Problem

$$\min\ f(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n \tag{7.7}$$

für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex.
Für die Suchrichtung $d^k \in \mathbb{R}^n$ in

$$x^{k+1} \;:=\; x^k \;+\; t_k\, d^k$$

gilt bei differenzierbarem $f(x)$ idealerweise $\nabla f(x^k)^T d^k < 0$. Z.B. kann

$$\min\ \nabla f(x^k)^T\, d \qquad \text{u.d.N.} \qquad \|d\| \leq 1$$

als Bestimmung für die ideale Suchrichtung dienen. Die Lösung ist

$$d^k \;=\; -\,\frac{\nabla f(x^k)}{\|\nabla f(x^k)\|}\;.$$

Wegen $\nabla f(x^k)^T d = f'(x^k; d)$ liegt es nahe für nichtglatte f

$$\min\ f'(x^k; d) \qquad \text{u.d.N.} \qquad \|d\| \leq 1 \tag{7.8}$$

als Suchrichtungsproblem zu verwenden.
Satz 7.11 besagt

$$f'(x^k; d) \;=\; \max_{s \in \partial f(x^k)} s^T d\,,$$

wodurch (7.8) übergeht in

$$\min_{\|d\| \leq 1}\ \max_{s \in \partial f(x^k)} s^T d\,.$$

Da die Mengen $\{d : \|d\| \leq 1\}$, $\{s : s \in \partial f(x^k)\}$ nichtleer, konvex und kompakt sind, gilt die Äquivalenz hiervon zu

$$\max_{s \in \partial f(x^k)}\ \min_{\|d\| \leq 1} s^T d\,. \tag{7.9}$$

Für gegebendes $s \in \partial f(x^k)$ wird $\min\{s^T d : \|d\| \leq 1\}$ durch

$$d \;=\; -\frac{s}{\|s\|}$$

gelöst. So reduziert sich 7.9 auf

$$\max_{s \in \partial f(x^k)} (-\|s\|) \;\;\Leftrightarrow\;\; -\min_{s \in \partial f(x^k)} \|s\|\,.$$

$\Rightarrow$ Zu finden ist also ein Element aus $\partial f(x^k)$ mit minimaler Norm.
Als Suchrichtung wäre also d^kgeeignet mit

$$d^k \;:=\; -g^k \quad , \quad g^k \;:=\; \mathrm{P}_{\partial f(x^k)}(0)\,.$$

Bei der Subgradientenmethode war hingegen $d^k \in -\partial f(x^k)$ beliebig ! Da das Subdifferential keine Information aus der Nachbarschaft von x^k verwendet, setzen wir

$$g^k \;:=\; \mathrm{P}_{\partial_\varepsilon f(x^k)}(0)$$

($\partial_\varepsilon f(x^k)$ ist nach Satz 7.27 nichtleer, konvex und kompakt).

Lemma 7.30. *Seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, $x^k \in \mathbb{R}^n$ und $\varepsilon \geq 0$. Ist $0 \notin \partial_{\varepsilon f(x^k)}$, so gilt für die Suchrichtung $d^k := -g^k$ mit*

$$g^k \;:=\; \mathrm{P}_{\partial_\varepsilon f(x^k)}(0)$$

die Ungleichung

$$\inf_{t>0}\ f(x^k + t\,d^k) \;<\; f(x^k) - \varepsilon\,.$$

Beweis: Die metrische Projektion $\mathrm{P}_X : \mathbb{R}^n \to X$ lässt sich äquivalent auch durch

$$(\,\mathrm{P}_X(x) - x)^T(y - \mathrm{P}_X(x)\,) \;\geq\; 0 \qquad \forall\, y \in X$$

ausdrücken. Demnach gilt

$$(\,g^k - 0)^T(s - g^k) \;\geq\; 0 \qquad \forall\, s \in \partial_\varepsilon f(x^k)\,,$$

$$\Leftrightarrow\;\; (g^k)^T g^k \;\leq\; s^T g^k \qquad \forall\, s \in \partial_\varepsilon f(x^k)\,.$$

Aus $d^k = -g^k$ folgt dann

$$(g^k)^T d^k \;\geq\; s^T d^k \qquad \forall s \in \partial_\varepsilon f(x^k)\,.$$

Mit Satz 7.27 erhält man

$$f'_\varepsilon(x^k; d^k) \;=\; \max_{s \in \partial_\varepsilon f(x^k)} s^T d^k \;\le\; (g^k)^T d^k \;=\; -\|g^k\|^2 \;<\; 0\,,$$

da nach Vorraussetzung $0 \notin \partial_\varepsilon f(x^k)$. Also gibt es ein $t_k > 0$ mit

$$\frac{f(x^k + t_k\, d^k) - f(x^k) + \varepsilon}{t_k} \;<\; 0$$

$$\Rightarrow\; \inf_{t>0} f(x^k + t\, d^k) \;\le\; f(x^k + t_k d^k) \;<\; f(x^k) - \varepsilon\,.$$

□

ALGORITHMUS: (ε-Subdifferential-Verfahren)

(S.0) Wähle $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$, setze $k := 0$.

(S.1) Genügt x^k einem Abbruchkriterium $\Rightarrow$ *STOP*

(S.2) Berechne $g^k \;:=\; \mathrm{P}_{\partial_\varepsilon f(x^k)}(0)$ und setze $d^k := -g^k$.

(S.3) Berechne $t_k > 0$ mit
$f(x^k + t_k d^k) \;=\; \min_{t>0}\, f(x^k + td^k)$.

(S.4) Setze $x^{k+1} \;:=\; x^k + t_k d^k$, $\quad k \leftarrow k+1$ und gehe zu (S.1).

Satz 7.31 (*Konvergenzeigenschaft*)
Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $f^* := \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ endlich. Dann gibt es ein $k_0 \in \mathbb{N}_0$ mit

$$f(x^{k_0}) \;\le\; \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \,+\, \varepsilon\,,$$

x^{k_0} ist also ein $\varepsilon-$optimaler Punkt.

Beweis: Da $f(x) \ge f^* > -\infty$ (nach Vorraussetzung) und nach Lemma 7.30

$$f(x^{k+1}) \;<\; f(x^k) \,-\, \varepsilon$$

gilt, muss das Verfahren nach endlich vielen Schritten abbrechen.

□

Problem: Das ε-Subdifferential $\partial_\varepsilon f(x^k)$ muss vollständig bekannt sein. Dies ist nicht der Fall und die Berechnung von g^k im Allgemeinen sehr aufwändig.

Gesucht: Geeignete Approximation von $\partial_\varepsilon f(x^k)$.

Gemäß Satz 7.29 kann $\partial_\varepsilon f(x^k)$ durch $s \in \partial f(y)$ für $y \in \overline{U_\rho(x^k)}$ approximiert werden.

Idee: Verwende den neu zu berechnenden Subgradienten $s^k \in \partial f(x^k)$ und die bereits vorhandenen $s^j \in \partial f(x^j)$, $j = 0, 1, ..., k-1$, um $\partial_\varepsilon f(x^k)$ mit diesem Bündel (engl. bundle) an Informationen zu approximieren.

Seien hierzu λ_j Zahlen mit $\lambda_j \geq 0\,,\, j = 0,...,k\,,$ und $\sum_{j=0}^{k} \lambda_j = 1$. Wegen $s^j \in \partial f(x^j)$ gilt für den Linearisierungsfehler

$$\alpha_j^k \;:=\; f(x^k) \,-\, f(x^j) \,-\, (s^j)^T(x^k - x^j)$$

für $j = 0,...,k$ offenbar

$$\alpha_j^k \geq 0\,,\; j = 0,...,k\,,\; \text{und}\; \alpha_k^k = 0\,.$$

Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $j = 0,...,k$ gilt

$$\begin{aligned} (s^j)^T\,(x - x^k) \;&=\; (s^j)^T\,(x - x^j) \,-\, (s^j)^T\,(x^k - x^j) \\ &\leq\; f(x) - f(x^j) - (s^j)^T\,(x^k - x^j) \\ &=\; f(x) - f(x^k) + \alpha_j^k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; \sum_{j=0}^{k} \lambda_j (s^j)^T\,(x - x^k) \;\leq\; f(x) - f(x^k) + \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \alpha_j^k \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow\; \sum_{j=0}^{k} \lambda_j s^j \;\in\; \partial_\varepsilon f(x^k)\,,\;\text{ falls }\; \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \alpha_j^k \;\leq\; \varepsilon \;\text{ ist.}$$

Sei daher

$$G_\varepsilon^k \;:=\; \left\{ \sum_{j=0}^{k} \lambda_j s^j \;:\; \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \alpha_j^k \;\leq\; \varepsilon\,,\; \lambda_j \geq 0\,,\; \sum_{j=0}^{k} \lambda_j = 1\,,\; j = 0,...,k \right\}$$

Es ist $G_\varepsilon^k \neq \emptyset$ konvex und kompakt. Wir haben bewiesen, dass

$$G_\varepsilon^k \;\subseteq\; \partial_\varepsilon f(x^k)$$

gilt. G_ε^k kann daher als innere Approximation an $\partial_\varepsilon f(x^k)$ angesehen werden. Es liegt daher nahe

$$g^k \;:=\; P_{G_\varepsilon^k}(0)$$

zu setzen.
Den Vektor $(\lambda_0^k, ..., \lambda_k^k) \in \mathbb{R}^{k+1}$, der

$$g^k \;=\; \sum_{j=0}^{k} \lambda_j^k s^j$$

festlegt, kann mit dem folgenden quadratischen Problem berechnet werden.

$$\left\{ \min \left\{ \tfrac{1}{2} \left\| \sum_{j=0}^{k} \lambda_j s^j \right\|^2 \,+\, \sum_{j=0}^{k} \lambda_j \alpha_j^k \right\} \quad \text{u.d.N.} \quad \sum_{j=0}^{k} \lambda_j = 1\;,\; \lambda_j \geq 0\;,\; j = 0,...,k \right\}$$

ALGORITHMUS: (ε-Bundle-Verfahren)

(S.0) Wähle $x^1 \in \mathbb{R}^n\,,\, s^1 \in \partial f(x^1)\,,\, \sigma \in (0,1)$.
Setze $y^1 := x^1\;,\; g^0 := s^1\;,\; \alpha_1^1 := \varepsilon_0 := 0\;,\; k := 1\;,\; K := \emptyset\;,\; J_k = \{1\}$

(S.1) Berechne λ_j^k , $j \in J_k$ durch

$$\left\{ \min \left\{ \frac{1}{2} \left\| \sum_{j\in J_k} \lambda_j s^j \right\|^2 + \sum_{j\in J_k} \lambda_j \alpha_j^k \right\} \quad \text{u.d.N.} \quad \sum_{j\in J_k} \lambda_j = 1 \;,\; \lambda_j \geq 0 \;,\; j \in J_k \right\}$$

(S.2) Setze

$$\begin{aligned} g^k &:= \sum_{j\in J_k} \lambda_j^k s^j \;, \\ \varepsilon_k &:= \sum_{j\in J_k} \lambda_j^k \alpha_j^k \;, \\ d^k &:= -g^k \;, \\ \xi^k &:= -\|g^k\|^2 - \varepsilon_k \;. \end{aligned}$$

(S.3) Ist $\xi^k = 0 \quad \Rightarrow \quad$ STOP

(S.4) Setze $y^{k+1} := x^k + d^k$ und berechne $s^{k+1} \in \partial f(y^{k+1})$.

Falls $f(x^k + d^k) \;\leq\; f(x^k) + \sigma \xi^k$,
so setze

$$\begin{aligned} t_k &:= 1 \\ x^{k+1} &:= x^k + d^k \\ K &\leftarrow K \cup \{k\} \end{aligned}$$

andernfalls setze $t_k := 0 \quad , \quad x^{k+1} := x^k$.

(S.5) Setze

$$\begin{aligned} J_k^p &:= \{\, j \in J_k \;:\; \lambda_j^k > 0 \,\} \,, \\ J_{k+1} &:= J_k^p \cup \{k+1\} \,, \\ \alpha_j^{k+1} &:= f(x^{k+1}) - f(y^j) - (s^j)^T (x^{k+1} - y^j) \qquad \text{für } \; j \in J_{k+1} \,. \end{aligned}$$

(S.6) Setze $k \leftarrow k+1$, gehe zu (S.1).