

UNIVERSITÄT DES SAARLANDES
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK
FACHRICHTUNG MATHEMATIK

ANALYSIS I

SKRIPT

WINTERSEMESTER 2023/24

(VERSION VOM 9. FEBRUAR 2024)



PROF. DR. ROLAND SPEICHER

MIT DER UNTERSTÜTZUNG VON
DR. JOHANNES HOFFMANN

Inhaltsverzeichnis

1. Beweisprinzipien	3
2. Sprache der Mathematik	10
3. \mathbb{R} als angeordneter Körper	18
4. Folgen	24
5. Vollständigkeitsaxiom	33
6. Konvergenzkriterien für Reihen	41
7. Die Exponentialfunktion	48
8. Teilmengen von \mathbb{R}	53
9. Funktionen und Stetigkeit	57
10. Sätze über stetige Funktionen	63
11. Logarithmus und allgemeine Potenz	66
12. Komplexe Zahlen	70
13. Trigonometrische Funktionen	77
14. Differentiation	83
15. Lokale Extrema und Mittelwertsatz	91
16. Integration	97
17. Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen	111
A. Das griechische Alphabet	120
B. Summen- und Produktzeichen	121
Dramatis personae	122
Index	123
Symbolverzeichnis	126

1. Beweisprinzipien

Definition 1.1 (Aussagenlogik). Mathematische Aussagen können wahr oder falsch sein, aber niemals beides gleichzeitig. Aus gegebenen Aussagen A und B kann man neue Aussagen bilden:

- (i) *Negation*: $\neg A$, nicht A
- (ii) *Konjunktion*: $A \wedge B$, A und B
- (iii) *Disjunktion*: $A \vee B$, A oder B ¹
- (iv) *Implikation*: $A \Rightarrow B$, aus A folgt B
- (v) *Äquivalenz*: $A \Leftrightarrow B$, A ist äquivalent zu B , A genau dann wenn B , A gdw. B

Die Wahrheitswerte der neuen Aussagen veranschaulicht man durch eine Wahrheitstafel:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Daraus erhält man folgende Regeln:

- $A \wedge \neg A$ ist immer falsch.
- $A \vee \neg A$ ist immer wahr.
- $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$. (doppelte Verneinung)
- $A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$. (\wedge ist kommutativ)
- $A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$. (\vee ist kommutativ)
- $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$. (\wedge ist assoziativ)
- $A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$. (\vee ist assoziativ)
- $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$.
- $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$.
- $(A \vee B) \wedge C \Leftrightarrow (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$. (\wedge ist distributiv über \vee)
- $(A \wedge B) \vee C \Leftrightarrow (A \vee C) \wedge (B \vee C)$. (\vee ist distributiv über \wedge)
- $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B$.

Insbesondere ist "Wenn $1 + 1 = 3$, dann ist Paris die Hauptstadt von Deutschland" eine wahre Aussage: Aus einer falschen Aussage kann man alles beweisen.

Definition 1.2 (Axiome). Grundlegende Aussagen, die nicht weiter zurückgeführt werden, heißen *Axiome*. Axiome sind die a priori gegebenen wahren Aussagen der Mathematik. Alle anderen Aussagen müssen darauf zurückgeführt, *bewiesen*, werden.

¹Dies ist kein entweder-oder, sondern ein einschließendes oder.

Beweisprinzip 1.3 (Direkter Beweis). Beweise Aussage B ausgehend von wahrer Aussage A , typischerweise durch Folge von Implikationen

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_n \Rightarrow B,$$

wobei Axiome und schon bewiesene Aussagen benutzt werden.

Satz 1.4. (i) Das Quadrat einer geraden Zahl ist eine gerade Zahl, das heißt

$$n \text{ gerade} \Rightarrow n^2 \text{ gerade.}$$

(ii) Das Quadrat einer ungeraden Zahl ist ungerade.

Beweis. Wir beweisen hier nur die erste Aussage, die zweite funktioniert analog und wird in den Übungen bewiesen: Sei $n \in \mathbb{N}^2$ gerade. Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n = 2k$. Es folgt

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \cdot (2k^2),$$

wobei $2k^2 \in \mathbb{N}$. Also ist n^2 gerade. □

Beweisprinzip 1.5 (Indirekter Beweis durch Kontraposition). Es gilt

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg A \vee B \Leftrightarrow \neg(\neg B) \vee \neg A \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A).$$

Somit können wir $A \Rightarrow B$ beweisen, indem wir $\neg B \Rightarrow \neg A$ zeigen.

Satz 1.6. (i) Ist das Quadrat einer natürlichen Zahl ungerade, so ist die Zahl selbst ungerade.

(ii) Ist das Quadrat einer natürlichen Zahl gerade, so ist die Zahl selbst gerade.

Beweis. Wiederum beweisen wir hier nur die erste Aussage, die zweite folgt wieder analog: Sei $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist

$$n^2 \text{ ungerade} \Rightarrow n \text{ ungerade.}$$

Dies ist aber äquivalent zu

$$\underbrace{\neg(n \text{ ungerade})}_{\Leftrightarrow n \text{ gerade}} \Rightarrow \underbrace{\neg(n^2 \text{ ungerade})}_{\Leftrightarrow n^2 \text{ gerade}},$$

was wir bereits in [Satz 1.4](#) gezeigt haben. □

Beweisprinzip 1.7 (Indirekter Beweis durch Widerspruch). Beweise A , indem wir zeigen, dass aus $\neg A$ ein Widerspruch folgt.

Satz 1.8. $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl, das heißt, es gibt keinen Bruch $\frac{a}{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}$, so dass $(\frac{a}{b})^2 = 2$.

²Diese Schreibweise wird im folgenden Kapitel genauer und allgemeiner definiert. Zunächst betrachten wir $n \in \mathbb{N}$ einfach nur als praktische Abkürzung für "sei n eine natürliche Zahl".

Beweis. Angenommen, es gibt $a, b \in \mathbb{N}$ mit $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$. Weiterhin können wir annehmen, dass der Bruch vollständig gekürzt ist. Es folgt

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^2}{b^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 \text{ gerade.}$$

Aus **Satz 1.6** wissen wir, dass dann auch a gerade ist, also gibt es $p \in \mathbb{N}$ mit $a = 2p$. Es folgt

$$a^2 = 4p^2 \quad \Rightarrow \quad 4p^2 = a^2 = 2b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2p^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 \text{ gerade} \stackrel{1.6}{\Rightarrow} b \text{ gerade.}$$

Also sind a und b gerade im Widerspruch dazu, dass $\frac{a}{b}$ vollständig gekürzt ist. \square

Beweisprinzip 1.9 (Vollständige Induktion). Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $A(n)$ eine Aussage. Ferner gelte:

- Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.
- Induktionsschluss: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung 1.10. Folgende Punkte sollten bei der vollständigen Induktion beachtet werden:

- Die Induktion muss verankert werden: $A(1)$ muss bewiesen werden.
- Die Folgerung $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ muss für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten, insbesondere muss man überprüfen, dass die Argumente auch für kleines n gültig sind.
- Die Induktion kann statt bei 1 auch bei jedem anderen $n_0 \in \mathbb{N}$ starten: Gilt $A(n_0)$ sowie $A(n) \rightarrow A(n+1)$ für alle $n \geq n_0$, so ist $A(n)$ für alle $n \geq n_0$ wahr - für alle $n < n_0$ wird allerdings keine Aussage getroffen!

Notation 1.11. Seien a_1, \dots, a_n Zahlen. Dann setzen wir

$$\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^n a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n,$$

wobei man k auch den *Laufindex* der *Summe* beziehungsweise des *Produkts* nennt. (Das Symbol “:=” besagt, dass die linke Seite durch die rechte Seite definiert wird.)

Bemerkung 1.12. (i) Der Laufindex k ist nur ein beliebiger Platzhalter, daher gilt

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{r=1}^n a_r \quad \text{sowie} \quad \prod_{k=1}^n a_k = \prod_{r=1}^n a_r$$

(ii) Man kann auch andere Grenzen nehmen, zum Beispiel

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{oder} \quad \prod_{k=-2}^3 a_k = a_{-2} \cdot a_{-1} \cdot a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3.$$

(iii) Für alle $c \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{j=m}^n a_j = \sum_{j=m+c}^{n+c} a_{j-c} = \sum_{j=m-c}^{n-c} a_{j+c}$$

und analog auch für Π statt Σ . Man nennt dies eine *Indexverschiebung*.

(iv) Als Konvention vereinbaren wir

$$\sum_{k=1}^0 a_k := 0 \quad \text{sowie} \quad \prod_{k=1}^0 a_k := 1.$$

Satz 1.13 (Gaußsche Summenformel, “Kleiner Gauß”). Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Induktionsbeweis. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

- Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt

$$\sum_{k=1}^1 k = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2},$$

also ist die Aussage für $n = 1$ wahr.

- Induktionsschluss $n \rightarrow n + 1$: Sei die Aussage wahr für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$, also

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(dies nennt man auch die *Induktionsvoraussetzung* oder kurz *IV*). Zu zeigen ist, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt, also dass

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Dies gilt, da

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \left(\sum_{k=1}^n k \right) + n + 1 \stackrel{\text{IV}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion gilt die Aussage also für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Zu beachten ist hier, dass man für den Induktionsbeweis das Ergebnis bereits vorher kennen oder zumindest vermuten muss.

“Intelligenter Beweis” nach Gauß, ca. 1786 im Alter von neun Jahren. Es gilt sowohl

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

als auch

$$\sum_{k=1}^n k = n + (n-1) + \dots + 2 + 1.$$

Fasst man die Summanden zusammen, die jeweils übereinander stehen, so erhält man

$$\begin{aligned} 2 \cdot \sum_{k=1}^n k &= (1+n) + (2+n-1) + \dots + (n-1+2) + (n+1) \\ &= (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) \\ &= n \cdot (n+1), \end{aligned}$$

da die Summe n Summanden enthält. Nach Division durch 2 erhält man somit die Formel

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}. \quad \square$$

Notation 1.14. (i) Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die *Fakultät*

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n.$$

Weiterhin setzen wir $0! := 1$.

(ii) Für $0 \leq k \leq n$ definieren wir den *Binomialkoeffizienten*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!},$$

gesprochen “ n über k ”. Beachte $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n}{n}$.

Lemma 1.15. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq k \leq n-1$ gilt

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Beweis. Nachrechnen! □

Satz 1.16 (Binomischer Lehrsatz). Für alle $n \in \mathbb{N}$ und beliebige Zahlen x, y gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage per vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$:

- Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt

$$(x+y)^1 = x+y = y+x = \binom{1}{0} x^0 y^1 + \binom{1}{1} x^1 y^0 = \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^k y^{n-k},$$

also ist die Aussage für $n = 1$ wahr (beachte, dass $x^0 := 1$ für alle x).

- Induktionsschluss $n \rightarrow n + 1$: Sei die Aussage wahr für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist, dass die Aussage auch für $n + 1$ gilt, also

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.$$

Dies gilt, da

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)^n \cdot (x + y) \stackrel{\text{IV}}{=} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \right) \cdot (x + y) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Mit der Indexverschiebung $k = \ell - 1$ in der ersten Summe erhält man

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{\ell-1+1} y^{n-(\ell-1)} = \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{\ell} y^{n+1-\ell}.$$

Benennt man zusätzlich den Laufindex der zweiten Summe von k in ℓ um, so erhält man

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n}{\ell-1} x^{\ell} y^{n+1-\ell} + \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} x^{\ell} y^{n+1-\ell} \\ &= \underbrace{\binom{n}{n}}_{= \binom{n+1}{n+1}} x^{n+1} y^0 + \sum_{\ell=1}^n \underbrace{\left(\binom{n}{\ell-1} + \binom{n}{\ell} \right)}_{\stackrel{\text{1.15}}{=} \binom{n+1}{\ell}} x^{\ell} y^{n+1-\ell} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{= \binom{n+1}{0}} x^0 y^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} y^0 + \sum_{\ell=1}^n \binom{n+1}{\ell} x^{\ell} y^{n+1-\ell} + \binom{n+1}{0} x^0 y^{n+1} \\ &= \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+1}{\ell} x^{\ell} y^{n+1-\ell}. \end{aligned}$$

Mit vollständiger Induktion gilt die Aussage also für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Bemerkung 1.17. Die Binomialkoeffizienten, die im binomischen Lehrsatz auftauchen, entsprechen der n -ten Zeile im Pascalschen Dreieck, an dem man auch die Formel aus [Lemma 1.15](#) verdeutlichen kann: Jede Zahl im Pascalschen Dreieck ist die Summe der beiden Zahlen, die direkt darüber stehen.

1	$n = 0$	
1 1	$n = 1$	$\binom{0}{0}$
1 2 1	$n = 2$	$\binom{1}{0} \binom{1}{1}$
1 3 3 1	$n = 3$	$\binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2}$
1 4 6 4 1	$n = 4$	$\binom{3}{0} \binom{3}{1} \binom{3}{2} \binom{3}{3}$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$	$\binom{4}{0} \binom{4}{1} \binom{4}{2} \binom{4}{3} \binom{4}{4}$
1 6 15 20 15 6 1	$n = 6$	$\binom{5}{0} \binom{5}{1} \binom{5}{2} \binom{5}{3} \binom{5}{4} \binom{5}{5}$
1 7 21 35 35 21 7 1	$n = 7$	$\binom{6}{0} \binom{6}{1} \binom{6}{2} \binom{6}{3} \binom{6}{4} \binom{6}{5} \binom{6}{6}$
⋮		⋮

So hat man beispielsweise

$$(x + y)^3 = \binom{3}{0} x^0 y^3 + \binom{3}{1} x^1 y^2 + \binom{3}{2} x^2 y^1 + \binom{3}{3} x^3 y^0 = 1y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + 1x^3.$$

2. Sprache der Mathematik

Definition 2.1 (“Naive” Mengendefinition nach Cantor). Eine *Menge* ist eine Zusammenfassung von wohlbestimmten und wohlunterscheidbaren Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die *Elemente* der Menge genannt werden) zu einem Ganzen.

Bemerkung 2.2. Diese Definition ist problematisch: Wenn man versucht, die Menge aller Mengen zu betrachten, landet man schnell bei einem Widerspruch. Um dies zu verhindern, muss man formale axiomatische Mengenlehre betrachten, zum Beispiel nach Zermelo-Fraenkel. Für die Zwecke dieser Veranstaltung reicht der “naive” Mengenbegriff aber aus.

Notation 2.3. Wir schreiben

$$M = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$$

für die Menge mit Elementen x_1, x_2, x_3, \dots (explizite Schreibweise) oder

$$M = \{x \mid A(x)\}$$

für die Menge aller Elemente x , für die Eigenschaft A erfüllt ist (implizite Schreibweise). Weiterhin schreiben wir

- $x \in M$ für “ x ist ein Element von M ”,
- $x \notin M$ für “ x ist kein Element von M ” (statt $\neg(x \in M)$),
- $N \subset M$ für “ N ist eine Teilmenge von M , also $x \in N \Rightarrow x \in M$ ”,
- $N = M$ für $x \in N \Leftrightarrow x \in M$, was äquivalent ist zu $N \subset M$ und $M \subset N$.

Oft wird auch $N \subseteq M$ statt $N \subset M$ verwendet, um zu betonen, dass auch der Fall $N = M$ zugelassen ist. Für den Fall $N \subset M$ und $N \neq M$ schreibt man auch $N \subsetneq M$ und nennt N eine *echte Teilmenge* von M .

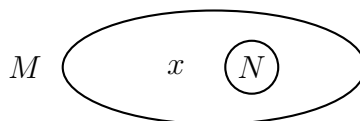


Abbildung 1: Schematische Darstellung zweier Mengen M und N . Hier gilt $N \subset M$ und $N \neq M$. Weiterhin ist $x \in M$, aber $x \notin N$.

Definition 2.4 (Mengenoperationen). Seien M, N Mengen.

- Die *Vereinigung* von M und N ist

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}.$$

- Der *Durchschnitt* oder *Schnitt* von M und N ist

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \wedge x \in N\}.$$

- Das *Komplement* von N in M ist

$$M \setminus N := \{x \mid x \in M \wedge x \notin N\}.$$

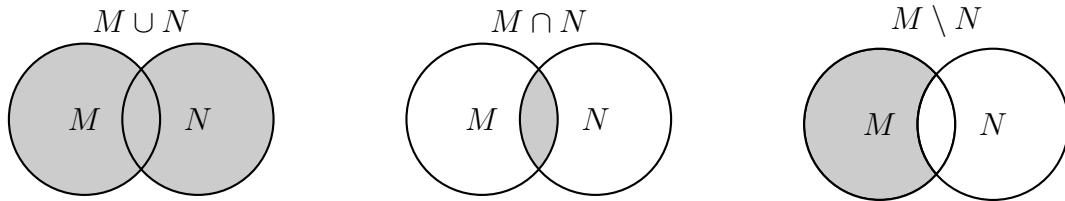


Abbildung 2: Die drei grundlegenden Mengenoperationen, dargestellt durch sogenannte *Venn-Diagramme*. Die jeweils konstruierte Menge ist in grau hervorgehoben.

Bemerkung 2.5. Die Operationen \cup und \cap sind *kommutativ*, das heißt,

$$M \cup N = N \cup M \quad \text{und} \quad M \cap N = N \cap M$$

für alle Mengen M, N , und *assoziativ*, das heißt,

$$M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3 \quad \text{und} \quad M_1 \cap (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cap M_2) \cap M_3$$

für alle Mengen M_1, M_2, M_3 . Außerdem gelten die *Distributivgesetze*:

$$M_1 \cap (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$$

und

$$M_1 \cup (M_2 \cap M_3) = (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3)$$

für alle Mengen M_1, M_2, M_3 .

Beispiel 2.6. Wichtige Mengen sind:

- \emptyset , die *leere Menge* (die eindeutige Menge, die kein Element enthält)
- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \dots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen
- $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, die Menge der natürlichen Zahlen mit Null
- $\mathbb{Z} := \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, die Menge der *ganzen Zahlen*
- $\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$, die Menge der *rationalen Zahlen*
- \mathbb{R} , die Menge der *reellen Zahlen*
- \mathbb{C} , die Menge der *komplexen Zahlen* (siehe auch [Definition 12.2](#))

Achtung: Manche Autoren betrachten 0 als natürliche Zahl.

Definition 2.7 (Quantoren). Viele mathematische Aussagen benutzen den *Allquantor* \forall , “für alle”, und den *Existenzquantor* \exists , “es existiert”. Beispiele sind die wahre Aussage

$$\forall n \in \mathbb{N} : n^2 \geq n$$

(für jede natürliche Zahl gilt, dass ihr Quadrat mindestens so groß ist wie die Zahl selbst) sowie die falsche Aussage

$$\exists x \in \mathbb{Q} : x^2 = 2$$

(es gibt eine rationale Zahl x , deren Quadrat gleich 2 ist), vergleiche **Satz 1.8**.

Sei allgemein M eine Menge und $A(x)$ eine Aussage für jedes $x \in M$.

- Die Aussage

$$\forall x \in M : A(x)$$

ist genau dann wahr, wenn $A(x)$ für alle $x \in M$ wahr ist.

- Die Aussage

$$\exists x \in M : A(x)$$

ist genau dann wahr, wenn $A(x)$ für mindestens ein $x \in M$ wahr ist.

Bemerkung 2.8. Die Namen der Variablen sind beliebig, d.h.

$$\forall x : A(x) \Leftrightarrow \forall y : A(y) \quad \text{und} \quad \exists z : A(z) \Leftrightarrow \exists r : A(r)$$

Quantoren gleicher Art können problemlos vertauscht werden:

$$\forall x \in M \forall y \in N : A(x, y) \Leftrightarrow \forall y \in N \forall x \in M : A(x, y)$$

und

$$\exists x \in M \exists y \in N : A(x, y) \Leftrightarrow \exists y \in N \exists x \in M : A(x, y).$$

Quantoren unterschiedlicher Art können im Allgemeinen nicht vertauscht werden: So ist etwa

$$\forall n \in \mathbb{N} \exists m \in \mathbb{N} : m > n$$

eine wahre Aussage (zu jeder natürlichen Zahl n gibt es eine natürliche Zahl m , die größer als n ist, zum Beispiel $m = n + 1$), während

$$\exists m \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} : m > n$$

falsch ist (es gibt eine natürliche Zahl m , die größer ist als jede natürliche Zahl n – dies ist schon für $n = m$ ein Widerspruch).

Bemerkung 2.9 (Verneinung von Quantoren). Es gilt

$$\neg(\forall x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \exists x \in M : \neg A(x)$$

und

$$\neg(\exists x \in M : A(x)) \Leftrightarrow \forall x \in M : \neg A(x).$$

Beispiel 2.10. Typische mathematische Aussagen beinhalten mehrere Quantoren, so dass die Verneinung nicht trivial ist. Beispielsweise ist eine reelle Funktion f an der Stelle $x \in \mathbb{R}$ per Definition stetig, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Die Verneinung davon ist

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists y \in \mathbb{R} : \neg(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon).$$

Wegen

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \neg(|x - y| < \delta) \vee (|f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

kann man diese Verneinung auch als

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists y \in \mathbb{R} : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$$

schreiben.

Notation 2.11. Sei I eine beliebige (Index-)Menge und für jedes $i \in I$ sei M_i eine Menge. Wir schreiben

$$\bigcup_{i \in I} M_i := \{x \mid \exists i \in I : x \in M_i\}$$

und

$$\bigcap_{i \in I} M_i := \{x \mid \forall i \in I : x \in M_i\}.$$

Satz 2.12 (Regel von de Morgan). Sei M_0 eine Menge und M_i Mengen für alle $i \in I$. Dann gilt:

- (i) $M_0 \setminus \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) = \bigcap_{i \in I} (M_0 \setminus M_i)$.
- (ii) $M_0 \setminus \left(\bigcap_{i \in I} M_i\right) = \bigcup_{i \in I} (M_0 \setminus M_i)$.

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in M_0 \setminus \left(\bigcup_{i \in I} M_i\right) &\Leftrightarrow x \in M_0 \wedge x \notin \bigcup_{i \in I} M_i \\ &\Leftrightarrow x \in M_0 \wedge \neg(\exists i \in I : x \in M_i) \\ &\Leftrightarrow x \in M_0 \wedge (\forall i \in I : x \notin M_i) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I : x \in M_0 \wedge x \notin M_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I : x \in M_0 \setminus M_i \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} (M_0 \setminus M_i), \end{aligned}$$

die zweite Aussage beweist man analog. □

Definition 2.13. Seien X und Y Mengen.

(1) Eine *Abbildung* oder *Funktion*

$$f : X \rightarrow Y$$

ist eine Vorschrift, die jedem $x \in X$ genau ein $f(x) \in Y$ zuordnet. Dabei heißt X der *Definitionsbereich* von f und Y der *Bildraum* oder *Wertebereich* von f . Gilt $f(x) = y$, so heißt y *Bild* von x und x heißt *Urbild* von y . Wir schreiben auch $f : X \rightarrow Y, x \mapsto f(x)$.

(2) Eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt

(i) *injektiv* oder *Injektion*, falls $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$,

(ii) *surjektiv* oder *Surjektion*, falls $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$,

(iii) *bijektiv* oder *Bijektion*, falls f injektiv und surjektiv ist.

Beispiel 2.14. (i) Die Vorschrift $f_1 : \{a, b\} \rightarrow \{1, 2\}$ mit $a \mapsto 1$ ist *keine* Abbildung.

(ii) Die Abbildung $f_2 : \{a, b, c\} \rightarrow \{1, 2\}$ mit $a \mapsto 1, b \mapsto 2$ und $c \mapsto 2$ ist surjektiv, aber nicht injektiv.

(iii) Die Abbildung $f_3 : \{a, b\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ mit $a \mapsto 1$ und $b \mapsto 2$ ist injektiv, aber nicht surjektiv.

(iv) Die Abbildung $f_4 : \{a, b\} \rightarrow \{1, 2\}$ mit $a \mapsto 1$ und $b \mapsto 2$ ist bijektiv.

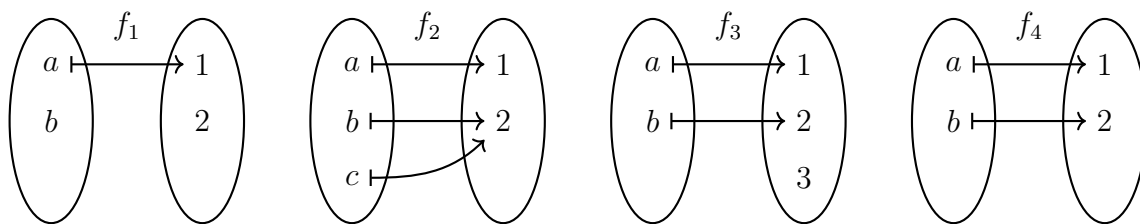


Abbildung 3: Graphische Darstellung der Vorschriften aus **Beispiel 2.14**.

Definition 2.15. Seien $f : X \rightarrow Y$ und $g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen auf Mengen X, Y, Z . Die *Komposition* $g \circ f : X \rightarrow Z$ ist definiert als

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)) \quad \text{für alle } x \in X.$$

Notation 2.16. Mit $\text{id}_X : X \rightarrow X$ bezeichnen wir die *Identitätsabbildung* auf X , definiert durch

$$\text{id}_X(x) = x \quad \text{für alle } x \in X$$

Für jede weitere Abbildung $f : X \rightarrow X$ gilt

$$f \circ \text{id}_X = f = \text{id}_X \circ f.$$

Bemerkung 2.17. Selbst wenn sowohl $f \circ g$ als auch $g \circ f$ existieren, müssen sie nicht übereinstimmen: Für $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = x + 1$ gilt etwa

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x + 1) = (x + 1)^2 \neq x^2 + 1 = g(x^2) = g(f(x)) = (g \circ f)(x),$$

also $f \circ g \neq g \circ f$.

Definition 2.18. Sei $f : X \rightarrow Y$ bijektiv. Dann existiert zu jedem $y \in Y$ (wegen Surjektivität) ein eindeutig bestimmtes (wegen Injektivität) $x \in X$ mit $f(x) = y$. Wir definieren die *Umkehrabbildung* von f durch

$$f^{-1} : Y \rightarrow X, \quad y \mapsto f^{-1}(y) = x.$$

Es gilt $f \circ f^{-1} = \text{id}_Y$ und $f^{-1} \circ f = \text{id}_X$.

Beispiel 2.19. Die Abbildung³

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto x^2$$

ist bijektiv, also existiert ihre Umkehrfunktion f^{-1} , die gegeben ist durch

$$f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Hingegen ist die Abbildung $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ weder injektiv noch surjektiv und hat somit keine Umkehrfunktion.

Man beachte, dass unsere obige Aussage über die Bijektivität von f im Augenblick nur “anschaulich” klar ist; in späteren Kapiteln werden wir dies beweisen. Die Injektivität ist recht einfach, die Surjektivität hingegen bedarf einiger Theorie. Dies wird auch dadurch deutlich, dass die Version von f auf den rationalen Zahlen, also

$$h : \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\} \rightarrow \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}, \quad x \mapsto x^2,$$

zwar auch injektiv, aber nicht surjektiv ist: $2 \in \mathbb{Q}$ hat kein Urbild in \mathbb{Q} unter h wie wir in [Satz 1.8](#) gesehen haben.

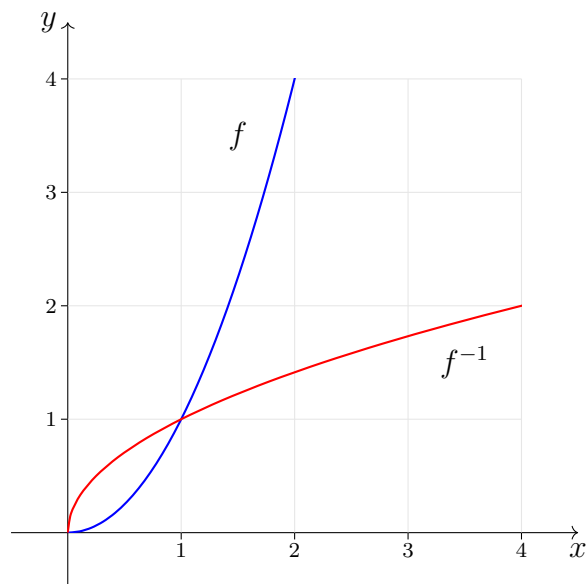


Abbildung 4: Die Graphen der Funktionen f (in blau) und f^{-1} (in rot) aus [Beispiel 2.19](#).

³Hierbei ist $[0, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Definition 2.20. (1) Zwei Mengen M und N heißen *gleichmächtig*, falls es eine bijektive Abbildung $N \rightarrow M$ gibt.

(2) Eine Menge M heißt *abzählbar*, falls sie endlich ist oder die gleiche Mächtigkeit hat wie \mathbb{N} . Für $M \neq \emptyset$ ist dies äquivalent dazu, dass es eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow M$ (*Abzählung*, eventuell mit Mehrfachzählung) gibt.

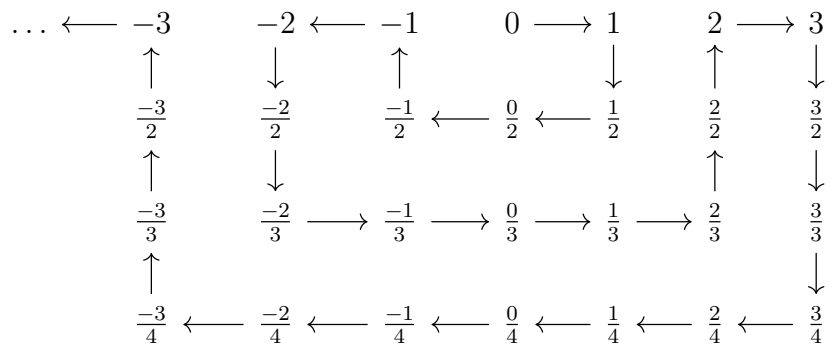
(3) Ist eine Menge M nicht abzählbar, so heißt sie *überabzählbar*.

Beispiel 2.21. (i) Endliche Mengen und damit insbesondere die leere Menge sind abzählbar.

(ii) \mathbb{N} ist abzählbar mit Abzählung $\text{id}_{\mathbb{N}}$.

(iii) \mathbb{Z} ist abzählbar durch Abzählung $0, -1, 1, -2, 2, \dots$

(iv) \mathbb{Q} ist abzählbar mit folgender Abzählung:



Satz 2.22 (Cantor 1874). \mathbb{R} ist überabzählbar.

Beweis. Wir zeigen, dass schon das Intervall $[0, 1] := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ überabzählbar ist. Dazu stellen wir jede reelle Zahl in $[0, 1]$ als Dezimalzahl dar.⁴ Wir führen einen Beweis durch Widerspruch: Angenommen, es gäbe eine Surjektion $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$, etwa

$$\begin{aligned}
 1 &\mapsto 0.a_1a_2a_3a_4\dots \\
 2 &\mapsto 0.b_1b_2b_3b_4\dots \\
 3 &\mapsto 0.c_1c_2c_3c_4\dots \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

mit Ziffern $a_1, a_2, \dots, b_1, \dots \in \{0, \dots, 9\}$. Betrachte nun die ‘‘Diagonalfolge’’

$$r := 0.\tilde{a}_1\tilde{b}_2\tilde{c}_3\tilde{d}_4\dots$$

mit

$$\tilde{x} := \begin{cases} 5, & \text{falls } x \neq 5, \\ 7, & \text{falls } x = 5. \end{cases}$$

⁴Hierbei gilt zu beachten, dass die Dezimaldarstellung nicht eindeutig ist, etwa $0.5 = 0.499999\dots$. Für den Beweis wählen wir immer die nicht-abbrechende Darstellung, um die Darstellung eindeutig zu machen.

Dann ist $r \in [0, 1]$, aber

$$r \neq 0.\underline{a_1}a_2a_3a_4\dots$$

$$r \neq 0.b_1\underline{b_2}b_3b_4\dots$$

$$r \neq 0.c_1c_2\underline{c_3}c_4\dots$$

\vdots

wobei jeweils die Stelle unterstrichen ist, an der sich r definitiv von der Zahl unterscheidet. Also ist $r \in [0, 1]$, wird aber nie von φ getroffen. Dies ist ein Widerspruch zur Surjektivität von φ , also muss die Annahme falsch gewesen sein. Somit ist $[0, 1]$ überabzählbar. \square

Wer mehr über die Entdeckungen und das Leben von Cantor wissen will, hier ist ein Buchtipp für Weihnachten:



3. \mathbb{R} als angeordneter Körper

Die reellen Zahlen bilden unsere fundamentale Menge von Zahlen, auf denen die Analysis aufgebaut ist. Wir wollen nun herausarbeiten, welche Strukturen die reellen Zahlen haben. Die offensichtlichen Strukturen und Regeln werden axiomatisch gefordert, alles andere muss daraus bewiesen werden. Die reellen Zahlen haben im wesentlichen drei verschiedene Strukturen (welche miteinander verträglich sind):

- Körper: wir können mit reellen Zahlen rechnen
- Anordnung: wir können reelle Zahlen vergleichen
- Vollständigkeit: die reellen Zahlen enthalten alle Zahlen, die wir brauchen

Zunächst betrachten wir die ersten beiden Konzepte, die sind recht einfach zu erfassen. Die Vollständigkeit ist etwas komplizierter und bedarf einiger Vorbereitungen, sie wird später in Kapitel 5 betrachtet.

Definition 3.1. Ein *Körper* (eng. *field*) ist eine Menge $K \neq \emptyset$ mit zwei Verknüpfungen, einer "Addition"

$$+ : K \times K, \quad (a, b) \mapsto a + b,$$

und einer "Multiplikation"

$$\cdot : K \times K, \quad (a, b) \mapsto a \cdot b,⁵$$

so dass gilt:

(1) Assoziativgesetze:

- $(a + b) + c = a + (b + c)$ für alle $a, b, c \in K$. (AG+)
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ für alle $a, b, c \in K$. (AG·)

(2) Kommutativgesetze:

- $a + b = b + a$ für alle $a, b \in K$. (KG+)
- $a \cdot b = b \cdot a$ für alle $a, b \in K$. (KG·)

(3) Existenz neutraler Elemente:

- $\exists 0 \in K \forall a \in K : a + 0 = a$ (NE+)
- $\exists 1 \in K \setminus \{0\} \forall a \in K : a \cdot 1 = a$. (NE·)

(4) Existenz inverser Elemente:

- $\forall a \in K \exists -a \in K : a + (-a) = 0$. (IE+)
- $\forall a \in K \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in K : a \cdot a^{-1} = 1$. (IE·)

(5) Distributivgesetz:

- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$. (DG)

⁵Oft lässt man den Multiplikationspunkt weg und schreibt ab statt $a \cdot b$, sofern dadurch keine Uneindeutigkeiten entstehen. Wie beim Rechnen mit Zahlen vereinbaren wir "Punkt vor Strich", um exzessives Klammern zu vermeiden.

Beispiel 3.2. (i) $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ ist *kein* Körper, da etwa 2 kein Inverses bezüglich Multiplikation hat.

(ii) $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ und $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ sind Körper.

(iii) Es gibt auch endliche Körper, zum Beispiel ist für jede Primzahl p die Menge $\mathbb{F}_p := \{0, 1, \dots, p-1\}$ mit Addition und Multiplikation modulo p als Verknüpfungen ein Körper. Für $p = 2$ hat man etwa die Verknüpfungstabellen

$$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} \cdot & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}$$

sowie die Inversen $-0 = 0$, $-1 = 1$ und $1^{-1} = 1$.

Lemma 3.3. Aus den Körperaxiomen folgen etliche “offensichtliche” Aussagen:

- (i) Die neutralen Elemente 0 und 1 sind eindeutig bestimmt.
- (ii) Die inversen Elemente $-a$ und a^{-1} sind eindeutig bestimmt.
- (iii) Es gilt $-0 = 0$.
- (iv) Die Gleichung $a + x = b$ hat für alle $a, b \in K$ die eindeutig bestimmte Lösung

$$x = b - a := b + (-a).$$

- (v) Die Gleichung $a \cdot x = b$ hat für alle $a \in K \setminus \{0\}$ und alle $b \in K$ die eindeutig bestimmte Lösung

$$x = \frac{b}{a} := a^{-1} \cdot b.$$

- (vi) Für alle $a, b \in K$ gilt:

- $-(-a) = a$
- $-(a + b) = -a - b$
- $a \cdot 0 = 0$
- $-a = (-1) \cdot a$
- $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
- $(a^{-1})^{-1} = a$ (falls $a \neq 0$)
- $(a \cdot b)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$ (falls $a \neq 0$ und $b \neq 0$)
- $a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$

Hier beweisen wir nur exemplarisch folgende Aussagen:

- (a) 0 ist eindeutig bestimmt.
- (b) Für alle $a \in K$ gilt $a \cdot 0 = 0$.

Beweis. (a) Seien $0, \tilde{0} \in K$ so, dass für alle $a \in K$ sowohl $a + 0 = a$ als auch $a + \tilde{0} = a$ gilt. Dann gilt mit der Kommutativität der Addition

$$\tilde{0} = \tilde{0} + 0 = 0 + \tilde{0} = 0,$$

also ist das neutrale Element bezüglich der Addition eindeutig bestimmt.

- (b) Es gilt $a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$. Addiert man nun auf beiden Seiten der Gleichung $-(a \cdot 0)$ dazu, erhält man

$$0 = a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) = a \cdot 0 + a \cdot 0 + (-(a \cdot 0)) = a \cdot 0. \quad \square$$

Der entscheidende Punkt ist, dass alle Eigenschaften in [Lemma 3.3](#) nicht nur in \mathbb{Q} oder \mathbb{R} gelten, sondern in jedem Körper wie etwa auch \mathbb{F}_p , da wir sie nur aus den Körperaxiomen heraus beweisen und keine spezifischen Eigenschaften eines bestimmten Körpers verwendet haben.

Definition 3.4. Ein Körper $(K, +, \cdot)$ heißt *angeordnet*, falls wir gewisse Elemente in K als *positiv* auszeichnen können (Schreibweise: $a > 0$), so dass gilt:

- (1) Für jedes $a \in K$ gilt genau eine der drei Beziehungen

$$a > 0, \quad a = 0, \quad -a > 0.$$

- (2) Für alle $a, b \in K$ mit $a > 0$ und $b > 0$ gilt auch $a + b > 0$ und $a \cdot b > 0$.

Notation 3.5. Sei K ein angeordneter Körper und $a, b \in K$. Dann schreiben wir:

- $a > b \quad :\Leftrightarrow \quad a - b > 0$
- $a < b \quad :\Leftrightarrow \quad b > a$
- $a \geq b \quad \Leftrightarrow \quad a > b \vee a = b$
- $a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a < b \vee a = b$
- $\max(a, b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq b, \\ b, & \text{sonst} \end{cases}$
- $\min(a, b) := \begin{cases} a, & \text{falls } a \leq b, \\ b, & \text{sonst} \end{cases}$

Beispiel 3.6. (i) \mathbb{Q} und \mathbb{R} sind angeordnete Körper.

(ii) \mathbb{C} kann nicht angeordnet werden (dazu mehr in Kapitel 12).

(iii) \mathbb{F}_p kann nicht angeordnet werden.

Für $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ kann man das folgendermaßen zeigen: Da $0 \neq 1$ muss entweder $0 < 1$ oder $0 > 1$ gelten.

- Fall 1: $1 > 0$. Aus $1 > 0$ und $1 > 0$ folgt $1 + 1 > 0$. Wegen $1 + 1 = 0$ erhält man den Widerspruch $0 > 0$.
- Fall 2: $1 < 0$. Dann gilt $-1 > 0$. Wegen $-1 = 1$ gilt also wieder $1 > 0$, was laut Fall 1 ein Widerspruch ist.

Die Annahme der Existenz einer Anordnung auf \mathbb{F}_2 führt also immer zu einem Widerspruch. Somit existiert keine Anordnung auf \mathbb{F}_2 .

Lemma 3.7. Ist $(K, +, \cdot)$ ein angeordneter Körper, so gilt:

- (i) $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$ (die Ordnung ist *transitiv*)
- (ii) $a < b \Rightarrow \forall c \in K : a + c < b + c$
- (iii) $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$
- (iv) $a < b \Rightarrow -a > -b$
- (v) $(0 \leq a < b) \wedge (0 \leq c < d) \Rightarrow a \cdot c < b \cdot d$
- (vi) $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$
- (vii) $0 < a < b \Rightarrow a^{-1} > b^{-1}$
- (viii) $\forall a \in K : a^2 \geq 0$ (insbesondere $1 > 0$)

Beweis. Wir beweisen hier exemplarisch nur (iii) und (v):

(iii) Per Definition ist $a < b$ äquivalent zu $b - a > 0$. Aus $b - a > 0$ und $c > 0$ folgt

$$bc - ac = (b - a) \cdot c > 0,$$

wiederum per Definition also $b \cdot c > a \cdot c$ beziehungsweise $a \cdot c < b \cdot c$.

(v) Wegen $b > 0$ und $d > 0$ gilt $bd > 0$, falls $a = 0$ oder $c = 0$ ist die Aussage also trivialerweise erfüllt, weil dann $ac = 0$. Sei also $a > 0$ und $c > 0$.

- Aus $a < b$ und $c > 0$ folgt $ac < bc$.
- Aus $c < d$ und $b > 0$ folgt $bc < bd$.

Somit haben wir $ac < bc < bd$, wegen Transitivität also $ac < bd$. □

Bemerkung 3.8. Sei K ein angeordneter Körper. Dann können wir \mathbb{N} in K einbetten. Sei dazu $1_K \in K$ das neutrale Element der Multiplikation in K und setze für $n \in \mathbb{N}$

$$n_K := \sum_{j=1}^n 1_K = \underbrace{1_K + \dots + 1_K}_{n \text{ Kopien}} \in K.$$

Dann gilt:

- $(n + m)_K = n_K + m_K$ und $(n \cdot m)_K = n_K \cdot m_K$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$.
- $n_K > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Die Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow K, n \mapsto n_K$ ist injektiv.

Die erste Aussage folgt aus den Körperaxiomen. Wegen $1_K > 0$ ist auch n_K als Summe positiver Elemente positiv, also $n_K > 0$. Für die Injektivität seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m_K = n_K$. Falls $m > n$ ist $m - n \in \mathbb{N}$ mit $(m - n)_K = m_K - n_K = 0$ im Widerspruch zu der zweiten Aussage, analog führt $m < n$ zu einem Widerspruch. Also muss $m = n$ gelten und die Abbildung injektiv sein.

Somit finden wir in jedem angeordneten Körper eine Kopie von \mathbb{N} . Wir werden n mit n_K identifizieren.

Wichtig ist, dass die Injektivität der Abbildung auf der Anordnung von K beruht. Entsprechend finden wir etwa in \mathbb{F}_p keine Kopie von \mathbb{N} .

Satz 3.9 (Bernoullische Ungleichung). Sei K ein angeordneter Körper. Für alle $x \in K$ mit $x > -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1+n \cdot x.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels vollständiger Induktion über n .

- Induktionsanfang $n = 1$: Wegen $(1+x)^1 = 1+x = 1+1 \cdot x$ ist die Aussage für $n = 1$ offensichtlich wahr.
- Induktionsschluss $n \rightarrow n+1$: Sei die Aussage wahr für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$. Zu zeigen ist also

$$(1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= \underbrace{(1+x)^n}_{\substack{\text{IV} \\ \geq 1+nx}} \cdot \underbrace{(1+x)}_{>0} \geq (1+nx)(1+x) = 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \\ &\geq 1+(n+1)x. \quad \square \end{aligned}$$

Definition 3.10. Sei K ein angeordneter Körper. Für $a \in K$ definieren wir den *Absolutbetrag*

$$|a| := \max(a, -a) = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0, \\ -a, & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Lemma 3.11. Sei K ein angeordneter Körper. Für alle $a, b \in K$ gilt:

- (i) $a \leq |a|$ und $-a \leq |a|$.
- (ii) $|-a| = |a|$.
- (iii) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.
- (iv) $|a+b| \leq |a| + |b|$. (Dreiecksungleichung)
- (v) $||a| - |b|| \leq |a-b|$. (umgekehrte/inverse Dreiecksungleichung)

Beweis. Die ersten drei Aussagen sind mittels Fallunterscheidungen leicht zu beweisen. Zur Dreiecksungleichung:

- Aus $a \leq |a|$ und $b \leq |b|$ folgt $a+b \leq |a| + |b|$.
- Aus $-a \leq |a|$ und $-b \leq |b|$ folgt $-(a+b) = -a-b \leq |a| + |b|$.

Zusammen erhält man $|a| + |b| \geq a+b$ und $|a| + |b| \geq -(a+b)$, also auch

$$|a| + |b| \geq |a+b|.$$

Die inverse Dreiecksungleichung wird in den Übungen bewiesen. □

Definition 3.12. Ein angeordneter Körper K heißt *archimedisch*, falls zu jedem $x \in K$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $x < n$.

Lemma 3.13. Sei K ein archimedisch angeordneter Körper. Dann gilt:

(i) Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

(ii) Ist $b \in K$ mit $b > 1$, so existiert zu jedem $R \in K$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$b^n > R \quad \text{für alle } n \geq N.$$

(iii) Ist $q \in K$ mit $0 < q < 1$, so existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$q^n < \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Beweis. (i) Da K archimedisch ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{\varepsilon} < N$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt dann $\frac{1}{\varepsilon} < N \leq n$ und damit

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

(ii) Wegen $b > 1$ ist $x := b - 1 > 0$. Da K archimedisch ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{R}{x} < N$, also $R < Nx$. Mit der Bernoullischen Ungleichung aus [Satz 3.9](#) folgt

$$b^N = (1 + x)^N \geq 1 + Nx > Nx > R.$$

Für alle $n > N$ ist $n - N \in \mathbb{N}$ und aus $b > 1$ folgt $b^{n-N} \geq 1^{n-N} = 1$, also

$$b^n = b^{n-N} \cdot b^N \geq b^N > R.$$

(iii) Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $q < 1$ gilt $q^{-1} > 1$. Mit Teil (ii) erhält man für $R = \frac{1}{\varepsilon}$, dass es ein $N \in \mathbb{N}$ gibt mit $(q^{-1})^n > \frac{1}{\varepsilon}$ für alle $n \geq N$. Wegen $(q^{-1})^n \cdot q^n = 1$ ist dann aber auch $q^n = ((q^{-1})^n)^{-1} < \varepsilon$. □

Axiom 3.14. \mathbb{R} ist ein archimedisch angeordneter Körper.

Bemerkung 3.15. Auch \mathbb{Q} ist ein archimedisch angeordneter Körper. Wir brauchen also noch weitere Eigenschaften, um \mathbb{Q} und \mathbb{R} zu unterscheiden. So enthält \mathbb{R} mehr Zahlen als \mathbb{Q} , zum Beispiel $\sqrt{2}$, e und π . Im gewissen Sinne enthält \mathbb{R} "alle" Zahlen, die in \mathbb{Q} fehlen – in diesem Sinne ist \mathbb{R} im Gegensatz zu \mathbb{Q} *vollständig*. Um dies zu präzisieren und zu formalisieren brauchen wir den Begriff von "Folgen".

4. Folgen

Um den Unterschied zwischen \mathbb{Q} und \mathbb{R} zu klären, brauchen wir das Konzept von Folgen. \mathbb{Q} besteht aus den Zahlen, die wir algebraisch als Brüche hinschreiben können (mit Nenner und Zähler als ganze Zahlen). Für \mathbb{R} gilt dies nicht mehr: Wir haben im allgemeinen keine algebraischen Ausdrücke, allerdings können wir reelle Zahlen durch rationale Zahlen approximieren. Folgen beschreiben solche Approximationen, und ihr Grenzwert sollte die gewünschte reelle Zahl sein.

Definition 4.1. Eine *Folge* reeller Zahlen ist eine Abbildung $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto a_n$. Wir schreiben auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oder (a_1, a_2, a_3, \dots) .

Folgen müssen in der Praxis nicht unbedingt mit dem Index 1 beginnen, auch Folgen der Form $(a_n)_{n \geq n_0}$ mit $n_0 \in \mathbb{N}_0$ sind möglich.

Beispiel 4.2. Gängige Folgen sind:

- (i) $a_n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(2, 2, 2, 2, \dots)$ (konstante Folge)
- (ii) $a_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(1, 2, 3, 4, \dots)$
- (iii) $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots)$
- (iv) $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $(-1, 1, -1, 1, \dots)$

Definition 4.3. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *konvergent* mit *Grenzwert* $a \in \mathbb{R}$ (oder *konvergiert* gegen a), falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a - a_n| < \varepsilon.$$

Wir schreiben das auch als $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ oder $a_n \rightarrow a$ für $n \rightarrow \infty$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*. Eine Folge mit Grenzwert 0 heißt auch *Nullfolge*.

Bemerkung 4.4. (i) Typischerweise ist ε sehr klein, anschaulich gesprochen liegen ab hinreichend großem Index N alle Folgenglieder beliebig nahe bei a .

(ii) Seien $a, x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$|x - a| < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

Beispiel 4.5. Wir betrachten erneut die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus **Beispiel 4.2**:

- (i) Die Folge mit $a_n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist eine konvergente Folge mit Grenzwert 2: Für jedes $\varepsilon > 0$ gilt $|2 - a_n| = |2 - 2| = 0 < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$, hier kann also $N \in \mathbb{N}$ beliebig gewählt werden.
- (ii) Die Folge mit $a_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert nicht: Angenommen, sie würde gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergieren. Wir zeigen, dass die Bedingung für Konvergenz für $\varepsilon := \frac{1}{2} > 0$ verletzt ist. Sei dazu $N \in \mathbb{N}$ beliebig und wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq \max(N, |a| + 1)$. Mit der inversen Dreiecksungleichung gilt dann

$$|a - a_n| = |a - n| \geq \left| |a| - |n| \right| = n - |a| \geq |a| + 1 - |a| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon.$$

Man beachte: obiger Widerspruchsbeweis ist einfach der Beweis der Negation von “ a ist Grenzwert von (a_n) ”, also von

$$\begin{aligned} & \neg(\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |a - a_n| < \varepsilon) \\ \Leftrightarrow & \exists \varepsilon > 0 \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N : |a - a_n| \geq \varepsilon. \end{aligned}$$

Wir wählen dann dort einfach $\varepsilon = \frac{1}{2}$ und $n = \max(N, |a| + 1)$.

- (iii) Die Folge mit $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen $a = 0$: Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \frac{1}{\varepsilon}$. (Ein solches N existiert, da \mathbb{R} archimedisch ist.) Dann gilt für alle $n \geq N$

$$|a - a_n| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Vergleiche auch [Lemma 3.13](#); dort hatten wir dies im wesentlichen schon gezeigt.

- (iv) Die Folge mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert nicht: Angenommen, sie würde gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergieren. Dann gibt es für $\varepsilon := \frac{1}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \frac{1}{2}$ für alle $n \geq N$ gilt. Wir erhalten den Widerspruch $2 < 1$ mittels der folgenden Rechnung für ein beliebiges $n \geq N$:

$$2 = |a_{n+1} - a_n| = |(a_{n+1} - a) + (a - a_n)| \leq |a_{n+1} - a| + |a - a_n| < \varepsilon + \varepsilon = 1.$$

Lemma 4.6. Der Grenzwert einer konvergenten Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $a, a' \in \mathbb{R}$ mit $a_n \rightarrow a$ und $a_n \rightarrow a'$ für $n \rightarrow \infty$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |a' - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N.^6$$

Dann gilt

$$|a - a'| = |(a - a_n) + (a_n - a')| \leq |a - a_n| + |a_n - a'| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Da dies für beliebiges $\varepsilon > 0$ gilt, folgt $|a - a'| = 0$, also $a' = a$. □

Bemerkung 4.7. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$.

- (i) Sei $\varepsilon > 0$. Wenn $N \in \mathbb{N}$ die Konvergenzbedingung erfüllt, also $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt, dann kann auch jedes $N' \geq N$ gewählt werden. Dies haben wir im Beweis von [Lemma 4.6](#) verwendet.
- (ii) Ändert man endlich viele Folgenglieder in $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ab, so konvergiert die neue Folge auch gegen a . Insbesondere hat $(a_n)_{n \geq n_0}$ den selben Grenzwert wie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$: Wenn $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die neue Folge ist, gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ mit $a_n = a'_n$ für alle $n \geq K$. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für alle $n \geq \max(N, K)$ gilt dann $|a - a'_n| = |a - a_n| < \varepsilon$, also konvergiert auch $(a'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

⁶Genau genommen existiert zunächst ein N_1 für a und ein N_2 für a' . Dann setzt man $N := \max(N_1, N_2)$ und hat ein N , das für a und a' funktioniert.

Satz 4.8. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

(1) Es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0.$$

(2) Betrachte

$$s_n := \sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n.$$

Dann konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\frac{1}{1-x}$.

Beweis. (1) Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es gemäß **Lemma 3.13** ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|0 - x^n| = |x|^n < \varepsilon \quad \text{für alle } n > N.$$

Dies bedeutet dann aber $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0$.

(2) Aus der Übung kennen wir die geometrische Summenformel

$$s_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

und wir vermuten, dass wir dann aufgrund des ersten Teiles so schließen können:

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - x}.$$

Im Augenblick wissen wir das noch nicht (aber bald, in **Satz 4.12**). Deshalb beweisen wir die Aussage direkt durch eine Modifikation des Beweises aus Teil (i): Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $N \in \mathbb{N}$, so dass $|x|^{n+1} < \varepsilon \cdot (1 - x)$ für alle $n \geq N$ (dies geht, da $|x|^{n+1}$ laut **Lemma 3.13** beliebig klein wird). Dann ist

$$\left| s_n - \frac{1}{1-x} \right| = \left| \frac{1 - x^{n+1}}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{1}{1-x} \cdot |x^{n+1}| = \frac{1}{1-x} \cdot |x|^{n+1} < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$, also $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{1-x}$. □

Beispiel 4.9. (i) Für $x = \frac{1}{2}$ konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}$ gegen $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

(ii) Für $x = \frac{1}{3}$ konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}$ gegen $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

(iii) Für $x = -\frac{1}{2}$ konvergiert die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n}$ gegen $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$.

(iv) Für den periodischen Dezimalbruch $0.\overline{37} = \frac{37}{100} + \frac{37}{10000} + \dots$ betrachten wir

$$s_n = 37 \left(\frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots + \frac{1}{100^{n+1}} \right) = \frac{37}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100^n} \right).$$

Mit $x = \frac{1}{100}$ gilt nach **Satz 4.8**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{37}{100} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{37}{99}.$$

Somit haben wir eine andere Schreibweise gefunden: $0.\overline{37} = \frac{37}{99}$.⁷

Definition 4.10. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq K$ (bzw. $a_n \geq K$) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Folge heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist, wenn es also ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Satz 4.11. Jede konvergente Folge ist beschränkt.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert $a \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \geq N$. Seien

$$K_1 := \min \{a_1, \dots, a_{N-1}\} \quad \text{und} \quad K_2 := \max \{a_1, \dots, a_{N-1}\}$$

das kleinste bzw. größte Element der *endlichen* Menge $\{a_1, \dots, a_{N-1}\}$.⁸ Es gilt nun

$$K_1 \leq a_n \leq K_2 \quad \text{für alle} \quad n < N$$

und

$$a - 1 \leq a_n \leq a + 1 \quad \text{für alle} \quad n \geq N,$$

also zusammengenommen

$$\min(K_1, a - 1) \leq a_n \leq \max(K_2, a + 1) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}. \quad \square$$

Satz 4.12 (Limitenregeln/Grenzwertsätze für Folgen). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$.

(1) Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\lambda \cdot a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$, konvergent und es gilt:

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a + b.$

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a \cdot b.$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda \cdot a_n) = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda \cdot a$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}.$

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a - b.$

(2) Sei $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, und die Folge $(\frac{a_n}{b_n})_{n \geq n_0}$ ist dann auch konvergent und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_n}{b_n} \right)_{n \geq n_0} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{a}{b}.$$

Beweis. (1) (i) Wähle $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq N_1 \quad \text{und} \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle} \quad n \geq N_2.$$

Setze $N := \max(N_1, N_2)$, dann gilt für alle $n \geq N$ mit der Dreiecksungleichung

$$|(a + b) - (a_n + b_n)| = |(a - a_n) + (b - b_n)| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit ist die Folge $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $a + b$.

⁷Wenn man ganz genau sein will braucht man in diesem Beispiel schon die Grenzwertsätze aus [Satz 4.12](#), um den Vorfaktor $\frac{37}{100}$ aus dem Grenzwert ziehen zu können.

⁸Diese Definition ist nur für endliche Mengen sinnvoll, später mehr dazu.

- (ii) Nach **Satz 4.11** ist die konvergente Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, also existiert ein $K \in \mathbb{R}$ mit $|a_n| \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2|b| + 1} \quad \text{und} \quad |b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2K} \quad \text{für alle } n \geq N$$

(wie in **(i)** wählt man $N := \max(N_1, N_2)$). Dann gilt für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned} |(ab) - (a_n b_n)| &= |ab - a_n b + a_n b - a_n b_n| \\ &= |(a - a_n)b + a_n(b - b_n)| \\ &\leq |a - a_n| \cdot |b| + |a_n| \cdot |b - b_n| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2|b| + 1} \cdot |b| + K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Somit ist die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert $a \cdot b$.

- (iii) Dies folgt aus Teil **(ii)** für die konstante Folge $b_n = (\lambda, \lambda, \dots)$ mit Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lambda$.

- (iv) Wegen $a_n - b_n = a_n + (-1) \cdot b_n$ folgt dies aus **(i)** und **(iii)**.

- (2) Da $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist, gibt es für $\varepsilon := |b| > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|b - b_n| < |b|$. Insbesondere gilt $b_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$, da sonst $|b - b_n| = |b - 0| = |b| \not< |b|$.

Es reicht zu zeigen, dass $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq n_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b}$, denn dann folgt

$$\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot \frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

aus **(ii)**.

Betrachte also $\left(\frac{1}{b_n}\right)_{n \geq n_0}$ und sei $\varepsilon > 0$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq n_0$ so, dass

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot |b|^2 \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \frac{|b|}{2} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Aus der zweiten Abschätzung folgt $|b_n| > \left|\frac{b}{2}\right|$: Wegen **Bemerkung 4.4** gilt

$$b - \frac{|b|}{2} < b_n < b + \frac{|b|}{2},$$

für $b > 0$ folgt $0 < \frac{b}{2} < b_n < \frac{3}{2}b$, für $b < 0$ erhält man $\frac{3}{2}b < b_n < \frac{b}{2} < 0$, in jedem Fall also $|b_n| > \left|\frac{b}{2}\right|$. Dann gilt auch $\left|\frac{1}{b_n}\right| < \left|\frac{2}{b}\right|$ und $\left|\frac{1}{b \cdot b_n}\right| < \left|\frac{2}{b^2}\right|$. Abschließend folgt

$$\left|\frac{1}{b} - \frac{1}{b_n}\right| = \left|\frac{b_n - b}{bb_n}\right| = |b - b_n| \cdot \left|\frac{1}{bb_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2} \cdot |b^2| \cdot \left|\frac{2}{b^2}\right| = \varepsilon \quad \text{für alle } n \geq N. \quad \square$$

Beispiel 4.13. (i) Für

$$a_n := \frac{n+1}{n} = \frac{n}{n} + \frac{1}{n}$$

gilt mit den Grenzwertsätzen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 + 0 = 1$, da $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} = 1$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Abkürzend könnte man dies wie folgt aufschreiben:

$$a_n = \frac{n+1}{n} = \underbrace{\frac{n}{n}}_{\rightarrow 1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \xrightarrow[\text{GWS}]{n \rightarrow \infty} 1 + 0 = 1.$$

Für

$$b_n := \left(\frac{n+1}{n} \right)^2$$

gilt $b_n = a_n \cdot a_n$, also folgt mit den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \cdot \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) = 1 \cdot 1 = 1.$$

(ii) Es gilt

$$a_n := \frac{5n^2 + 2n + 1}{3n^2 + 10n} = \frac{5 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{10}{n}} \xrightarrow[\text{GWS}]{n \rightarrow \infty} \frac{5 + 0 + 0}{3 + 0} = \frac{5}{3}.$$

Satz 4.14. (1) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$. Gilt $a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $a \leq b$.

(2) Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b'_n = b \in \mathbb{R}$ und $b'_n \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit Grenzwert b .⁹

Beweis. (1) Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N.$$

Insbesondere gilt für $n = N$ mit **Bemerkung 4.4**

$$a - \varepsilon < a_N \leq b_N < b + \varepsilon,$$

also $a - b \leq 2\varepsilon$. Da dies für alle $\varepsilon > 0$ gilt, muss $a - b \leq 0$ und somit $a \leq b$ folgen.

(2) Sei $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|b'_n - b| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |b_n - b| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N.$$

Wieder mit **Bemerkung 4.4** haben wir

$$b - \varepsilon < b'_n \leq a_n \leq b_n < b + \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N,$$

also erneut mit **Bemerkung 4.4** $|a_n - b| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Somit konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen b . \square

Bemerkung 4.15. (i) In **Satz 4.14** reicht es jeweils auch, wenn die Ungleichungen nur für alle $n \geq n_0$ für ein beliebiges $n_0 \in \mathbb{N}$ gelten.

⁹Diese Aussage trägt unter anderem die Namen *Quetschlemma* und *Sandwichlemma*, da die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwischen $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ "eingequetscht" wird und ihr somit nichts anderes übrig bleibt, als auch gegen den gemeinsamen Grenzwert von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zu konvergieren.

- (ii) Sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen mit Grenzwerten $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \in \mathbb{R}$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \in \mathbb{R}$, so folgt aus $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ *nicht* $a < b$, sondern nur $a \leq b$: Betrachte etwa $a_n = \frac{1}{n^2}$ und $b_n = \frac{2}{n}$ mit $a_n < b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Beispiel 4.16. Sei $0 < x < 1$. Um den Grenzwert von $a_n := nx^n$ zu berechnen, benutzen wir folgendes Wissen:

- (i) Wegen **Lemma 3.13** gilt $q^n \rightarrow 0$ für alle q mit $0 < q < 1$.
(ii) Wegen $\frac{n+1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ gilt mit den Grenzwertsätzen $\frac{n+1}{n}x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$.
(iii) Es gibt ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < x < q < 1$, etwa $q := x + \frac{1-x}{2}$.

Wegen (ii) existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{n+1}{n}x \leq q$ für alle $n \geq n_0$. Schreibe

$$a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \dots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot a_{n_0}.$$

Für alle $k \geq n_0$ lässt sich der Faktor $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ gegen q abschätzen, da

$$0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)x^{k+1}}{kx^k} = \frac{k+1}{k}x \leq q.$$

Somit ist

$$a_n \leq \underbrace{q \cdot \dots \cdot q}_{(n-n_0)\text{-mal}} \cdot a_{n_0} = q^{n-n_0} \cdot a_{n_0} = q^n \cdot \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}$$

für alle $n \geq n_0$, wobei $\lambda := \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} \in \mathbb{R}$ nicht von n abhängt, also eine Konstante ist. Schließlich gilt

$$0 \leq a_n \leq q^n \lambda,$$

wobei $q^n \lambda \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ laut (i). Mit **Satz 4.14** folgt, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent ist mit Grenzwert 0.

Definition 4.17. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *bestimmt divergent* oder *uneigentlich konvergent* gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), falls

$$\forall k \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n > k \quad (\text{bzw. } a_n < k).^{10}$$

Wir schreiben in diesem Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ (bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ oder $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$). Eine divergente Folge, die nicht bestimmt divergiert, heißt *unbestimmt divergent*.

¹⁰Für alle Schranken k gibt es einen Punkt N , ab dem jedes Folgenglied über (bzw. unter) k liegt.

Beispiel 4.18. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge.

- (i) Für $a_n = n$ gilt $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.
- (ii) Für $a_n = -n^2$ gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.
- (iii) Für $a_n = (-1)^n$ ist die Folge beschränkt und unbestimmt divergent.
- (iv) Für $a_n = (-1)^n n$ ist die Folge unbeschränkt und unbestimmt divergent.

Satz 4.19. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0.$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty &\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{R} \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n > k \\ &\Leftrightarrow \forall k > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : a_n > k \\ &\Leftrightarrow \forall k > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \frac{1}{a_n} < \frac{1}{k} \\ &\stackrel{\varepsilon = \frac{1}{k}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \frac{1}{a_n} < \varepsilon \\ &\stackrel{a_n > 0}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : -\varepsilon < \frac{1}{a_n} < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \left| \frac{1}{a_n} \right| < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Definition 4.20. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der *Partialsummen*

$$s_n := \sum_{k=1}^n a_k$$

heißt (*unendliche*) *Reihe* und wird mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bezeichnet. Wenn $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, so schreiben wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

und nennen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent*.

Allgemeiner kann man auch wieder eine Folge $(a_n)_{n \geq n_0}$ nehmen und die Reihe $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ betrachten.

Beispiel 4.21. (i) Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ konvergiert laut **Satz 4.8** die *geometrische Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ mit

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

(ii) Was ist mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k}$? Es gilt $s_1 = \frac{1}{2}$,

$$s_2 = \sum_{k=1}^2 \frac{1}{(k+1)k} = s_1 + \frac{1}{(2+1) \cdot 2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

und

$$s_3 = s_2 + \frac{1}{(3+1) \cdot 3} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

Mittels vollständiger Induktion kann man die naheliegende Vermutung

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)k} = \frac{n}{n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ beweisen.¹¹ Mit den Grenzwertsätzen gilt

$$s_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

also folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)k} = 1.$$

(iii) Viel schwieriger ist es, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ zu beweisen. In diesem Fall kennt man keine explizite Formel für die Partialsummen.

(iv) Was ist mit der *harmonischen Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$? Anschaulich hat man

$$1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}}_{\geq 8 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} + \dots,$$

etwas formaler also für alle $n \geq 2^m$

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{2^m} \frac{1}{k} \geq 1 + m \cdot \frac{1}{2}.$$

Somit ist $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bestimmt divergent (gegen ∞) und daher $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty$.

(v) Im Gegensatz dazu ist die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ konvergent mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln(2).$$

Dies ist auch viel schwieriger zu sehen, wir werden aber am Ende der Analysis 1 in der Lage sein, dies zu zeigen. Im Augenblick sollte man sich merken: Das Vorzeichen kann bei Reihen bei der Frage nach Konvergenz eine wichtige Rolle spielen!

¹¹Eine direkterer Beweis dafür ergibt sich, wenn man erkennt, dass s_n eine teleskopische Summe ist, bei der sich alle Terme bis auf den ersten und den letzten wegheben:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}. \end{aligned}$$

5. Vollständigkeitsaxiom

Sowohl \mathbb{Q} als auch \mathbb{R} sind archimedisch angeordnete Körper. Der Unterschied liegt darin, dass \mathbb{R} vollständig ist und \mathbb{Q} nicht: In einem gewissen Sinne “fehlen” in \mathbb{Q} Zahlen, die eigentlich da sein sollten. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\begin{aligned}a_1 &= 3 \\a_2 &= 3.1 \\a_3 &= 3.14 \\a_4 &= 3.141 \\a_5 &= 3.1415 \\a_6 &= 3.14159 \\&\vdots\end{aligned}$$

sollte eigentlich konvergieren, aber in \mathbb{Q} gibt es keinen Grenzwert, während in \mathbb{R} der Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \pi$ existiert. Intuitiv sollte $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergieren, weil $|a_n - a_m|$ beliebig klein wird wenn n und m hinreichend groß sind. Dies wird formalisiert durch das Konzept der Cauchy-Folge.

Definition 5.1. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt *Cauchy-Folge*, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Satz 5.2. Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine konvergente Folge und $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Für alle $n, m \geq N$ gilt dann $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, also

$$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Folglich ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. □

Axiom 5.3 (Vollständigkeitsaxiom für \mathbb{R}). Jede Cauchy-Folge reeller Zahlen konvergiert gegen einen Grenzwert in \mathbb{R} .

Bemerkung 5.4. (1) Das Vollständigkeitsaxiom ist unabhängig von den anderen Axiomen (wie die Existenz von \mathbb{Q} zeigt).

(2) Die Cauchy-Eigenschaft erlaubt es, die Konvergenz einer Folge zu überprüfen ohne den Grenzwert zu kennen.

(3) Wichtig ist, dass man in der Cauchy-Eigenschaft $|a_n - a_m| < \varepsilon$ wirklich für alle $n, m \geq N$ überprüfen muss. So reicht $|a_n - a_{n+1}| < \varepsilon$ für hinreichend großes n z.B. nicht aus um Konvergenz zu garantieren: Für die Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ der harmonischen Reihe gilt etwa

$$s_{n+1} - s_n = \frac{1}{n+1} < \varepsilon \quad \text{für hinreichend großes } n,$$

aber $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert nicht (da $s_n \rightarrow \infty$).

Notation 5.5. Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ bezeichnen wir:

- $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (abgeschlossenes Intervall)
- $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (offenes Intervall)
- $[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ ((rechts) halboffenes Intervall)
- $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ ((links) halboffenes Intervall)

In jedem Fall heißen a und b die *Randpunkte* oder *Endpunkte* des Intervalls und $|I| := b - a$ die *Länge* des Intervalls.¹²

Axiom 5.6 (Intervallschachtelungsprinzip). Sei

$$I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots \supseteq I_n \supseteq I_{n+1} \supseteq \dots$$

eine absteigende Folge von abgeschlossenen Intervallen in \mathbb{R} mit $\lim_{n \rightarrow \infty} |I_n| = 0$. Dann gibt es genau eine reelle Zahl x mit $x \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = \{x\}.$$

Das Vollständigkeitsaxiom **Axiom 5.3** und das Intervallschachtelungsprinzip **Axiom 5.6** sind keine unabhängigen Axiome, eins folgt aus dem anderen. Man kann also eines als Axiom für \mathbb{R} fordern, das andere folgt dann daraus als Satz.

Satz 5.7. Es sind äquivalent:

- (1) Vollständigkeitsaxiom
- (2) Intervallschachtelungsprinzip

Beweis. (1) \Rightarrow (2): Seien $I_n = [a_n, b_n]$ mit $a_n, b_n \in \mathbb{R}$, $a_n < b_n$ und $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so dass $|I_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Wir wollen zeigen, dass $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ genau ein Element enthält, also dass ein eindeutiges $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$ existiert.

Existenz: Wir zeigen zunächst, dass die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der linken Randpunkte eine Cauchy-Folge ist: Sei dafür $\varepsilon > 0$. Wegen $|I_n| \rightarrow 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|I_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Für alle $n, m \geq N$ gilt $a_n, a_m \in I_N$, also

$$|a_n - a_m| \leq |I_N| < \varepsilon.$$

Damit ist die Cauchy-Eigenschaft erfüllt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n \geq N : |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Also ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die nach dem Vollständigkeitsaxiom (1) in \mathbb{R} konvergiert. Setze $x := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Für festes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_k \leq a_n \leq b_n \leq a_k \quad \text{für alle } n \geq k.$$

Mit **Satz 4.14(a)** gilt dann

$$a_k \leq x \leq b_k \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N},¹³$$

also $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$.

¹²Da unsere Intervalle als Mengen immer unendlich viele Elemente enthalten, besteht kein Konflikt mit der Notation $|M|$ für endliche Mengen M .

¹³Die konstante Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_k, a_k, \dots)$ konvergiert gegen a_k und erfüllt $c_n \leq a_n$ für alle $n \geq k$, also gilt auch $a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \leq \lim_{k \rightarrow \infty} a_n = x$. Analog folgert man $x \leq b_k$.

Eindeutigkeit: Seien $x, y \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$, also $x, y \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$0 \leq |x - y| \leq |I_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

mit dem Quetschlemma **Satz 4.14(b)** erhält man $|x - y| = 0$ und somit $x = y$.

(2) \Rightarrow (1): Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt dann ($\varepsilon = 2^{-k}$)

$$\exists n_k \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_k : |a_n - a_m| < 2^{-k}.$$

Dabei können wir die n_k so wählen, dass

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

(wäre etwa $n_{k+1} \leq n_k$, so können wir n_{k+1} durch $n_k + 1$ ersetzen). Setze

$$I_k := \{x \in \mathbb{R} : |x - a_{n_k}| \leq 2^{-k+1}\} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Sei $x \in I_{k+1}$, dann gilt

$$\begin{aligned} |x - a_{n_k}| &= |x - a_{n_{k+1}} + a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \\ &\leq |x - a_{n_{k+1}}| + |a_{n_{k+1}} - a_{n_k}| \\ &\leq 2^{-k} + 2^{-k} = 2^{-k+1}, \end{aligned}$$

also $x \in I_k$. Somit hat man die Inklusion $I_{k+1} \subseteq I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Weiterhin gilt

$$|I_k| = 2^{-k+2} = \frac{4}{2^k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Somit können wir das Intervallschachtelungsprinzip (2) verwenden: Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} I_k = \{a\}$. Wir wollen zeigen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Wir wissen bereits:

- Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $a \in I_k$, also $|a - a_{n_k}| \leq 2^{-k+1}$.
- Für alle $n \geq n_k$ ist $|a_n - a_{n_k}| < 2^{-k}$.

Sei also $\varepsilon > 0$, dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$ mit $2^{-k+2} < \varepsilon$ (da $2^{-k+2} \rightarrow 0$). Für alle $n \geq n_k$ gilt also

$$|a - a_n| \leq |a - a_{n_k}| + |a_{n_k} - a_n| < 2^{-k+1} + 2^{-k} < 2^{-k+2} < \varepsilon,$$

also konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$. □

Bemerkung 5.8. (1) Das Intervallschachtelungsprinzip gilt nur für abgeschlossene Intervalle, da etwa

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right] = \emptyset.$$

(2) Das Vollständigkeitsaxiom (mit Cauchy-Folgen) benutzt weniger Struktur von \mathbb{R} als das Intervallschachtelungsprinzip und ist deshalb besser geeignet, um Vollständigkeit in allgemeineren Situationen zu definieren.

Wir brauchen möglichst konkrete Beschreibungen, wann eine Folge konvergiert (ohne, dass wir den Grenzwert schon *a priori*, also im Vorhinein, kennen). Konvergente Folgen sind beschränkt, die Umkehrung gilt natürlich nicht. Trotzdem liefert uns Beschränktheit wichtige Information über eine Folge: Zumindest ein Teil der Folge muss konvergieren.

Definition 5.9. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots$$

eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen. Dann heißt die Folge

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \dots)$$

Teilfolge der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beispiel 5.10. Für $n_k = 3k - 1$ ist

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, a_{n_4}, \dots) = (a_2, a_5, a_8, a_{11}, \dots)$$

eine Teilfolge von

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \dots).$$

Lemma 5.11. Sei $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Falls $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, so konvergiert auch $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und es gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Beweis. Sei $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $a := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Wegen $n_k \geq k$ folgt $n_k \geq N$ für alle $k \geq N$, also $|a - a_{n_k}| < \varepsilon$ für alle $k \geq N$ und somit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$. \square

Satz 5.12 (Bolzano-Weierstraß). Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.

Bemerkung 5.13. (1) Es gibt unbeschränkte Folgen, die keine konvergente Teilfolge besitzen, etwa $a_n = n$. Allerdings gilt: Jede Folge reeller Zahlen besitzt eine Teilfolge, die entweder konvergent oder bestimmt divergent ist.

(2) Grenzwerte von Teilfolgen heißen auch *Häufungspunkte* der ursprünglichen Folge.

(3) Der Satz von Bolzano-Weierstraß ist eigentlich keine Aussage über Folgen, sondern über den Raum, in dem sie Werte annehmen. Die Aussage ist eigentlich, dass jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ "kompakt" ist: Wenn man unendlich viele Zahlen in $[a, b]$ verteilt, müssen sie sich irgendwo "häufen".

Beweis von Satz 5.12. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann existieren $A, B \in \mathbb{R}$ mit $A \leq a_n \leq B$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren eine Folge $(I_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ von abgeschlossenen Intervallen $I_k \subseteq \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ enthält I_k unendlich viele Folgenglieder von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.¹⁴
- (ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $I_k \subseteq I_{k-1}$.
- (iii) Für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt $|I_k| = 2^{-k} \cdot |I_0|$.

Dabei gehen wir induktiv vor:

¹⁴Im Sinne von: Es gibt unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n \in I_k$. Wir fordern hier *nicht*, dass $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap I_k$ unendlich viele Elemente enthält.

- Wir beginnen mit $I_0 := [A, B]$, was alle (unendlich vielen) Folgenglieder von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ enthält und $|I_0| = 2^{-0} \cdot |I_0|$ erfüllt.
- Sei nun $I_k = [a_k, b_k]$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ konstruiert. Wir können I_k in zwei gleich große Hälften der Länge $\frac{b_k - a_k}{2} = \frac{|I_k|}{2}$ zerlegen:

$$I_k = \left[a_k, \frac{a_k + b_k}{2} \right] \cup \left[\frac{a_k + b_k}{2}, b_k \right]$$

Da I_k unendlich viele Folgenglieder enthält, muss dies auch für (mindestens) eine der beiden Hälften gelten, diese wählen wir als I_{k+1} . Per Konstruktion ist $I_{k+1} \subseteq I_k$, induktiv gilt $|I_{k+1}| = \frac{1}{2}|I_k| = 2^{-(k+1)}|I_0|$.

Nun definieren wir induktiv eine streng monoton wachsende Folge natürlicher Zahlen $(n_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ mit der Eigenschaft, dass $a_{n_k} \in I_k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

- Wir beginnen mit $n_0 := 1$, es gilt $a_{n_0} = a_1 \in [A, B] = I_0$.
- Seien $n_0 < n_1 < n_2 < \dots < n_k$ bereits gewählt. Da I_{k+1} unendlich viele Folgenglieder enthält, muss es ein $n_{k+1} > n_k$ geben mit $a_{n_{k+1}} \in I_{k+1}$ (sonst würde I_{k+1} höchstens n_k -viele Folgenglieder enthalten).

Abschließend zeigen wir, dass die so konstruierte Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert: Sei $\varepsilon > 0$. Wegen $|I_k| = 2^{-k} \cdot |I_0| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|I_N| < \varepsilon$. Für alle $k, l \geq N$ gilt dann

$$a_{n_k} \in I_k \subseteq I_N \quad \text{und} \quad a_{n_l} \in I_l \subseteq I_N,$$

und daher

$$|a_{n_k} - a_{n_l}| \leq |I_N| < \varepsilon.$$

Also ist $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchy-Folge und somit konvergent.¹⁵ □

Während beschränkte Folgen im Allgemeinen nur konvergierende Teilfolgen besitzen, so gibt es doch eine wichtige Klasse von Folgen, bei denen Beschränktheit die Konvergenz der ganzen Folge impliziert.

Definition 5.14. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt...

- (i) ... *monoton wachsend*, falls $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) ... *streng monoton wachsend*, falls $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (iii) ... *monoton fallend*, falls $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- (iv) ... *streng monoton fallend*, falls $a_n > a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Statt "wachsend" sagt man auch "steigend". Eine Folge heißt *monoton*, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

¹⁵Der Grenzwert a von $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}_0}$ erfüllt $\{a\} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} I_k$ nach dem Intervallschachtelungsprinzip.

Satz 5.15. Jede beschränkte monotone Folge reeller Zahlen ist konvergent.

Beweis. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte monotone Folge reeller Zahlen. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (5.12) gibt es eine konvergente Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sei $a := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$. Wir zeigen, dass dann auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zunächst monoton wachsend. Dann gilt $a_{n_k} \leq a$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (wäre $a_{n_k} > a$, hätte jedes Folgenglied ab n_k mindestens einen Abstand von $a_{n_k} - a > 0$ von a , was die Konvergenzeigenschaft verletzt). Da $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist, gilt $n_n \geq n$ und damit $a_n \leq a_{n_n} \leq a$, also folgt sogar $a_n \leq a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es aufgrund der Konvergenz der Teilfolge ein $k \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_{n_k}| < \varepsilon$. Für alle $n \geq n_k$ gilt dann $a_{n_k} \leq a_n \leq a$ und damit

$$|a - a_n| = a - a_n \leq a - a_{n_k} = |a - a_{n_k}| < \varepsilon,$$

also konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a .

Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend, so ist $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend und nach dem bisher bewiesenen konvergent. Mit den Grenzwertsätzen konvergiert dann auch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Satz 5.16. Seien $a > 0$ und $x_0 > 0$ reelle Zahlen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir rekursiv

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right).$$

Dann konvergiert die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen die *Quadratwurzel* von a , also die eindeutig bestimmte positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Beweis. Nach Konstruktion gilt $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Außerdem gilt $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (aber nicht unbedingt für $n = 0$), denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} x_n^2 - a &= \frac{1}{4} \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}} \right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4} \left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2} \right) - a \\ &= \frac{1}{4} \left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}} \right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

und somit

$$x_n - x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) = \frac{1}{2} \left(x_n - \frac{a}{x_n} \right) = \frac{1}{2x_n} (x_n^2 - a) \geq 0.$$

Somit ist die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt (nach unten durch 0 und nach oben durch x_1) und monoton fallend. Mit Satz 5.15 existiert $x := \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}$ und wegen Satz 4.14 gilt $x \geq 0$. Aus der Definition der x_{n+1} erhält man durch Umformung $2x_{n+1}x_n - x_n^2 - a = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Einerseits gilt also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2x_{n+1}x_n - x_n^2 - a) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

andererseits gilt mit den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2x_{n+1}x_n - x_n^2 - a) = 2 \cdot x \cdot x - x^2 - a = x^2 - a,$$

also gilt $x^2 = a$ und wegen $a > 0$ folgt $x > 0$. Somit konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ gegen eine positive Lösung der Gleichung $x^2 = a$.

Es verbleibt die Eindeutigkeit zu zeigen: Seien $x, y > 0$ mit $x^2 = a = y^2$, dann gilt

$$0 = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y),$$

also $x + y = 0$ oder $x - y = 0$. Wegen $x, y > 0$ gilt auch $x + y > 0$, also folgt $x - y = 0$ und somit $x = y$. \square

Bemerkung 5.17. (1) Die *Konvergenzgeschwindigkeit* in diesem Algorithmus ist sehr schnell, nämlich quadratisch: Setzt man den Fehler f_n im n -ten Schritt an in der Form $x_n = \sqrt{a}(1 + f_n)$, so kann man zeigen, dass $f_{n+1} \leq \frac{1}{2}f_n^2$, d.h. in jedem Iterationsschritt verdoppelt sich die Anzahl der korrekten Dezimalstellen in etwa. Beispielsweise für $a = 2$ und $x_0 = 1$ erhält man:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{1} \right) = \frac{3}{2} = 1.5, \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{4}{3} \right) = \frac{17}{12} = 1.41\bar{6}, \\ x_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{17}{12} + \frac{24}{17} \right) = \frac{577}{408} = 1.4142156862745098039, \\ &\vdots \\ x &= 1.41421356237309504880 \dots \end{aligned}$$

(2) Analog kann man für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ die Existenz der k -ten Wurzel $\sqrt[k]{a}$ für $a > 0$ mit der Folge

$$x_{n+1} := \frac{1}{k} \left((k-1)x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right)$$

beweisen.

Satz 5.18. Die Folge $(\sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent und $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $x_n := \sqrt[n]{n} - 1$, dann gilt $x_n \geq 0$.¹⁶ Für $n \geq 2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} n &= (1 + x_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_n^k = \underbrace{1 + nx_n}_{\geq 0} + \binom{n}{2} x_n^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^n \binom{n}{k} x_n^k}_{\geq 0} \geq \binom{n}{2} x_n^2 \\ &= \frac{n(n-1)}{2} x_n^2, \end{aligned}$$

also

$$x_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Mit **Satz 4.14** folgt $x_n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, und daraus folgt dann, dass auch $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.¹⁷ \square

¹⁶Wäre $\sqrt[n]{n} < 1$, so würde aus den Ordnungsaxiomen der Widerspruch $n = (\sqrt[n]{n})^n < 1^n = 1$ folgen.

¹⁷Dazu überlege man sich, dass aus der Tatsache, dass x_n nicht gegen 0 konvergiert, folgt, dass auch x_n^2 nicht gegen 0 konvergieren kann.

Korollar 5.19. Sei $a > 0$. Dann konvergiert die Folge $(\sqrt[n]{a})_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 1.

Beweis. Im Fall $a \geq 1$ und für $n \geq a$ gilt

$$1 \leq \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

mit dem Quetschlemma folgt $\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

Im Fall $a \leq 1$ ist $\frac{1}{a} \geq 1$, also nach dem bisher gezeigten

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

also mit den Grenzwertsätzen auch $\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. □

Bemerkung 5.20. Das Vollständigkeitsaxiom erlaubt die Darstellung reeller Zahlen durch b -adische Brüche: Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. Ein b -adischer Bruch ist eine Reihe der Gestalt

$$\pm \sum_{n=-k}^{\infty} a_n b^{-n} \quad \text{mit } k, a_n \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und } 0 \leq a_n < b.$$

Für festes b schreibt man üblicherweise

$$\pm a_{-k} \dots a_{-1} a_0 . a_1 a_2 a_3 \dots$$

Hierbei entspricht $b = 10$ dem herkömmlichen Dezimalbruch, für $b = 2$ erhält man dyadische Brüche. Es gilt

- (i) Jeder b -adische Bruch stellt eine Cauchy-Folge dar, konvergiert also gegen eine reelle Zahl.
- (ii) Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. Dann lässt sich jede reelle Zahl in einen b -adischen Bruch entwickeln.
- (iii) Die Darstellung ist nicht eindeutig, die Mehrdeutigkeiten sind aber nur von der Form

$$\begin{aligned} & \pm a_{-k} \dots a_{-1} a_0 . a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} a_n (b-1)(b-1)(b-1) \dots \\ & = \pm a_{-k} \dots a_{-1} a_0 . a_1 a_2 a_3 \dots a_{n-1} (a_n + 1) 000 \dots \end{aligned}$$

6. Konvergenzkriterien für Reihen

Wir haben bereits gesehen, dass man zu jeder Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ betrachten kann, genauer die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$. In diesem Kapitel betrachten wir einige Kriterien, mit denen man Reihen auf Konvergenz und Divergenz untersuchen kann.

Satz 6.1 (Cauchy-Kriterium). Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m \geq n \geq N : \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| < \varepsilon.$$

Beweis. Sei $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$. Per Definition konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergiert. Dies wiederum ist mit **Satz 5.2** und dem Vollständigkeitsaxiom (**5.3**) äquivalent dazu, dass $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Wegen $s_m - s_n = \sum_{k=n+1}^m a_k$ ist die Bedingung in **Satz 6.1** genau die Cauchy-Eigenschaft für $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Satz 6.2 (Nullfolgen-/Trivial-/Divergenzkriterium). Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, muss $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge sein.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Laut **Satz 6.1** gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m := n + 1 > n \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k \right| < \varepsilon.$$

Für alle $n \geq N$ gilt dann aber auch

$$|0 - a_{n+1}| = |a_{n+1}| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+1} a_k \right| < \varepsilon,$$

also konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Null. \square

Bemerkung 6.3. Das Beispiel $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ zeigt, dass die Umkehrung von **Satz 6.2** nicht gilt. Die Tatsache, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, ist zwar notwendig, aber *nicht* hinreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Satz 6.4. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert genau dann, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ihrer Partialsummen beschränkt ist.

Beweis. Wegen

$$s_{n+1} = s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n$$

ist die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend. Laut **Satz 4.11** ist jede konvergente Folge beschränkt, laut **Satz 5.15** ist jede beschränkte monotone Folge konvergent, also gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergent} \xLeftrightarrow{\text{Def.}} (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ konvergent} \xLeftrightarrow[5.15]{4.11} (s_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ beschränkt.} \quad \square$$

Beispiel 6.5. (1) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergiert nicht, da $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k})_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist (vgl. [Beispiel 4.21](#)).

(2) Wir können zwar im Augenblick immer noch nicht den Wert $\frac{\pi}{6}$ der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ berechnen, aber wir können mit [Satz 6.4](#) zumindest Konvergenz beweisen: Wegen $\frac{1}{k^2} > 0$ reicht es zu zeigen, dass $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist. Aus [Beispiel 4.21](#) wissen wir, dass $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)k} = \frac{n}{n+1} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (für $n = 0$ gilt die Aussage klarerweise auch). Also gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ wegen $\frac{1}{k^2} > 0$ schon

$$0 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)k} \leq 1 + 1 = 2,$$

somit ist $(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2})_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

Satz 6.6 (Majorantenkriterium). Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen mit $|a_n| \leq |c_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergiert, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und es gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|.^{18}$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ konvergiert, gibt es laut dem Cauchy-Kriterium ([6.1](#)) ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m \geq n \geq N$ gilt

$$\left| \sum_{k=n+1}^m |c_k| \right| < \varepsilon.$$

Dann gilt aber auch

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \underbrace{|a_k|}_{\leq |c_k|} \leq \sum_{k=n+1}^m \underbrace{|c_k|}_{\geq 0} = \left| \sum_{k=n+1}^m |c_k| \right| < \varepsilon,$$

also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ laut dem Cauchy-Kriterium. Aus

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sum_{k=1}^n |c_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

folgt mit [Satz 4.14](#) dann

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|. \quad \square$$

Bemerkung 6.7. Im Beweis von [Satz 6.6](#) haben wir verwendet, dass aus $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ auch $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$ folgt. Dies ist eine Konsequenz der inversen Dreiecksungleichung: Weil $||x| - |y|| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, haben wir

$$||a| - |a_n|| \leq |a - a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

¹⁸Man nennt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ dann eine *Majorante* von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Definition 6.8. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Bemerkung 6.9. (1) Jede absolut konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert auch im normalen Sinne, da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ eine konvergente Majorante ist.

(2) Aber nicht jede konvergente Reihe konvergiert auch absolut: Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ konvergiert (gegen $\ln(2)$), ist aber nicht absolut konvergent, da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty.$$

(3) Gilt $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so folgt $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$, also ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent, wenn sie absolut konvergent ist.

Satz 6.10 (Quotientenkriterium). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe.

(1) Falls ein $0 < \theta < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$a_n \neq 0 \quad \text{und} \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \theta \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0,$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

(2) Falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$a_n \neq 0 \quad \text{und} \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1 \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0,$$

dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. (1) Es genügt, die absolute Konvergenz von $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_0+k}$ zu beweisen, da die ersten $n_0 - 1$ Terme das Konvergenzverhalten der Reihe nicht beeinflussen. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_{n_0+k}| = |a_{n_0}| \cdot \underbrace{\left| \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right|}_{\leq \theta} \cdot \dots \cdot \underbrace{\left| \frac{a_{n_0+k}}{a_{n_0+k-1}} \right|}_{\leq \theta} \leq |a_{n_0}| \cdot \theta^k =: c_k.$$

Dann ist $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ eine Majorante von $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_0+k}$, die wegen

$$\sum_{k=0}^n c_k = \sum_{k=0}^n |a_{n_0}| \cdot \theta^k = |a_{n_0}| \sum_{k=0}^n \theta^k \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a_{n_0}| \frac{1}{1 - \theta}$$

konvergent ist (geometrische Reihe). Also ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n_0+k}$ konvergent laut Majorantenkriterium (6.6).

(2) Aus $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$ und $a_n \neq 0$ für alle $n \geq n_0$ folgt $|a_{n+1}| \geq |a_n| > 0$, also

$$|0 - a_n| = |a_n| \geq |a_{n_0}| > 0 \quad \text{für alle} \quad n \geq n_0.$$

Somit kann $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge sein. Laut dem Nullfolgenkriterium (6.2) divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. \square

Bemerkung 6.11. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, für die $\alpha := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in \mathbb{R}$ existiert.

(1) Aus dem Quotientenkriterium folgt direkt:

- Im Fall $\alpha < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.
- Im Fall $\alpha > 1$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Ist hingegen $\alpha = 1$, so kann man mit dem Quotientenkriterium keine Aussage treffen:

- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert absolut und es gilt

$$\frac{\left| \frac{1}{(n+1)^2} \right|}{\left| \frac{1}{n^2} \right|} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert und es gilt

$$\frac{\left| \frac{1}{n+1} \right|}{\left| \frac{1}{n} \right|} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

In beiden Fällen hat man also $\alpha = 1$, obwohl eine Reihe absolut konvergiert und die andere divergiert.

Satz 6.12 (Wurzelkriterium). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe.

(1) Falls ein $0 < \theta < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

(2) Falls ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1 \quad \text{für alle } n \geq n_0,$$

dann divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. (1) Wiederum genügt es, die absolute Konvergenz von $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ zu beweisen:

Für alle $n \geq n_0$ gilt $\sqrt[n]{|a_n|} \leq \theta$, also auch $|a_n| \leq \theta^n$. Somit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \theta^n$ eine konvergente Majorante von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Laut dem Majorantenkriterium (6.6) konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.

(2) Aus $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für alle $n \geq n_0$ folgt $|a_n| \geq 1^n = 1$, also ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Laut dem Nullfolgenkriterium (6.2) divergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. \square

Bemerkung 6.13. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, für die $\beta := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R}$ existiert.

(1) Aus dem Wurzelkriterium folgt direkt:

- Im Fall $\beta < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut.
- Im Fall $\beta > 1$ divergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(2) Ist hingegen $\beta = 1$, so kann man mit dem Wurzelkriterium keine Aussage treffen:

- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert absolut und es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^2}\right|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert und es gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{1}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

In beiden Fällen hat man also $\beta = 1$, obwohl eine Reihe absolut konvergiert und die andere divergiert.

Satz 6.14 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen). Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen mit $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Beweis. Sei $s_n := \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} a_k$ die n -te Partialsumme der Reihe. Wir untersuchen die Teilfolgen $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ und $(s_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+3} a_{2n+2} + (-1)^{2n+2} a_{2n+1} = a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0,$$

da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Somit gilt $s_{2n} \leq s_{2n+2} = s_{2(n+1)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt analog

$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = (-1)^{2n+2} a_{2n+1} + (-1)^{2n+1} a_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0,$$

da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Somit gilt $s_{2n+1} \leq s_{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also ist $(s_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend.

Nun vergleichen wir die beiden Teilfolgen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$s_{2n} - s_{2n-1} = (-1)^{2n+1} a_{2n} = -a_{2n} \leq 0.$$

Somit gilt $s_{2n} \leq s_{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und daher

$$s_2 \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq s_1 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Einerseits ist die Folge $(s_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ also monoton wachsend und beschränkt, laut [Satz 5.15](#) existiert der Grenzwert $s := \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} \in \mathbb{R}$.

Andererseits ist die Folge $(s_{2n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt, wiederum laut [Satz 5.15](#) existiert der Grenzwert $s' := \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n-1} \in \mathbb{R}$.

Aus $s_{2n} \leq s_{2n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt mit [Satz 4.14](#) auch $s \leq s'$. Somit gilt

$$0 \leq s' - s \leq s_{2n+1} - s_{2n} = a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also $s' = s$ und somit $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s \in \mathbb{R}$. Insbesondere konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$. □

Beispiel 6.15. Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ konvergiert (aber nicht absolut, da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$).

Definition 6.16. Eine konvergente Reihe, die nicht absolut konvergiert, heißt *bedingt konvergent*.

Bemerkung 6.17. Absolut konvergente Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergieren, weil dort die a_n hinreichend schnell gegen Null gehen. Bei bedingt konvergenten Reihen ist dies nicht der Fall und die Konvergenz beruht dort darauf, dass sich beim Aufsummieren positive und negative Größen teilweise wegheben. In dem Fall ist dann die Reihenfolge des Aufsummierens relevant und ein Umordnen der Summanden sollte besser unterlassen werden.

Beispiel 6.18 (Umordnung von Reihen). Laut [Beispiel 6.15](#) konvergiert die alternierende harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

(i) Wir ordnen die Summanden zunächst wie folgt um:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\ & \quad + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) - \frac{1}{6} \\ & \quad + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15} \right) - \frac{1}{8} \\ & \quad + \dots \\ & \quad + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) - \frac{1}{2n + 2} \\ & \quad + \dots \end{aligned}$$

Alle negativen Summanden kommen vor, aber mit immer größerer Verzögerung gegenüber den positiven Summanden. Es gilt

$$\underbrace{\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 1}}_{2^{n-1} \text{ Summanden, jeder } \geq \frac{1}{2^{n+1}}} \geq 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{4},$$

und somit für $n \geq 3$

$$\left(\frac{1}{2^n + 1} + \frac{1}{2^n + 3} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} \right) - \frac{1}{2n + 2} \geq \frac{1}{4} - \frac{1}{2n + 2} \geq \frac{1}{8}.$$

Somit sind die Partialsummen der umgeordneten Reihe unbeschränkt, die umgeordnete Reihe divergiert (und zwar bestimmt gegen ∞).

(ii) Nun betrachten wir folgende Umordnung:

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}}_{=\frac{1}{2}(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k})} + \dots \\ & = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Hier kommen erneut alle Summanden vor, aber durch die Umordnung wurde der Wert der ursprünglichen Reihe auf die Hälfte reduziert.

Definition 6.19. Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe und $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ heißt *Umordnung* der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Eine umgeordnete Reihe besteht also aus denselben Summanden wie die ursprüngliche Reihe, nur eben in einer anderen Reihenfolge.

Bemerkung 6.20. Jede bedingt konvergente Reihe kann so umgeordnet werden, dass die Umordnung gegen einen beliebigen Wert $x \in \mathbb{R}$ konvergiert oder sie bestimmt divergiert.

Satz 6.21 (Umordnungssatz). Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe. Dann konvergiert auch jede Umordnung dieser Reihe absolut gegen denselben Grenzwert.

Beweis. Sei $A := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ der Wert der Reihe und $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv. Sei $\varepsilon > 0$. Wegen der absoluten Konvergenz gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| - \sum_{k=1}^{n_0-1} |a_k| \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dann ist auch

$$\left| A - \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=n_0}^{\infty} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da τ surjektiv ist, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\{1, 2, \dots, n_0 - 1\} \subseteq \{\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(N)\}.$$

Wegen der Injektivität von τ gilt dann

$$\left| \sum_{k=1}^n a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k \right| \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Für alle $n \geq N$ ist also

$$\left| \sum_{k=1}^n a_{\tau(k)} - A \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_{\tau(k)} - \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{n_0-1} a_k - A \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Somit konvergiert $\sum_{k=1}^n a_{\tau(k)}$ gegen A . Die absolute Konvergenz folgt durch Anwenden des Bewiesenen auf die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. \square

7. Die Exponentialfunktion

Wir wollen jetzt das Potenzieren a^b als Funktion betrachten. Wir können es für festes b als Funktion in a betrachten; zumindest für $a > 0$ und rationales b haben wir eine Vorstellung, was das sein soll: Für $b = 2$ etwa ist es einfach die algebraische Operation des Quadrierens, für $b = \frac{1}{2}$ die Operation des Wurzelziehens (für die wir zumindest einen Approximationsalgorithmus haben); allgemein wissen wir im Prinzip, wie wir uns a^b für rationales $b = \frac{p}{q}$ verschaffen können, nämlich als

$$a^b = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Allerdings hängt die Berechnung doch sehr von b ab, und für nicht-rationales b ist die Sachlage nicht so klar. Insbesondere wenn wir das Potenzieren jetzt als Funktion $x \mapsto e^x$ in $b = x$, für festgehaltenes $a = e$ betrachten wollen, dann brauchen wir eine gleichförmige Beschreibung, die für alle x , insbesondere auch für die nicht-rationalen, gilt. Eine solche Beschreibung ist gegeben durch eine Reihendarstellung

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Bemerkung 7.1. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

absolut: Sei

$$a_n := \frac{x^n}{n!} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Für $x = 0$ ist die Konvergenz klar, da nur $a_0 = 1$ von Null verschieden ist. Für $x \neq 0$ gilt

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{|x|^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot |x|^n} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also folgt die absolute Konvergenz aus dem Quotientenkriterium 6.10.

Definition 7.2. Die Abbildung

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

heißt *Exponentialfunktion*. Die *Eulersche Zahl* ist

$$e := \exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.71828 \dots$$

Satz 7.3 (Restgliedabschätzung). Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $N \in \mathbb{N}_0$ mit $|x| \leq \frac{N+2}{2}$ gilt

$$|R_{N+1}(x)| \leq 2 \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}, \quad \text{wobei} \quad R_{N+1}(x) := \exp(x) - \sum_{n=0}^N \frac{x^n}{n!}.$$

Beweis. Wegen $|x| \leq \frac{N+2}{2}$ gilt

$$\left(\frac{|x|}{N+2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Mit der geometrischen Reihe folgt

$$\begin{aligned} |R_{N+1}(x)| &= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+N+1}}{(n+N+1)!} \\ &= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \frac{|x|^2}{(N+2)(N+3)} + \dots \right) \\ &\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{|x|}{N+2} + \left(\frac{|x|}{N+2}\right)^2 + \dots \right) \\ &\leq \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right) \\ &= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} \cdot 2. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 7.4. Wir betrachten die Abschätzung für $x = 1$. Da $|1| \leq \frac{N+2}{2}$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$ gilt, haben wir die Restgliedabschätzung für $e = \exp(1) = 2.71828\dots$ für alle $N \in \mathbb{N}_0$, also:

$$\begin{aligned} N = 0: \quad |e - 1| &= |e - 1| && \leq \frac{2}{1!} = 2 \\ N = 1: \quad |e - 2| &= |e - (1 + 1)| && \leq \frac{2}{2!} = 1 \\ N = 2: \quad |e - 2.5| &= \left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} \right) \right| && \leq \frac{2}{3!} = \frac{1}{3} \\ N = 3: \quad |e - 2.\bar{6}| &= \left| e - \left(1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) \right| && \leq \frac{2}{4!} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Satz 7.5 (Cauchy-Produkt von Reihen). Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0.$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right).$$

Beweis. Für $N \in \mathbb{N}_0$ seien

$$A_N := \sum_{n=0}^N a_n, \quad B_N := \sum_{n=0}^N b_n \quad \text{sowie} \quad C_N := \sum_{n=0}^N c_n.$$

Wir zeigen, dass $A_N \cdot B_N - C_N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Seien

$$Q_N := \{(k, \ell) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : 0 \leq k \leq N \wedge 0 \leq \ell \leq N\}$$

und

$$\Delta_N := \{(k, \ell) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 : k + \ell \leq N\}.$$

Dann gilt

$$A_N \cdot B_N = \left(\sum_{n=0}^N a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^N b_n \right) = \sum_{(k, \ell) \in Q_N} a_k b_\ell \quad \text{und} \quad C_N = \sum_{(k, \ell) \in \Delta_N} a_k b_\ell.$$

Wegen $\Delta_N \subseteq Q_N$ gilt

$$A_N \cdot B_N - C_N = \sum_{(k, \ell) \in Q_N \setminus \Delta_N} a_k b_\ell$$

Sei $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ die größte Zahl in \mathbb{N}_0 , die kleiner oder gleich $\frac{N}{2}$ ist.¹⁹ Dann ist $Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \subseteq \Delta_N$ (vgl. **Abbildung 5**), also

$$Q_N \setminus \Delta_N \subseteq Q_N \setminus Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}.$$

Seien nun $A_N^* := \sum_{n=0}^N |a_n|$ und $B_N^* := \sum_{n=0}^N |b_n|$, dann gilt

$$A_N^* \cdot B_N^* = \sum_{(k, \ell) \in Q_N} |a_k| |b_\ell|,$$

also

$$\begin{aligned} |A_N \cdot B_N - C_N| &= \left| \sum_{(k, \ell) \in Q_N \setminus \Delta_N} a_k b_\ell \right| \leq \sum_{(k, \ell) \in Q_N \setminus \Delta_N} |a_k| |b_\ell| \\ &\leq \sum_{(k, \ell) \in Q_N \setminus Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}} |a_k| |b_\ell| \\ &= A_N^* \cdot B_N^* - A_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* \cdot B_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^*. \end{aligned}$$

¹⁹Man nennt die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lfloor x \rfloor := \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ auch *Abrundungsfunktion* oder (*untere*) *Gauß-Klammer*. Ihr Gegenpart ist $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$, $x \mapsto \lceil x \rceil := \min\{m \in \mathbb{Z} : m \geq x\}$, die *Aufrundungsfunktion* oder *obere Gauß-Klammer*. Man schreibt auch $\text{floor}(x) := \lfloor x \rfloor$ und $\text{ceil}(x) := \lceil x \rceil$ von den englischen Begriffen *floor function* und *ceiling function*.

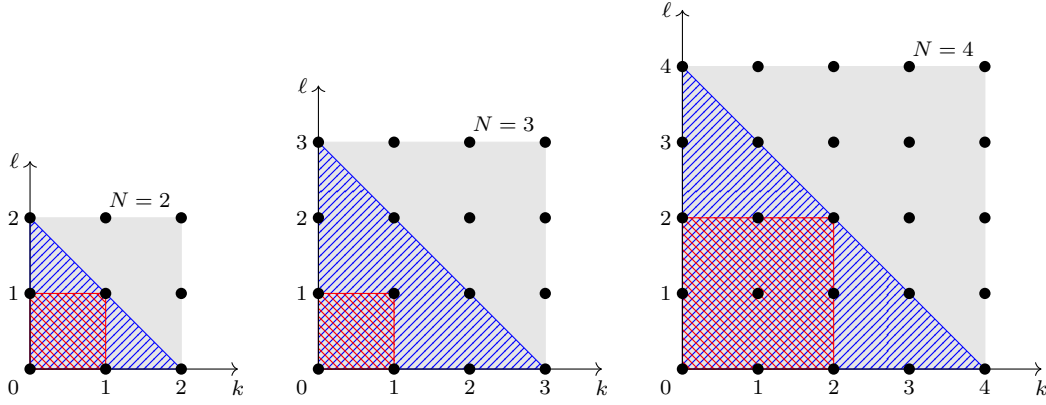


Abbildung 5: Graphische Darstellung der Mengen Q_N (grau hinterlegtes Quadrat), Δ_N (blau schraffiertes Dreieck) und $Q_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}$ (rot schraffiertes Quadrat) für einige kleine Werte von N , wobei Randpunkte zu den jeweiligen Mengen dazugehören.

Da die ursprünglichen Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergieren, konvergiert auch die Folge $(A_N^* \cdot B_N^*)_{N \in \mathbb{N}}$ und ist somit eine Cauchy-Folge. Es folgt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(A_N^* \cdot B_N^* - A_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* \cdot B_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* \right) = 0,$$

also

$$|A_N \cdot B_N - C_N| \leq A_N^* \cdot B_N^* - A_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* \cdot B_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor}^* \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Dies impliziert

$$\lim_{N \rightarrow \infty} (A_N \cdot B_N - C_N) = 0$$

und somit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} C_N = \lim_{N \rightarrow \infty} (A_N \cdot B_N) = \left(\lim_{N \rightarrow \infty} A_N \right) \cdot \left(\lim_{N \rightarrow \infty} B_N \right).$$

Folglich konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit Grenzwert $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n)$.

Um die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ zu erhalten, benutzt man

$$|c_n| \leq \sum_{k=0}^n |a_k| |b_{n-k}|$$

und wendet das Bewiesene auf die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n|$ an. Die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ folgt dann aus dem Majorantenkriterium 6.6. \square

Satz 7.6 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y).$$

Beweis. Laut Satz 7.5 gilt $\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} \right) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} (x + y)^n$$

nach dem binomischen Lehrsatz, also

$$\exp(x) \cdot \exp(y) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x + y)^n}{n!} = \exp(x + y). \quad \square$$

Korollar 7.7. (1) Für alle $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp\left(\sum_{\ell=1}^n x_\ell\right) = \prod_{\ell=1}^n \exp(x_\ell).$$

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\exp(x) > 0$.

(4) Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt $\exp(n) = e^n$.

(5) Für alle $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$) gilt $\exp(r) = \sqrt[q]{e^p} = e^r$.²⁰

Beweis. (1) Folgt mittels vollständiger Induktion aus der Funktionalgleichung.

(2) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) \cdot \exp(-x) = \exp(x - x) = \exp(0) = 1,$$

also $\exp(x) \neq 0$ und $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

(3) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \exp\left(\frac{x}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Wegen (2) gilt $\exp(x) \neq 0$, also folgt $\exp(x) > 0$.

(4) Für $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\exp(n) = \exp\left(\sum_{\ell=1}^n 1\right) = \prod_{\ell=1}^n \exp(1) = \prod_{\ell=1}^n e = e^n.$$

Für $n = 0$ ist $\exp(0) = 1 = e^0$.

Für $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ folgt $-n \in \mathbb{N}$ und somit

$$\exp(n) = \frac{1}{\exp(-n)} = \frac{1}{e^{-n}} = e^n.$$

Folglich gilt $\exp(n) = e^n$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

(5) Es gilt

$$\exp(p) = \exp(qr) = \exp(r)^q.$$

Wegen $\exp(r) > 0$ ist also

$$\exp(r) = \sqrt[q]{\exp(p)} = (e^p)^{\frac{1}{q}} = e^{\frac{p}{q}} = e^r. \quad \square$$

²⁰Man schreibt daher auch oft $e^x := \exp(x)$ für $x \in \mathbb{R}$.

8. Teilmengen von \mathbb{R}

Definition 8.1. Eine Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ heißt *nach oben* (bzw. *nach unten*) *beschränkt*, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $x \leq K$ (bzw. $x \geq K$) für alle $x \in D$ gilt. Die Menge D heißt *beschränkt*, wenn D nach oben und nach unten beschränkt ist, wenn es also ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $|x| \leq K$ für alle $x \in D$ gilt.

Definition 8.2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

- (1) Eine Zahl $K \in \mathbb{R}$ heißt *Supremum* oder *kleinste obere Schranke* von D , falls folgende Eigenschaften gelten:
 - (a) K ist eine obere Schranke von D (also $x \leq K$ für alle $x \in D$).
 - (b) Ist $K' \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von D , so gilt $K \leq K'$.
- (2) Eine Zahl $L \in \mathbb{R}$ heißt *Infimum* oder *größte untere Schranke* von D , falls folgende Eigenschaften gelten:
 - (a) L ist eine untere Schranke von D (also $x \geq L$ für alle $x \in D$).
 - (b) Ist $L' \in \mathbb{R}$ eine untere Schranke von D , so gilt $L \geq L'$.

Supremum und Infimum sind aufgrund von Teil (b) jeweils eindeutig bestimmt (falls sie existieren).

Satz 8.3 (Supremumseigenschaft von \mathbb{R}). Jede nichtleere und nach oben (bzw. nach unten) beschränkte Teilmenge $D \subseteq \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum (bzw. Infimum).

Bemerkung 8.4. Die folgenden Konzepte sind äquivalent:

- (1) Vollständigkeitsaxiom
- (2) Intervallschachtelungsprinzip
- (3) Supremumseigenschaft

Man könnte also auch die Supremumseigenschaft axiomatisch für \mathbb{R} fordern und daraus die anderen beiden Konzepte beweisen. Wir beschränken uns hier auf den Beweis der Supremumseigenschaft aus dem Intervallschachtelungsprinzip.

Beweis von Satz 8.3. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Wir konstruieren induktiv eine Folge von Intervallen $[a_n, b_n]$, so dass die folgenden Eigenschaften gelten:

- b_n ist eine obere Schranke von D .
- a_n ist keine obere Schranke von D .
- Es gilt $b_n - a_n = 2^{-n}$.

Sei $m := \min \{k \in \mathbb{Z} : k \text{ ist obere Schranke von } D\}$, dann ist $m - 1 \in \mathbb{Z}$ keine obere Schranke von D . Setze nun $a_0 := m - 1$ und $b_0 := m$, dann sind obige Anforderungen für $n = 0$ erfüllt.

Sei $[a_n, b_n]$ bereits konstruiert; setze

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] := \begin{cases} \left[\frac{a_n + b_n}{2}, b_n \right], & \text{falls } \frac{a_n + b_n}{2} \text{ keine obere Schranke von } D \text{ ist,} \\ \left[a_n, \frac{a_n + b_n}{2} \right], & \text{falls } \frac{a_n + b_n}{2} \text{ eine obere Schranke von } D \text{ ist.} \end{cases}$$

Induktiv folgt $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2^{-n} = 2^{-(n+1)}$. Es gilt

$$a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_n \leq \dots \leq b_2 \leq b_1 \leq b_0,$$

also sind $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ monotone und beschränkte Folgen. Laut **Satz 5.15** existieren die Grenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Wegen $b_n - a_n = 2^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =: s$$

(alternativ erhält man $\{s\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} [a_n, b_n]$ aus dem Intervallschachtelungsprinzip).

Es verbleibt zu zeigen, dass s das Supremum von D ist:

- (a) Sei $x \in D$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $x \leq b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$, mit **Satz 4.14** folgt im Grenzwert auch $x \leq s$. Somit ist s eine obere Schranke von D .
- (b) Sei $K' \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke von D . Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $K' \geq a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$, mit **Satz 4.14** folgt im Grenzwert auch $K' \geq s$.

Also besitzt D ein Supremum, nämlich s .

Für die duale Aussage nutzt man aus, dass D genau dann nach unten beschränkt ist, wenn $D' := \{-d \mid d \in D\}$ nach oben beschränkt ist. Ist dann s das Supremum von D' , so ist $-s$ das Infimum von D . \square

Definition 8.5. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$.

- (1) Wir bezeichnen das Supremum (bzw. das Infimum) von D mit $\sup D$ (bzw. mit $\inf D$).
- (2) Ist $\sup D \in D$, so heißt $\sup D$ auch *Maximum* von D , geschrieben $\max D$.
- (3) Ist $\inf D \in D$, so heißt $\inf D$ auch *Minimum* von D , geschrieben $\min D$.
- (4) Falls D nicht nach oben (bzw. nicht nach unten) beschränkt ist, schreiben wir $\sup D = \infty$ (bzw. $\inf D = -\infty$).

Bemerkung 8.6. (1) Falls $\sup D \in \mathbb{R}$ existiert, so muss nicht unbedingt $\sup D \in D$ gelten, aber der Beweis von **Satz 8.3** zeigt, dass es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$ gibt, die gegen $\sup D$ konvergiert: Jedes Intervall $[a_n, b_n]$ enthält mindestens ein Element $x_n \in D$ (da a_n keine obere Schranke ist aber b_n schon). Dann gilt

$$\sup D \leftarrow a_n \leq x_n \leq b_n \rightarrow \sup D,$$

also auch $x_n \rightarrow \sup D$.

- (2) Falls $\sup D = \infty$, so existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$, so dass $x_n \rightarrow \infty$.
- (3) Falls $\inf D = -\infty$, so existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $x_n \in D$, so dass $x_n \rightarrow -\infty$.

Beispiel 8.7. (1) Für $I = [a, b]$ gilt $\max I = \sup I = b$.

(2) Für $I = [a, b)$ gilt $\sup I = b$, aber I hat kein Maximum.

(3) Für $D = \{\sqrt[n]{n} \mid n \geq 2\}$ gilt $\inf D = 1$, aber D hat kein Minimum.

Definition 8.8. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Dann definieren wir den *Limes superior*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{a_k \mid k \geq n\}$$

und den *Limes inferior*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n := \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{a_k \mid k \geq n\}.$$

Dabei sind ∞ und $-\infty$ als mögliche Werte zugelassen.

Bemerkung 8.9. (1) Setze $y_n := \sup \{a_k \mid k \geq n\}$, dann ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend (oder identisch ∞), also existiert $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ (in $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

(2) Setze $x_n := \inf \{a_k \mid k \geq n\}$, dann ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend (oder identisch $-\infty$), also existiert $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ (in $\mathbb{R} \cup \{\mp\infty\}$).

(3) Da $x_n \leq y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt auch $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Beispiel 8.10. (1) Für $a_n := (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)$ gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -1$.

(2) Für $a_n := (-1)^n \cdot n$ gilt $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.

Definition 8.11. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt *Häufungspunkt* von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, falls es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gibt mit $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$.

Satz 8.12. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ der größte und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ der kleinste Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Beweis. Wir zeigen die Aussage für \limsup , die Aussage für \liminf folgt analog.

(i) Wir zeigen zunächst, dass $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist: Für $y_k := \sup \{a_n \mid n \geq k\}$ gilt $y_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$. Da $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, gilt $y_k \in \mathbb{R}$ und $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \in \mathbb{R}$. Somit existiert für festes k ein $n \geq k$ mit

$$y_k - \frac{1}{k} \leq a_n \leq y_k.$$

Wir können also streng monoton wachsende Folgen $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ und $(n_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen wählen, so dass

$$k_1 \leq n_1 < k_2 \leq n_2 < k_3 \leq n_3 < \dots$$

und

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \xleftarrow{\ell \rightarrow \infty} y_{k_\ell} - \frac{1}{k_\ell} \leq a_{n_\ell} \leq y_{k_\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Mit [Satz 4.14](#) folgt dann $a_{n_\ell} \xrightarrow{\ell \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, also ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (ii) Es bleibt zu zeigen, dass $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ der größte Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist: Sei also $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit $a_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a$. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$a \xleftarrow{k \rightarrow \infty} a_{n_k} \leq y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Mit [Satz 4.14](#) folgt $a \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$, also ist $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ der größte Häufungspunkt von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. \square

Satz 8.13. Eine beschränkte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert genau dann, wenn

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

In diesem Fall gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Beweis. (i) Sei zunächst $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$. Setze

$$y_n := \sup \{a_k \mid k \geq n\} \quad \text{und} \quad x_n := \inf \{a_k \mid k \geq n\}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dann

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \xleftarrow{n \rightarrow \infty} x_n \leq a_n \leq y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Laut [Satz 4.14](#) konvergiert $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$; weiterhin gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

- (ii) Sei nun $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent mit $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen a . Mit [Satz 8.12](#) folgt also $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ und $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$. \square

Bemerkung 8.14. Sei $a \in \mathbb{R}$. Es gilt genau dann $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $a_n < a + \varepsilon$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $a_m > a - \varepsilon$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$.

Analog gilt $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, wenn für alle $\varepsilon > 0$ die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

- (i) $a_n > a - \varepsilon$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.
- (ii) $a_m < a + \varepsilon$ für unendlich viele $m \in \mathbb{N}$.

9. Funktionen und Stetigkeit

Definition 9.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine *reelle (oder reellwertige) Funktion* auf D ist eine Abbildung $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Die Menge D heißt *Definitionsbereich* von f . Der *Graph* von f ist

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in D \times \mathbb{R} \mid y = f(x)\}.$$

Beispiel 9.2. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Wichtige Funktionen $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ sind:

(1) $f(x) = c$ für ein festes $c \in \mathbb{R}$. (konstante Funktion)

(2) $f(x) = x$, also $f = \text{id}_D$. (Identitätsfunktion)

(3) $f(x) = |x|$. (Betragfunktion)

(4) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$ (charakteristische Funktion von \mathbb{Q})

(5) $f(x) = \sqrt{x}$ für $D \subseteq [0, \infty)$. ((Quadrat-)Wurzelfunktion)

(6) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und Koeffizienten $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$: ²¹

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0. \quad (\text{Polynomfunktion})$$

(7) Für zwei Polynomfunktionen p und q mit $D \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}. \quad (\text{rationale Funktion})$$

(8) $f(x) = \exp(x)$. (Exponentialfunktion)

Definition 9.3. Seien f und g Funktionen auf $D \subseteq \mathbb{R}$ sowie $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$, λf und $f \cdot g$ Funktionen auf D , definiert durch

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x),$$

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x),$$

$$(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x).$$

Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g}$ eine Funktion auf D , definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Definition 9.4. Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ für $D, E \subseteq \mathbb{R}$. Falls $f(D) \subseteq E$, so ist $g \circ f$ eine Funktion auf D , definiert durch

$$(g \circ f)(x) := g(f(x)).$$

²¹Hierbei nehmen wir an, dass $a_n \neq 0$; n heißt dann der *Grad* von f .

Beispiel 9.5. Seien

$$\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sqrt{x} \quad \text{und} \quad q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2.$$

Dann gilt

$$\sqrt{\cdot} \circ q = |\cdot| \quad \text{und} \quad q \circ \sqrt{\cdot} = \text{id}_{[0, \infty)}$$

wobei

$$|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto |x| \quad \text{und} \quad \text{id}_{[0, \infty)} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x.$$

Definition 9.6. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Sei weiterhin $a \in \mathbb{R}$, so dass

$$\forall \varepsilon > 0 : (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap D \neq \emptyset.$$

Wir schreiben $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ für $c \in \mathbb{R}$, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Hierbei kann a in D liegen, dies wird aber nicht verlangt.

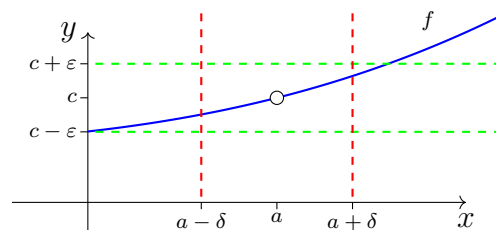


Abbildung 6: Graphische Interpretation des Grenzwerts von f in a : Es gilt genau dann $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, wenn für jeden (grünen) ε -Schlauch um c ein (roter) δ -Schlauch um a existiert, so dass der (blaue) Graph von f innerhalb der roten Grenzen die grünen Grenzen respektiert, also das Rechteck nicht über eine grüne Linie verlässt.

Satz 9.7. Seien f , D , a , c wie in **Definition 9.6**. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) Es gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.
- (2) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$.

Beweis. (1) \Rightarrow (2): Sei $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, wir müssen zeigen, dass $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$.

Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$ schon $|f(x) - c| < \varepsilon$ gilt. Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass

$$|x_n - a| < \delta \quad \text{für alle} \quad n \geq N$$

(dies geht, da $x_n \rightarrow a$). Da alle x_n in D liegen, folgt

$$|f(x_n) - c| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geq N,$$

also $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$.

(2) \Rightarrow (1): Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ gelte nun $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$, wir müssen zeigen, dass $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$.

Beweis durch Widerspruch: Angenommen, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ gilt *nicht*, also

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in D : |x - a| < \delta \wedge |f(x) - c| \geq \varepsilon.$$

Für dieses ε gibt es also insbesondere für jedes $\delta = \frac{1}{n}$ ein $x_n \in D$ mit

$$|x_n - a| < \frac{1}{n}, \quad \text{aber} \quad |f(x_n) - c| \geq \varepsilon.$$

Aus

$$0 \leq |x_n - a| < \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

folgt $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, aber aus

$$|f(x_n) - c| \geq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

folgt, dass $f(x_n)$ für $n \rightarrow \infty$ nicht gegen c konvergieren kann, Widerspruch. \square

Notation 9.8. Wir benutzen auch die folgenden Notationen:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = c & \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \forall x > K : |f(x) - c| < \varepsilon \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c & \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{R} \forall x < K : |f(x) - c| < \varepsilon \\ \lim_{x \nearrow a} f(x) = c & \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a - \delta, a) : |f(x) - c| < \varepsilon \\ \lim_{x \searrow a} f(x) = c & \quad :\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in (a, a + \delta) : |f(x) - c| < \varepsilon \end{aligned}$$

Die hier formulierten Versionen sind für $D = \mathbb{R}$, für beliebiges D muss man jeweils hinzufügen, dass die abschließende Bedingung nur für alle $x \in D$ gelten muss. In der Literatur findet man auch die Schreibweisen

$$\lim_{x \uparrow a} f(x) := \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) := \lim_{x \nearrow a} f(x)$$

und analog

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) := \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) := \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) := \lim_{x \searrow a} f(x).$$

Beispiel 9.9. (1) Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{1+x^2}$ gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

(2) Für

$$g : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) := \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2, & x = 1, \\ 3, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

gilt

$$\lim_{x \nearrow 1} g(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \searrow 1} g(x) = 3.$$

Die Graphen der hier betrachteten Funktionen sind in [Abbildung 7](#) dargestellt.

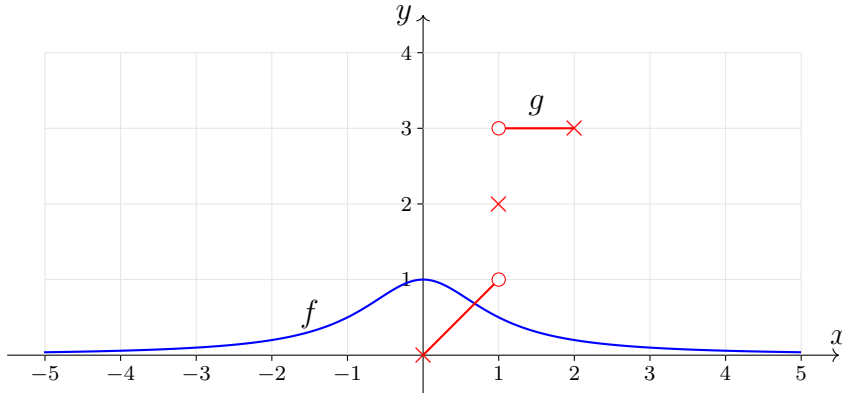


Abbildung 7: Graphen der Funktionen aus **Beispiel 9.9** mit f in blau und g in rot. Ein leerer Kreis deutet an, dass der Endpunkt der Linie nicht dazugehört, ein Kreuz schließt den Endpunkt ein.

Definition 9.10. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ für $D \subseteq \mathbb{R}$.

- (1) f heißt *stetig in* $a \in D$, falls $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
- (2) f heißt *stetig (auf D)*, falls f in jedem Punkt $a \in D$ stetig ist.

Bemerkung 9.11. Wegen **Satz 9.7** sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) f ist stetig in a .
- (2) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
- (3) Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$.

Man nennt (2) das ε - δ -*Kriterium* für Stetigkeit und (3) das *Folgenkriterium* für Stetigkeit.

Beispiel 9.12. (1) Die konstante Funktion $f(x) = c$ für festes $c \in \mathbb{R}$ ist stetig auf jedem $D \subseteq \mathbb{R}$.

- (2) Die Identität $f(x) = x$ ist stetig auf jedem $D \subseteq \mathbb{R}$, denn wenn $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, dann gilt auch

$$f(x_n) = x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a = f(a).$$

- (3) Sei $f(x) := \lfloor x \rfloor = \max \{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ die Abrundungsfunktion, dann ist f stetig in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

- (4) Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig auf \mathbb{R} :

- (i) Für $a = 0$ gilt $\exp(a) = 1$. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, wir müssen zeigen, dass $\exp(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$. Es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq n_0$ schon $|x_n| \leq 1$. Mit der Restgliedabschätzung **7.3** für $N = 0$ gilt

$$|\exp(x_n) - 1| \leq 2 \cdot |x_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also $|\exp(x_n) - 1| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ mit dem Quetschlemma und somit $\exp(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$.

- (ii) Für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge, die gegen a konvergiert. Dann ist $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $y_n := x_n - a$ eine Nullfolge. Mit der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion folgt nun $\exp(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(a)$ aus

$$\begin{aligned} |\exp(x_n) - \exp(a)| &= |\exp(a + y_n) - \exp(a)| \\ &= |\exp(a) \cdot \exp(y_n) - \exp(a)| \\ &= |\exp(a)| \cdot |\exp(y_n) - 1| \\ &\xrightarrow[\text{GWS}]{n \rightarrow \infty} |\exp(a)| \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

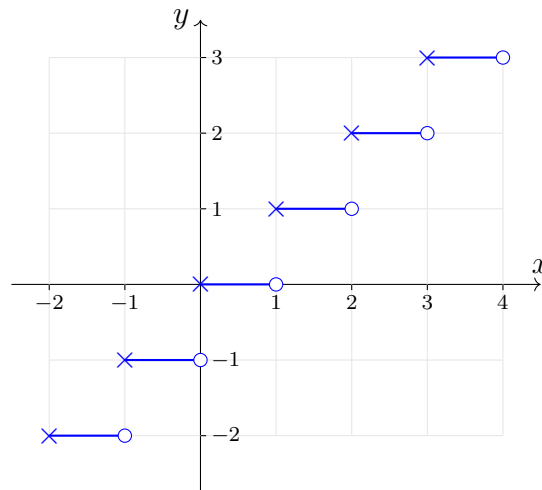


Abbildung 8: Graph der Abrundungsfunktion $[\cdot]$ in blau mit klar erkennbaren “Sprungstellen” bei allen $x \in \mathbb{Z}$.

Satz 9.13. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ für $D \subseteq \mathbb{R}$ und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Sind f und g stetig in $a \in D$, dann auch $f + g$, λf und $f \cdot g$. Falls $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in a .

Beweis. Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$. Da f und g in a stetig sind, gilt

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a) \quad \text{und} \quad g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(a).$$

Mit den Grenzwertsätzen folgt

$$(f + g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a) + g(a) = (f + g)(a).$$

Die restlichen Aussagen folgen analog aus den Grenzwertsätzen. □

Korollar 9.14. (1) Jede Polynomfunktion ist auf jedem $D \subseteq \mathbb{R}$ stetig.

(2) Jede rationale Funktion $\frac{p}{q}$ ist auf jedem $D \subseteq \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) \neq 0\}$ stetig.

Satz 9.15. Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$. Seien weiterhin $f : D \rightarrow E$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist auch $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig.

Beweis. Sei $a \in D$ und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in D , die gegen a konvergiert. Weil f in $a \in D$ stetig ist, gilt $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a)$. Weil g in $f(a) \in E$ stetig ist, gilt

$$(g \circ f)(x_n) = g(f(x_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g(f(a)) = (g \circ f)(a). \quad \square$$

Bemerkung 9.16. Manche Autoren verwenden für Funktionsgrenzwerte eine sogenannte *punktierte* Definition, bei der die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

durch

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon$$

ersetzt wird, also explizit für die Stelle $x = a$ nichts gefordert wird. Zur besseren Unterscheidung schreibt man manchmal auch $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$ für die punktierte Version. Die passende Charakterisierung durch Folgen besagt: $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$ gilt genau dann, wenn für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{a\}$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$ schon $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$ gilt.

Für eine Funktion wie

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } x = 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

liegt der Unterschied darin, dass in der punktierten Welt

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} g(x) = 0 \neq 1 = g(0)$$

gilt, während für uns $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ gar nicht erst existiert.

In der punktierten Welt erhält man sofort, dass die Existenz von $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x)$ dazu äquivalent ist, dass $\lim_{x \searrow a} f(x)$ und $\lim_{x \nearrow a} f(x)$ existieren und den gleichen Wert haben. Insbesondere gilt dann $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \neq a}} f(x) = \lim_{x \searrow a} f(x) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$. In unserer Welt muss man im Fall $a \in D$ fordern, dass $\lim_{x \searrow a} f(x)$ und $\lim_{x \nearrow a} f(x)$ nicht nur existieren und gleich sind, sondern sogar $\lim_{x \searrow a} f(x) = f(a) = \lim_{x \nearrow a} f(x)$ gilt.

In unserer Welt reicht es für Stetigkeit in $a \in D$ schon aus, dass der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert (er muss dann automatisch gleich $f(a)$ sein), während beispielsweise in der punktierten Welt obige Funktion g natürlich auch nicht in 0 stetig ist, obwohl $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} g(x) = 0$ existiert.

10. Sätze über stetige Funktionen

Satz 10.1 (Zwischenwertsatz). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Sei $y_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < y_0 < f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = y_0$.²²

Beweis. Sei $A := \{x \in [a, b] \mid f(x) \geq y_0\}$. Laut Voraussetzung ist $b \in A$, da $f(b) \geq y_0$, also ist A nichtleer. Wegen $A \subseteq [a, b]$ ist A nach unten beschränkt. Laut Supremumseigenschaft 8.3 existiert das Infimum $x_0 := \inf A$.

Dann existiert laut **Bemerkung 8.6** auch eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in A mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$. Da f stetig ist, gilt auch $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$. Wegen $x_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(x_n) \geq y_0$, mit **Satz 4.14** also auch $f(x_0) \geq y_0$.

Betrachte nun eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a, b]$ mit $z_n < x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$, etwa $z_n = x_0 - \frac{x_0 - a}{n}$. Da f stetig ist, gilt auch $f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x_0)$. Wegen $z_n < x_0$ gilt $z_n \notin A$ (da $x_0 = \inf A$) und daher $f(z_n) < y_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, mit **Satz 4.14** also auch $f(x_0) \leq y_0$.

Zusammengenommen gilt somit $f(x_0) = y_0$. □

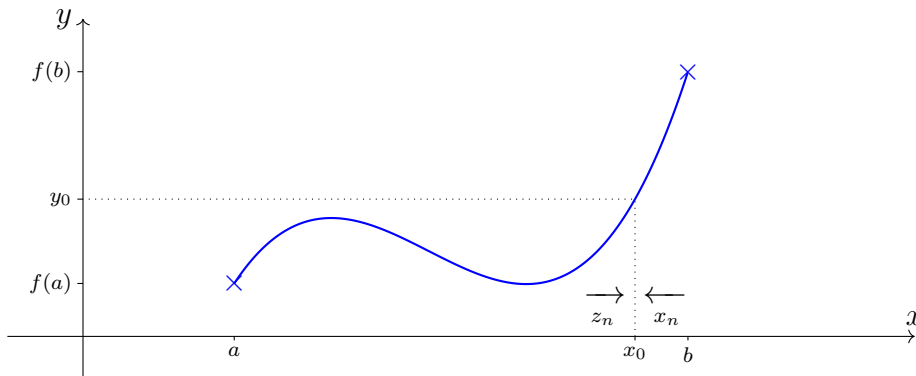


Abbildung 9: Skizze der Idee des Beweises von **Satz 10.1**.

Korollar 10.2. Jede reelle Zahl $y_0 > 0$ besitzt eine n -te Wurzel für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Beweis. Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := x^n$ ist stetig. Setze $a := 0$ und b so groß, dass $b^n > y_0$ (beachte **Lemma 3.13**), dann gilt

$$f(a) = 0 < y_0 < b^n = f(b).$$

Mit dem Zwischenwertsatz 10.1 gibt es ein $x_0 \in [0, b]$ mit $x_0^n = f(x_0) = y_0$. □

Bemerkung 10.3. Der Zwischenwertsatz liefert nur die Existenz, nicht aber die Eindeutigkeit der Wurzel. Dafür kann man so argumentieren: Seien $x, y > 0$ mit $x^n = y^n$. Mittels Teleskopsumme gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$

$$0 = y^n - x^n = (y - x)(y^{n-1} + y^{n-2}x + \dots + yx^{n-2} + x^{n-1}) = (y - x) \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}}_{=: t_n}.$$

²²Der Zwischenwertsatz lässt sich auch auf die Situation $f(a) > y_0 > f(b)$ ausweiten, in dem man die ebenfalls stetige Funktion $-f$ betrachtet: Hier gilt nun $-f(a) < -y_0 < -f(b)$, also gibt es laut Zwischenwertsatz ein $x_0 \in [a, b]$ mit $-f(x_0) = -y_0$, was zu $f(x_0) = y_0$ äquivalent ist.

Wegen $x, y > 0$ gilt auch $t_n > 0$, also muss $y - x = 0$ und somit $y = x$ folgen. Somit ist x_0 in **Korollar 10.2** eindeutig und die Notation $\sqrt[n]{y_0} := x_0$ wohldefiniert.

Korollar 10.4. Jede Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungeraden Grades hat mindestens eine Nullstelle, d.h. es gibt mindestens ein x_0 mit $p(x_0) = 0$.

Beweis. Folgt mit dem Zwischenwertsatz **10.1** aus der Tatsache, dass

$$\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} p(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) \right\} = \{\infty, -\infty\} \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = - \lim_{x \rightarrow -\infty} p(x). \quad \square$$

Definition 10.5. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *beschränkt*, falls ihr Bild $f(D) := \{f(x) \mid x \in D\}$ beschränkt ist, also ein $M \in \mathbb{R}$ mit $M > 0$ existiert, so dass $-M \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in D$ gilt.

Satz 10.6 (Satz vom Minimum und Maximum). Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt und nimmt Maximum und Minimum an: Es existieren $p, q \in [a, b]$ mit

$$f(p) = \sup(f([a, b])) \quad \text{und} \quad f(q) = \inf(f([a, b])),$$

also $f(q) \leq f(x) \leq f(p)$ für alle $x \in [a, b]$.

Bemerkung 10.7. Wesentlich ist, dass $D = [a, b]$ abgeschlossen ist. Der Satz ist falsch für offene oder auch halboffene Intervalle:

- Die Funktion $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ nimmt $\sup(f((0, 1))) = 1$ nicht an.
- Die Funktion $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist nicht (nach oben) beschränkt.

Beweis von Satz 10.6. Setze $s := \sup(f([a, b])) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dann existiert eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $f([a, b])$ mit $s_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} s$. Insbesondere gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in [a, b]$ mit $f(x_n) = s_n$, also ist $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $[a, b]$. Laut Bolzano-Weierstraß **5.12** gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sei etwa $p := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in \mathbb{R}$.

Wegen $a \leq x_{n_k} \leq b$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt mit **Satz 4.14** auch $a \leq p \leq b$. Da f stetig ist, folgt aus $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p$ auch $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(p)$. Andererseits gilt $f(x_{n_k}) = s_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} s$. Da Grenzwerte eindeutig sind, folgt

$$f(p) = s = \sup(f([a, b])),$$

insbesondere ist s endlich und f somit nach oben beschränkt.

Analog zeigt man, dass f auf $[a, b]$ auch $\inf(f([a, b]))$ annimmt und somit nach unten beschränkt ist. □

Definition 10.8. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig stetig*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad ^{23}$$

Beispiel 10.9. Die Funktion $f : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig.

²³Hier gilt "one δ to rule them all", denn im Gegensatz zur Definition der Stetigkeit

$$\forall x \in D \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

darf δ bei der gleichmäßigen Stetigkeit nicht von x abhängen.

Satz 10.10. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Beweis. Sei $D := [a, b]$. Wir führen einen Beweis per Widerspruch: Angenommen, f ist nicht gleichmäßig stetig, also

$$\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in D : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Insbesondere (für $\delta = \frac{1}{n}$)

$$\exists \varepsilon > 0 \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, y_n \in D : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Laut Bolzano-Weierstraß 5.12 gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sei etwa $p := \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \in [a, b]$. Wegen $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ folgt

$$p \xleftarrow{k \rightarrow \infty} x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < y_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p,$$

also mit dem Quetschlemma 4.14 auch $y_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} p$. Da f stetig ist, gilt

$$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(p) \quad \text{und} \quad f(y_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(p),$$

also auch

$$|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

im Widerspruch zu $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Also muss f gleichmäßig stetig sein. \square

11. Logarithmus und allgemeine Potenz

Definition 11.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt...

- *monoton wachsend*, $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- *streng monoton wachsend*, falls $\forall x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$: $f(x_1) < f(x_2)$.
- *monoton fallend*, $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- *streng monoton fallend*, $f(x_1) > f(x_2)$.

Statt “wachsend” sagt man auch “steigend”. Eine Funktion heißt *monoton*, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Satz 11.2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Weiterhin sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton wachsend. Dann ist $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ bijektiv und die Umkehrfunktion $f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend.²⁴

Beweis. Da f streng monoton wachsend ist, gilt $f([a, b]) \subseteq [f(a), f(b)]$, die Gleichheit erhält man aus dem Zwischenwertsatz 10.1.

Seien $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 \neq x_2$. Dann muss entweder $x_1 < x_2$ oder $x_1 > x_2$ gelten. Da f streng monoton wachsend ist, folgt $f(x_1) < f(x_2)$ oder $f(x_1) > f(x_2)$. In jedem Fall gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$, also ist f injektiv.

Somit ist $f : [a, b] \rightarrow [f(a), f(b)]$ bijektiv und es existiert die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [f(a), f(b)] \rightarrow [a, b]$$

mit $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in [a, b]$.

Seien $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$ mit $y_1 < y_2$, dann vergleichen wir $f^{-1}(y_1)$ und $f^{-1}(y_2)$. Wäre $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$, so würde der Widerspruch

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2$$

folgen, da f streng monoton wachsend ist. Also muss $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$ gelten, somit ist f^{-1} auch streng monoton wachsend.

Es verbleibt die Stetigkeit von f^{-1} zu zeigen: Sei dazu $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $D := [f(a), f(b)]$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \in D$. Wir müssen zeigen, dass die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[a, b]$ mit $x_n := f^{-1}(y_n)$ gegen $x := f^{-1}(y)$ konvergiert.

Da $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist, existieren

$$\underline{x} := \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \bar{x} := \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \in \mathbb{R}.$$

Laut Satz 8.12 existieren Teilfolgen $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(x_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\underline{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} \quad \text{und} \quad \bar{x} = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{m_k}.$$

Da f stetig ist, folgt

$$f(\underline{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{n_k} = y$$

und

$$f(\bar{x}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{m_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} y_{m_k} = y,$$

²⁴Eine analoge Aussage gilt für streng monoton fallende stetige Funktionen f . Zu beachten ist, dass dann $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$ gilt.

also $f(\underline{x}) = y = f(\bar{x})$. Da f injektiv ist, folgt $\underline{x} = \bar{x}$, also

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{x} = \bar{x} = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Laut **Satz 8.13** konvergiert $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x} = f^{-1}(f(\bar{x})) = f^{-1}(y) = x. \quad \square$$

Korollar 11.3. Sei $k \in \mathbb{N}$ und

$$f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto x^k.$$

Dann ist f stetig, streng monoton wachsend und besitzt die stetige sowie streng monoton wachsende Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad x \mapsto \sqrt[k]{x}.^{25}$$

Beweis. Als Polynomfunktion ist f stetig. Sind $x_1, x_2 \in [0, \infty)$ mit $x_1 < x_2$, so folgt $f(x_1) = x_1^k < x_2^k = f(x_2)$ aus **Lemma 3.7**, also ist f streng monoton wachsend.

Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Einschränkung $f_n : [0, n] \rightarrow [0, n^k]$. Laut **Satz 11.2** ist die Umkehrfunktion $f_n^{-1} : [0, n^k] \rightarrow [0, n]$ stetig und streng monoton wachsend. Sei $x \in [0, n^k]$, dann ist $f_n^{-1}(x) \in [0, n]$, also gilt $x = f_n(f_n^{-1}(x)) = f(f_n^{-1}(x))$, da f und f_n auf $[0, n]$ übereinstimmen. Es folgt

$$f^{-1}(x) = f^{-1}\left(f(f_n^{-1}(x))\right) = f_n^{-1}(x),$$

also stimmen f^{-1} und f_n^{-1} auf $[0, n^k]$ überein.

Insbesondere ist f^{-1} auf allen Intervallen der Form $[0, n^k]$ stetig und streng monoton wachsend (da f^{-1} dort mit einer stetigen und streng monoton wachsenden Funktion übereinstimmt), wegen

$$[0, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, n^k]$$

also auch auf $[0, \infty)$. □

Korollar 11.4. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist streng monoton wachsend und besitzt die stetige sowie streng monotone Umkehrfunktion

$$\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R},$$

den (*natürlichen*) *Logarithmus*. Es gilt

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \text{für alle } x, y \in (0, \infty).$$

Beweis. Die Stetigkeit der Exponentialfunktion wurde schon in **Beispiel 9.12** gezeigt.

Sei $x > 0$, dann gilt

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} > 1.$$

Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$, dann gilt $x_2 - x_1 > 0$ und daher $\exp(x_2 - x_1) > 1$. Aus

$$\exp(x_2) = \exp(x_1 + (x_2 - x_1)) = \exp(x_1) \cdot \exp(x_2 - x_1) > \exp(x_1) \cdot 1 = \exp(x_1)$$

folgt dann, dass die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist.

Weiterhin gilt $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$:

²⁵Wir wissen bereits aus **Korollar 10.2**, dass f^{-1} existiert und die Umkehrfunktion von f ist; hier geht es nur um die zusätzlichen Eigenschaften der Umkehrfunktion.

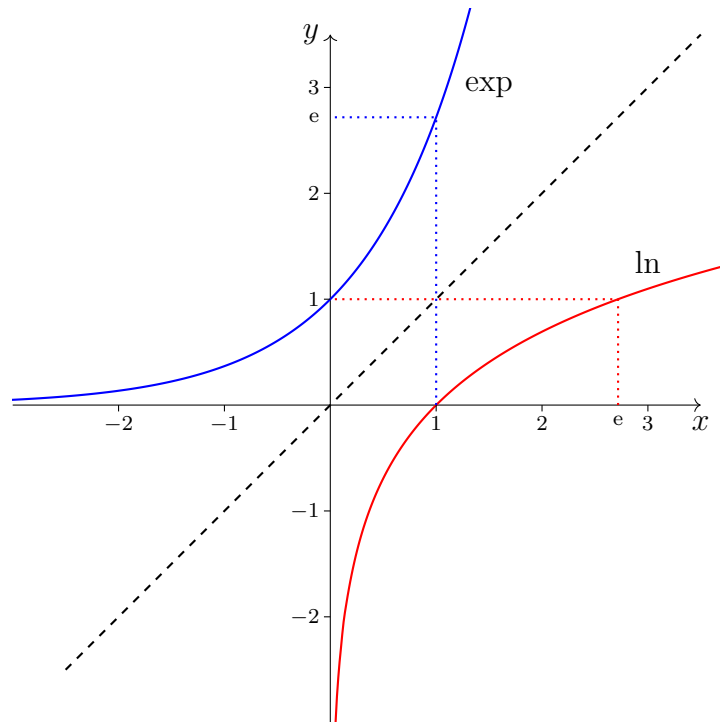


Abbildung 10: Die Graphen der Funktionen \exp (in blau) und \ln (in rot).

- (i) Laut **Korollar 7.7** gilt $\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also $\exp(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$.
(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\exp(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} = 1 + n + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{6} + \dots \geq 1 + n,$$

also auch

$$\exp(-n) = \frac{1}{\exp(n)} \leq \frac{1}{1+n}$$

und somit

$$\left[\frac{1}{1+n}, 1+n \right] \subseteq \exp([-n, n]).$$

Wegen

$$(0, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[\frac{1}{1+n}, 1+n \right] \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \exp([-n, n]) = \exp(\mathbb{R})$$

folgt dann $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$, also ist \exp surjektiv.

Somit ist $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ bijektiv und es existiert die Umkehrfunktion

$$\ln := \exp^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Laut **Satz 11.2** ist \ln stetig und streng monoton wachsend auf jedem Intervall $\exp([-n, n])$, also auch auf ganz $(0, \infty)$.

Seien schließlich $x, y \in (0, \infty)$, dann gilt

$$\ln(x \cdot y) = \ln\left(\exp(\ln(x)) \cdot \exp(\ln(y))\right) = \ln\left(\exp(\ln(x) + \ln(y))\right) = \ln(x) + \ln(y). \quad \square$$

Bemerkung 11.5. Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty, \quad \ln(e) = 1 \quad \text{und} \quad \ln(1) = 0.$$

Definition 11.6. Für alle $x, a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ definiere $a^x := \exp(x \cdot \ln(a))$.

Bemerkung 11.7. Seien $a, b \in (0, \infty)$.

- (1) Die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) := a^x$ ist stetig auf \mathbb{R} (als Komposition stetiger Funktionen).
- (2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a^n = \exp(n \cdot \ln(a)) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln(a)\right) = \prod_{k=1}^n \exp(\ln(a)) = \prod_{k=1}^n a.$$

- (3) Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= \exp((x+y) \cdot \ln(a)) = \exp(x \ln(a) + y \ln(a)) \\ &= \exp(x \ln(a)) \cdot \exp(y \ln(a)) = a^x \cdot a^y. \end{aligned}$$

- (4) Analog erhält man die restlichen Potenzgesetze für reellwertige Exponenten:

$$(a^x)^y = a^{xy}, \quad a^x b^x = (ab)^x \quad \text{und} \quad \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt insbesondere $a = a^1 = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$, also $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

- (5) Außerdem gilt $e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$.

Somit ist die Definition der allgemeinen Exponentialfunktionen $x \mapsto a^x$ verträglich mit den bisher verwendeten Notationen.

Satz 11.8. (i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} x^k e^{-x} = 0$.

(ii) Für alle $\alpha > 0$ gilt $\lim_{x \searrow 0} x^\alpha = 0$.

(iii) Für alle $\alpha > 0$ gilt $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} \ln(x) = 0$.

Beweis. Wir zeigen hier nur Teil (i): Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Für alle $x > 0$ gilt

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \dots + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \dots > \frac{x^{k+1}}{(k+1)!},$$

also $e^{-x} < \frac{(k+1)!}{x^{k+1}}$ und somit

$$0 < x^k e^{-x} < x^k \cdot \frac{(k+1)!}{x^{k+1}} = \frac{(k+1)!}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

mit dem Quetschlemma 4.14 folgt $x^k e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$. □

12. Komplexe Zahlen

Bemerkung 12.1. Der Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen ist nicht *algebraisch abgeschlossen*, d.h. es gibt polynomielle Gleichungen mit reellen Koeffizienten, die keine Lösung in \mathbb{R} haben, etwa $x^2 = -1$. Um auch solche Gleichungen lösen zu können, erweitert man \mathbb{R} um eine neue "Zahl" i mit der Eigenschaft $i^2 = -1$ zu $\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Man rechnet dann so, wie man es auch mit reellen Zahlen kennt und behandelt i wie eine Variable, von der man nur weiß, dass $i^2 = -1$. Entsprechend hat man dann

$$(x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

und

$$\begin{aligned}(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) &= x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 \\ &= x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 - y_1y_2 \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2).\end{aligned}$$

Um dies rigoros zu definieren, ist es einfacher $x + iy \in \mathbb{C}$ als Paar $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ zu betrachten und dann dort obige Addition und Multiplikation zu definieren.

Definition 12.2. Die Menge \mathbb{C} der *komplexen Zahlen* ist definiert als

$$\mathbb{C} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Zusätzlich definieren wir eine Addition

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

und eine Multiplikation

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Wir identifizieren $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{C}$ und definieren die *imaginäre Einheit*

$$i := (0, 1) \in \mathbb{C}.$$

Dann können wir jedes $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ schreiben als

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, 1) \cdot (y, 0) = x + iy,$$

und diese Schreibweise werden wir im Folgenden auch immer verwenden.

Bemerkung 12.3. (1) Die komplexen Zahlen können als Zahlenebene veranschaulicht werden. Dabei entspricht die Addition der gewöhnlichen komponentenweisen Addition von Vektoren in \mathbb{R}^2 . Auch die Multiplikation hat eine geometrische Interpretation, dazu später mehr.

(2) Die komplexen Zahlen sind ein Körper, es gelten also die üblichen Rechenregeln für $+$ und \cdot .

(3) Die komplexen Zahlen können *nicht* angeordnet werden: Laut [Lemma 3.7](#) müsste sonst $z^2 \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten. Daraus folgt sofort der Widerspruch $-1 = i^2 \geq 0$.

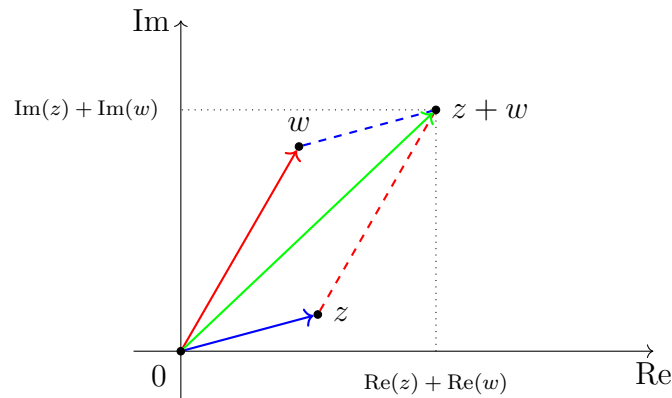


Abbildung 11: Graphische Darstellung der Addition zweier komplexer Zahlen z und w . Ihre Summe $z+w$ ist der vierte Eckpunkt des von 0 , w und z aufgespannten Parallelogramms.

- (4) Die komplexen Zahlen erlauben eine sinnvolle Analysis, insbesondere ist \mathbb{C} auch abgeschlossen. Wesentlich dafür ist der Begriff des Abstandes!
- (5) Die komplexen Zahlen sind *algebraisch abgeschlossen*, d.h. es gilt der *Fundamentalsatz der Algebra*: Jede polynomielle Gleichung $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{C}$ besitzt mindestens eine Lösung in \mathbb{C} .

Notation 12.4. Für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ definieren wir die folgenden Größen:

- (i) $\operatorname{Re}(z) := x \in \mathbb{R}$ (*Realteil* von z)
- (ii) $\operatorname{Im}(z) := y \in \mathbb{R}$ (*Imaginärteil* von z)
- (iii) $\bar{z} := x - iy \in \mathbb{C}$ (*komplex Konjugierte(s)* von z)
- (iv) $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \in \mathbb{R}$ (*Betrag* von z)

Bemerkung 12.5. (1) Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

- (i) $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$ und $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$.
- (ii) $\overline{\bar{z}} = z$, $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ und $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$.
- (iii) $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- (iv) $|\bar{z}| = |z|$, $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$.

- (2) Die Abbildung $z \rightarrow \bar{z}$ entspricht der Spiegelung von z an der reellen Achse, während $|z|$ der Länge von z als Vektor entspricht.

Satz 12.6. Der komplexe Betrag erfüllt die folgenden Eigenschaften:

- (a) Es gilt $|z| \geq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, wobei $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
- (b) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.
- (c) Für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gelten die Dreiecksungleichungen

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \text{und} \quad \left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|.$$

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften lassen sich einfach nachrechnen, die zweite Dreiecksungleichung folgt analog zum reellen Fall aus der ersten. Für die erste Dreiecksungleichung seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wegen

$$\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{z_1 \bar{z}_2 + \overline{z_1 \bar{z}_2}}{2} = \frac{z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2}{2}$$

erhält man

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \\ &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)| \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1 \bar{z}_2| \\ &\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 |z_1| |\bar{z}_2| \\ &= (|z_1| + |z_2|)^2. \end{aligned}$$

Wegen $|z_1 + z_2| \geq 0$ und $|z_1| + |z_2| \geq 0$ folgt also auch $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. \square

Definition 12.7. Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen *konvergiert* gegen $z \in \mathbb{C}$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : |z_n - z| < \varepsilon.$$

Wir schreiben $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ oder $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$.

Satz 12.8. Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$ in \mathbb{C} .
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n - z| = 0$ in \mathbb{R} .
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Re}(z_n) = \operatorname{Re}(z)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{Im}(z_n) = \operatorname{Im}(z)$ in \mathbb{R} .

Beweis. (1) \Leftrightarrow (2): Folgt direkt aus [Definition 12.7](#).

(2) \Rightarrow (3): Folgt aus

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z)| = |\operatorname{Re}(z_n - z)| \leq |z_n - z|$$

und der analogen Ungleichung für den Imaginärteil.

(3) \Rightarrow (2): Folgt aus

$$\begin{aligned} |z - z_n|^2 &= \operatorname{Re}(z - z_n)^2 + \operatorname{Im}(z - z_n)^2 \\ &= |\operatorname{Re}(z - z_n)|^2 + |\operatorname{Im}(z - z_n)|^2 \\ &= |\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(z_n)|^2 + |\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(z_n)|^2. \end{aligned} \quad \square$$

Satz 12.9. Seien $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergente Folgen komplexer Zahlen mit $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \in \mathbb{C}$ und $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} b \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

- (i) $|a_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |a|$.
- (ii) $a_n + b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a + b$.
- (iii) $a_n \cdot b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \cdot b$.
- (iv) $\overline{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \overline{a}$.
- (v) $\frac{1}{a_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a}$, falls $a \neq 0$.

Beweis. Im Wesentlichen funktionieren die Beweise wie im Reellen, daher sind hier nur die zentralen Argumente aufgeführt:

- (i) Aus der zweiten Dreiecksungleichung folgt

$$||a| - |a_n|| \leq |a - a_n| \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

- (ii) Wenn $|a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b - b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für n groß genug gilt, dann auch

$$|(a + b) - (a_n + b_n)| = |(a - a_n) + (b - b_n)| \leq |a - a_n| + |b - b_n| < \varepsilon.$$

- (iii) Es gilt

$$\begin{aligned} |(a \cdot b) - (a_n \cdot b_n)| &= |ab - a_nb + a_nb - a_nb_n| \\ &= |(a - a_n)b + a_n(b - b_n)| \\ &\leq |a - a_n| \cdot |b| + |a_n| \cdot |b - b_n| \\ &\leq |a - a_n| \cdot |b| + C \cdot |b - b_n|, \end{aligned}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$ eine obere Schranke der (konvergenten und damit beschränkten) reellen Folge $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ist.

- (iv) Folgt aus $|\overline{a} - \overline{a_n}| = |\overline{a - a_n}| = |a - a_n|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- (v) Es gilt

$$\left| \frac{1}{a} - \frac{1}{a_n} \right| = \left| \frac{a_n - a}{a \cdot a_n} \right| = \frac{|a - a_n|}{|a| \cdot |a_n|} \leq C \cdot |a - a_n|$$

für eine obere Schranke $C \in \mathbb{R}$ von $\left(\frac{1}{|a| \cdot |a_n|} \right)_{n \in \mathbb{N}}$. □

Definition 12.10. Eine Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ komplexer Zahlen heißt *Cauchy-Folge*, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n, m \geq N : |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Satz 12.11. Sei $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge komplexer Zahlen. Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1) $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.
- (2) $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sind Cauchy-Folgen.

Beweis. Einerseits gilt

$$|\operatorname{Re}(z_n) - \operatorname{Re}(z_m)| = |\operatorname{Re}(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m|$$

sowie eine analoge Abschätzung für den Imaginärteil.

Andererseits gilt

$$|z_n - z_m| \leq |\operatorname{Re}(z_n - z_m)| + |i| \cdot |\operatorname{Im}(z_n - z_m)| = |\operatorname{Re}(z_n - z_m)| + |\operatorname{Im}(z_n - z_m)|. \quad \square$$

Korollar 12.12. Die komplexen Zahlen sind vollständig: Jede komplexe Cauchy-Folge konvergiert gegen einen Grenzwert in \mathbb{C} .

Definition 12.13. Eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ von komplexen Zahlen $a_n \in \mathbb{C}$ heißt *konvergent*, wenn die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ konvergiert, und *absolut konvergent*, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Satz 12.14. Jede absolut konvergente Reihe von komplexen Zahlen konvergiert.

Beweis. Wir zeigen, dass die Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n := \sum_{k=1}^n a_k$ eine Cauchy-Folge ist: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$, dann

$$|s_n - s_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| = |t_n - t_m|,$$

wobei $t_n := \sum_{k=1}^n |a_k|$ die Partialsummen von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ sind. Da $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert, ist $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Sei $\varepsilon > 0$, für n und m hinreichend groß gilt dann $|t_n - t_m| < \varepsilon$, also auch

$$|s_n - s_m| \leq |t_n - t_m| < \varepsilon. \quad \square$$

Korollar 12.15. Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

absolut konvergent und definiert daher eine Abbildung

$$\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Beweis. Für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} = \exp(|z|),$$

da $|z| \in \mathbb{R}$ und $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert ist, also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ absolut. \square

Bemerkung 12.16. (1) Genau wie im Reellen gilt: Jede Umordnung einer absolut konvergenten Reihe komplexer Zahlen ist wiederum absolut konvergent und hat den selben Grenzwert wie die ursprüngliche Reihe.

(2) Ebenso kann man das Cauchy-Produkt absolut konvergenter Reihen mit der gleichen Vorschrift wie im Reellen bilden und erhält eine absolut konvergente Reihe.

Satz 12.17. Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt

$$\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w).$$

Beweis. Wie im Reellen gilt

$$\begin{aligned} \exp(z) \cdot \exp(w) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w), \end{aligned}$$

da der binomische Lehrsatz aus den Körperaxiomen folgt und somit auch über \mathbb{C} gilt. \square

Bemerkung 12.18. (1) Wie in \mathbb{R} gilt $\exp(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$, da

$$\exp(z) \cdot \exp(-z) = \exp(0) = 1.$$

(2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt zwar $\exp(z) = \left(\exp\left(\frac{z}{2}\right) \right)^2$ wie im Reellen, aber da \mathbb{C} nicht angeordnet ist, kann man daraus *nicht* $\exp(z) > 0$ folgern, da diese Aussage im Allgemeinen keinen Sinn ergibt.

(3) Wir schreiben auch hier $e^z := \exp(z)$ für $z \in \mathbb{C}$.

Definition 12.19. Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ und $z_0 \in D$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *stetig in z_0* , falls eine (und damit beide) der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:²⁶

(i) Für jede Folge $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in D mit $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z_0$ gilt $f(z_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(z_0)$.

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall z \in D : |z_0 - z| < \delta \Rightarrow |f(z_0) - f(z)| < \varepsilon$.

Die Funktion f heißt *stetig*, falls f in allen $z_0 \in D$ stetig ist.

Satz 12.20. (1) Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{C}$ für $D \subseteq \mathbb{C}$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Sind f und g stetig in $z_0 \in D$, dann auch $f + g$, λf und $f \cdot g$. Falls $g(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, so ist auch $\frac{f}{g}$ stetig in z_0 .

(2) Seien $D, E \subseteq \mathbb{C}$. Seien weiterhin $f : D \rightarrow E$ und $g : E \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann ist auch $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig.

Beweis. Analog zur reellen Version. \square

Beispiel 12.21. (1) Polynomfunktionen mit komplexen Koeffizienten sind stetig.

(2) Rationale Funktionen als Quotienten zweier Polynomfunktionen mit komplexen Koeffizienten sind stetig.

²⁶Der Beweis der Äquivalenz erfolgt dabei analog zur reellen Version.

(3) Die komplexe Konjugation $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$ ist stetig, da aus $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z$ direkt $\bar{z}_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{z}$ folgt.

(4) Wenn $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist, sind auch folgende Funktionen stetig:

$$\operatorname{Re}(f) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \operatorname{Re}(f(z)), \quad \text{und} \quad \operatorname{Im}(f) : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad z \mapsto \operatorname{Im}(f(z)).$$

Satz 12.22. Die komplexe Exponentialfunktion ist stetig.

Beweis. Analog zur Restgliedabschätzung 7.3 im reellen Fall gilt für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} |\exp(z) - 1| &= |\exp(z) - \exp(0)| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^0 \frac{z^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!} \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |z|^n \\ &= |z| \sum_{n=1}^{\infty} |z|^{n-1} \\ &= |z| \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n \\ &= \frac{|z|}{1 - |z|} \\ &\leq \frac{|z|}{1 - \frac{1}{2}} = 2|z|. \end{aligned}$$

Sei nun $z_0 \in \mathbb{C}$ beliebig, dann gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$|\exp(z_0) - \exp(z)| = |\exp(z_0) - \exp(z_0 + (z - z_0))| = |\exp(z_0)| \cdot |1 - \exp(z - z_0)|.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir

$$\delta := \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2|\exp(z_0)|}, \frac{1}{2} \right\}.$$

Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} |\exp(z_0) - \exp(z)| &\leq |\exp(z_0)| \cdot |1 - \exp(z - z_0)| \\ &\leq |\exp(z_0)| \cdot 2 \cdot |z - z_0| \\ &< |\exp(z_0)| \cdot 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2|\exp(z_0)|} = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 12.23. Aus der Stetigkeit der komplexen Konjugation folgt $\exp(\bar{z}) = \overline{\exp(z)}$, da

$$\exp(\bar{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{\bar{z}^k}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \overline{\exp(z)}.$$

13. Trigonometrische Funktionen

Bemerkung 13.1. Der Einheitskreis in \mathbb{C} ist gegeben durch

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : z \cdot \bar{z} = 1\}.$$

Betrachte $z = e^{ix}$ mit $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$z \cdot \bar{z} = e^{ix} \cdot \overline{e^{ix}} = e^{ix} \cdot e^{-ix} = e^{ix-ix} = e^0 = 1,$$

also liegt $z = e^{ix}$ auf dem Einheitskreis. Der Winkel φ zwischen dem Vektor e^{ix} und der reellen Achse ist proportional zu x (und gleich x , wenn man φ im Bogenmaß misst); allerdings ist dies im Augenblick für uns noch nicht klar; wir betrachten deshalb im Folgenden Sinus und Kosinus als Funktionen von x statt Funktionen von φ .

Definition 13.2. Für $x \in \mathbb{R}$ definiere

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{Re}(e^{ix}), \quad (\text{Kosinus})$$

sowie

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \operatorname{Im}(e^{ix}). \quad (\text{Sinus})$$

Bemerkung 13.3. Per Definition gilt

$$e^{ix} = \operatorname{Re}(e^{ix}) + i \operatorname{Im}(e^{ix}) = \cos(x) + i \sin(x)$$

sowie

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = \operatorname{Re}(e^{ix})^2 + \operatorname{Im}(e^{ix})^2 = |e^{ix}|^2 = 1.$$

Satz 13.4. Die Funktionen \cos und \sin sind stetig.

Beweis. Die Funktionen $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto ix$ sind stetig, also auch $\cos = \operatorname{Re} \circ \exp \circ f$ und $\sin = \operatorname{Im} \circ \exp \circ f$. \square

Satz 13.5. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\cos(-x) = \cos(x)$.

(ii) $\sin(-x) = -\sin(x)$.

(iii) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$. (Additionstheorem des Kosinus)

(iv) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$. (Additionstheorem des Sinus)

Beweis. (i) Es gilt

$$\cos(-x) = \operatorname{Re}(e^{-ix}) = \operatorname{Re}(e^{\overline{ix}}) = \operatorname{Re}(\overline{e^{ix}}) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos(x).$$

(ii) Analog zu (i).

(iii) Es gilt

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \operatorname{Re}(e^{i(x+y)}) = \operatorname{Re}(e^{ix} \cdot e^{iy}) = \operatorname{Re}(e^{ix}) \cdot \operatorname{Re}(e^{iy}) - \operatorname{Im}(e^{ix}) \cdot \operatorname{Im}(e^{iy}) \\ &= \cos(x) \cdot \cos(y) - \sin(x) \cdot \sin(y). \end{aligned}$$

(iv) Analog zu (iii). □

Satz 13.6. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

und

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Die Reihen konvergieren absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Es gilt

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} \dots,$$

also entsprechen obige Reihen gerade $\operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos(x)$ (für die geraden Exponenten von x) und $\operatorname{Im}(e^{ix}) = \sin(x)$ (für die ungeraden Exponenten von x). □

Satz 13.7. Für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_{2N+2}(x) \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_{2N+3}(x),$$

wobei

$$|r_{2N+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2N+2}}{(2N+2)!} \quad \text{falls} \quad |x| \leq 2N+3$$

und

$$|r_{2N+3}(x)| \leq \frac{|x|^{2N+3}}{(2N+3)!} \quad \text{falls} \quad |x| \leq 2N+4.$$

Beweis. Sei

$$a_k := \frac{x^{2k}}{(2N+3) \cdot \dots \cdot (2N+2(k+1))} \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N},$$

dann gilt

$$\begin{aligned} r_{2N+2}(x) &= \cos(x) - \sum_{k=0}^N (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= \sum_{k=N+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\ &= (-1)^{N+1} \frac{x^{2N+2}}{(2N+2)!} \underbrace{(1 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \dots)}_{\leq 1 \text{ falls } |x| \leq 2N+3}, \end{aligned}$$

also $|r_{2N+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2N+2}}{(2N+2)!}$.²⁷ Der Beweis für Sinus verläuft analog. □

²⁷Für die Abschätzung der Klammer nutzt man aus, dass die Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ streng monoton fallend ist mit $1 > a_1$. Wegen $1 - a_1 > 0$ und $a_k - a_{k+1} > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist der Wert in der Klammer im Grenzwert positiv, wegen $-a_k + a_{k+1} < 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist der Wert in der Klammer im Grenzwert nach oben durch 1 beschränkt.

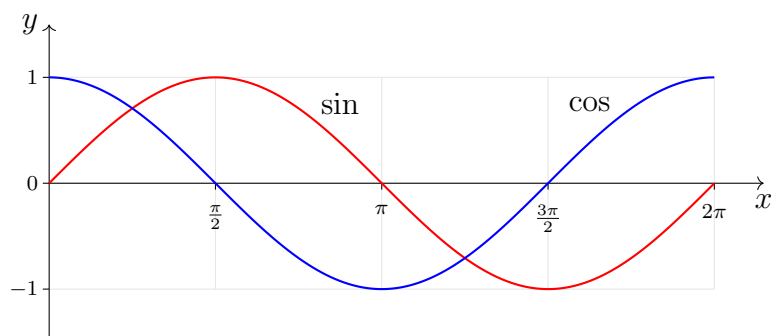


Abbildung 12: Verlauf der Graphen von \cos (blau) und \sin (rot) im Intervall $[0, 2\pi]$ entsprechend der Anschauung aus der Schule.

Bemerkung 13.8. Der Graph der Kosinus-Funktion sollte wie in [Abbildung 12](#) verlaufen. Wir wollen $\frac{\pi}{2}$ als kleinste positive Nullstelle von \cos definieren.

Lemma 13.9. Es gilt:

- (i) $\cos(2) \leq -\frac{1}{3}$.
- (ii) $\sin(x) > 0$ für alle $x \in (0, 2]$.
- (iii) \cos ist auf $[0, 2]$ streng monoton fallend.

Beweis. (i) Mit der Restgliedabschätzung gilt

$$\cos(2) = 1 - \frac{2^2}{2!} + r_4(2) = -1 + r_4(2) \quad \text{und} \quad |r_4(2)| \leq \frac{|2|^4}{4!} = \frac{2}{3},$$

also

$$\cos(2) = -1 + r_4(2) \leq -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}.$$

- (ii) Für alle $x \in (0, 2]$ gilt mit der Restgliedabschätzung

$$\sin(x) = x + r_3(x) = x \left(1 + \frac{r_3(x)}{x} \right),$$

wobei

$$\left| \frac{r_3(x)}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \cdot \frac{|x|^3}{3!} = \frac{|x|^2}{6} \leq \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Somit gilt

$$\sin(x) = x \left(1 + \frac{r_3(x)}{x} \right) \geq x \left(1 - \frac{2}{3} \right) = \frac{x}{3} > 0.$$

- (iii) Seien $x_1, x_2 \in [0, 2]$ mit $x_1 < x_2$. Dann gilt mit dem Additionstheorem des Kosinus

$$\begin{aligned} \cos(x_2) - \cos(x_1) &= \cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2}\right) - \cos\left(\frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2}\right) \\ &= -2 \underbrace{\sin\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)}_{>0} \underbrace{\sin\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)}_{>0} < 0. \end{aligned} \quad \square$$

Satz 13.10. Im Intervall $[0, 2]$ hat \cos genau eine Nullstelle, wir bezeichnen sie mit $\frac{\pi}{2}$.

Beweis. Die Funktion $\cos : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig. Es gilt $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) \leq -\frac{1}{3}$, also existiert mit dem Zwischenwertsatz 10.1 eine Nullstelle in $[0, 2]$. Da \cos auf $[0, 2]$ streng monoton fallend ist, muss die Nullstelle eindeutig sein. \square

Bemerkung 13.11. Man sieht nun relativ einfach folgende Eigenschaften:

(i) Es gilt:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
e^{ix}	1	i	-1	-i	1

(ii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ und $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

(b) $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$ und $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$.

(c) $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$ und $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$.

(iii) Die Menge der Nullstellen von Kosinus ist

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \cos(x) = 0\} = \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\},$$

die Menge der Nullstellen des Sinus ist

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \sin(x) = 0\} = \pi\mathbb{Z} = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

(iv) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $e^{ix} = 1$ genau dann, wenn x ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist, also wenn $x \in 2\pi\mathbb{Z}$.

(v) Kosinus ist auf dem ganzen Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und stetig mit $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$, also existiert die stetige und streng monoton fallende Umkehrabbildung

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]. \quad (\text{Arkuskosinus})$$

(vi) Sinus ist auf dem ganzen Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und stetig mit $\sin\left([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\right) = [-1, 1]$, also existiert die stetige und streng monoton wachsende Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (\text{Arkussinus})$$

(vii) Die Abbildung

$$f : [0, 2\pi) \rightarrow \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}, \quad x \mapsto e^{ix},$$

ist bijektiv.²⁸

²⁸Die Injektivität folgt aus (iv). Hat man $z := x + iy$ auf dem Einheitskreis mit $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben, so gilt $1 = x^2 + y^2$ und insbesondere $|x| \leq 1$. Für $x = 1$ gilt $z = 1 = f(0)$, für $x \in [-1, 1]$ gilt mit $\alpha := \arccos(x) \in [0, \pi]$ nun $1 = \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = \sin^2(\alpha) + x^2$, also $|\sin(\alpha)| = \sqrt{1 - x^2} = |y|$. Definiert man nun

$$\varphi := \begin{cases} \alpha, & \text{falls } \sin(\alpha) = y, \\ -\alpha, & \text{falls } \sin(\alpha) = -y, \end{cases}$$

so erhält man $f(\varphi) = e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi) = x + iy$ und somit die Surjektivität von f .

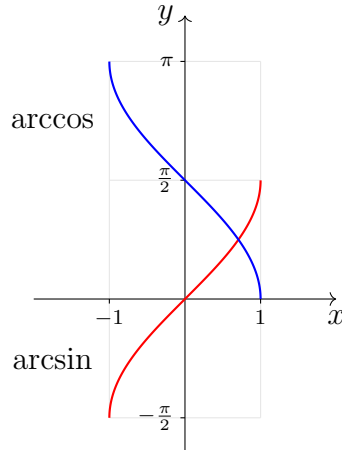


Abbildung 13: Graphen von arccos (blau) und arcsin (rot).

Satz 13.12 (Polarzerlegung). Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt eine eindeutig bestimmte Darstellung der Form

$$z = re^{i\theta}, \quad \text{wobei } r \in (0, \infty) \quad \text{und} \quad \theta \in [0, 2\pi).$$

Wir nennen $\arg(z) := \theta$ den *Winkel* oder das *Argument* von z .

Beweis. Wegen $z \neq 0$ gilt auch $r := |z| \neq 0$. Dann gilt $z = rw$ mit $w := \frac{z}{r}$, also

$$|w| = \left| \frac{z}{r} \right| = \frac{|z|}{r} = \frac{|z|}{|z|} = 1.$$

Da $x \mapsto e^{ix}$ das Intervall $[0, 2\pi)$ bijektiv auf den Einheitskreis $\{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ abbildet, existiert ein eindeutig bestimmtes $\theta \in [0, 2\pi)$ mit $w = e^{i\theta}$, also $z = re^{i\theta}$. \square

Bemerkung 13.13. Sind $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ und $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ zwei komplexe Zahlen mit $r_1, r_2 \in (0, \infty)$ und $\theta_1, \theta_2 \in [0, 2\pi)$, so gilt

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2) e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen entspricht also der Multiplikation ihrer Beträge und der Addition ihrer Winkel. Damit $\arg(z_1 \cdot z_2)$ wieder in $[0, 2\pi)$ liegt, gilt

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \begin{cases} \arg(z_1) + \arg(z_2), & \text{falls } \arg(z_1) + \arg(z_2) < 2\pi, \\ \arg(z_1) + \arg(z_2) - 2\pi, & \text{falls } \arg(z_1) + \arg(z_2) \geq 2\pi. \end{cases}$$

Korollar 13.14. Sei $n \in \mathbb{N}$. Es gibt genau n verschiedene komplexe Lösungen der Gleichung $w^n = 1$. Diese heißen n -te *Einheitswurzeln* und sind gegeben durch

$$w_k = e^{i2\pi \frac{k}{n}} \quad \text{für } k \in \{0, 1, \dots, n-1\}.$$

Beweis. Für alle $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ gilt

$$w_k^n = \left(e^{i2\pi \frac{k}{n}} \right)^n = e^{i2\pi k} = 1,$$

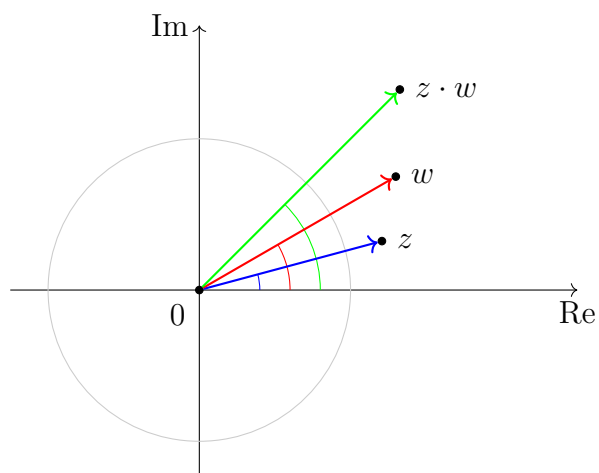


Abbildung 14: Graphische Darstellung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen z und w . In diesem Beispiel liegen z und w außerhalb des (grauen) Einheitskreises, also gilt $|z \cdot w| > \max\{|z|, |w|\}$.

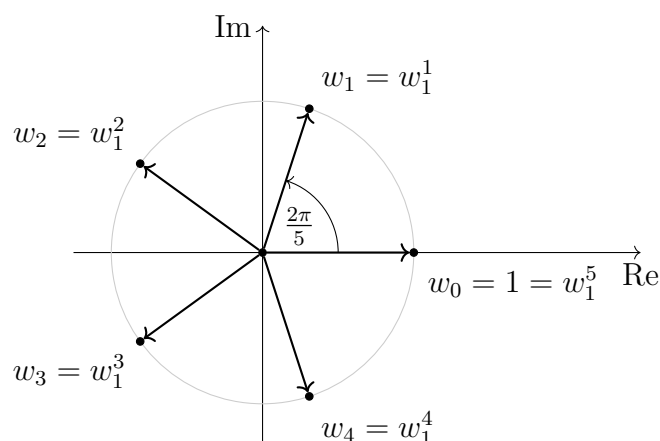


Abbildung 15: Darstellung der fünften Einheitswurzeln am Einheitskreis.

da $2\pi k \in 2\pi\mathbb{Z}$, also sind die w_k schon n verschiedene komplexe Lösungen der Gleichung $w^n = 1$.²⁹

Sei nun $w \in \mathbb{C}$ mit $w^n = 1$ gegeben. Dann gilt

$$|w|^n = |w^n| = |1| = 1,$$

also $|w| = 1$. Dann gibt es ein $\theta \in [0, 2\pi)$ mit $w = e^{i\theta}$. Wegen $1 = w^n = e^{in\theta}$ muss $n\theta$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein, also gibt es ein $k \in \mathbb{Z}$ mit

$$n\theta = 2\pi k \quad \text{und somit} \quad \theta = 2\pi \frac{k}{n}.$$

Wegen $\theta \in [0, 2\pi)$ folgt $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, also $w = w_k$. □

²⁹Da \mathbb{C} ein Körper ist, könnte man hier mit etwas mehr algebraischem Wissen direkt schließen, dass dies die einzigen Lösungen sein müssen, da eine polynomielle Gleichung vom Grad n mit Koeffizienten in einem Körper K höchstens n Lösungen in K haben kann.

14. Differentiation

Bemerkung 14.1. Die Ableitung $f'(x_0)$ einer Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x_0 \in D$ sollte die Steigung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ am Graphen von f sein. Für $x > x_0$ hat die Sekante durch die beiden Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x, f(x))$ die Steigung $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Die Tangente ergibt sich durch den Grenzwert $x \rightarrow x_0$ und ist dann gegeben durch die Funktion

$$x \mapsto f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Dies ist die beste lineare Approximation der Funktion f in der Nähe vom Punkt x_0 .

Die Grundlage für die Differentialrechnung liegt in der Begründung der Infinitesimalrechnung durch Leibniz (ausgehend vom Tangentenproblem) und Newton (ausgehend von klassischer Mechanik: Momentangeschwindigkeit und -beschleunigung) um 1680. Die heutige rigorose Strenge durch die Theorie der Grenzwerte entstand im 19. Jahrhundert und geht zurück auf Cauchy und Weierstraß.

Definition 14.2. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{R}$. Wir nennen f im Punkt $x_0 \in D$ *differenzierbar*, falls der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in D \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_0+h \in D \setminus \{x_0\}}} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.³⁰ Der Grenzwert $f'(x_0)$ heißt *Differentialquotient* oder *Ableitung* von f im Punkt x_0 . Weiterhin heißt f *differenzierbar*, falls f in jedem Punkt von D differenzierbar ist. Wir schreiben auch

$$\frac{df}{dx} \Big|_{x=x_0} := f'(x_0).$$

Beispiel 14.3. (1) Für die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 0,$$

also ist f in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 0$.

(2) Für die Identität $\text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$

$$\frac{\text{id}_{\mathbb{R}}(x) - \text{id}_{\mathbb{R}}(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 1,$$

also ist $\text{id}_{\mathbb{R}}$ in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\text{id}'_{\mathbb{R}}(x_0) = 1$.

(3) Für $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ gilt für alle $x_0 \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = x + x_0 \xrightarrow{x \rightarrow x_0} 2x_0,$$

also ist f in allen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x_0) = 2x_0$.

³⁰Wir setzen dabei ähnlich wie in **Definition 9.6** voraus, dass es mindestens eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{x_0\}$ mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0$ gibt; typischerweise gilt sogar $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$ für ein $\varepsilon > 0$. Mittels $h = x - x_0$ kann man zwischen den beiden Darstellungen wechseln.

- (4) Die Betragsfunktion $|\cdot| : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ ist in 0 stetig, aber nicht differenzierbar, denn für alle $x \neq 0$ gilt

$$\frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{falls } x > 0, \\ -1, & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Somit existiert der Grenzwert $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{|x| - |0|}{x - 0}$ nicht.

Satz 14.4. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x_0 \in D$. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

- (1) Die Funktion f ist differenzierbar in x_0 .
 (2) Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$ und eine Funktion $\sigma : \{h \in \mathbb{R} \mid x_0 + h \in D\} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ x_0 + h \in D \setminus \{x_0\}}} \frac{\sigma(h)}{h} = 0, \quad \text{so dass } f(x_0 + h) = f(x_0) + ch + \sigma(h) \quad \text{für alle } x_0 + h \in D.$$

- (3) Es gibt eine Funktion $\eta : D \rightarrow \mathbb{R}$, die in x_0 stetig ist, so dass

$$f(x) = f(x_0) + \eta(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Wenn diese äquivalenten Bedingungen erfüllt sind, gilt $f'(x_0) = c = \eta(x_0)$.

Beweis. (1) \Rightarrow (2): Setze $c := f'(x_0)$ und

$$\sigma(h) := (f(x_0 + h) - f(x_0)) - f'(x_0)h,$$

dann gilt

$$\frac{\sigma(h)}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

(2) \Rightarrow (3): Setze

$$\eta(x) := \begin{cases} c + \frac{\sigma(x - x_0)}{x - x_0}, & \text{falls } x \neq x_0, \\ c, & \text{falls } x = x_0. \end{cases}$$

Sei $x \in D$. Für $x = x_0$ ist nichts zu zeigen, für $x \neq x_0$ gilt mit $h := x - x_0$

$$\begin{aligned} f(x_0) + \eta(x) \cdot (x - x_0) &= f(x_0) + c \cdot (x - x_0) + \sigma(x - x_0) \\ &= f(x_0) + ch + \sigma(h) = f(x_0 + h) = f(x). \end{aligned}$$

Schließlich ist η in x_0 stetig, da

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \left(c + \frac{\sigma(x - x_0)}{x - x_0} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(c + \frac{\sigma(h)}{h} \right) = c = \eta(x_0).$$

(3) \Rightarrow (1): Sei $f(x) = f(x_0) + \eta(x) \cdot (x - x_0)$ für alle $x \in D$, dann gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \eta(x) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \eta(x_0),$$

also ist f in x_0 differenzierbar (mit Ableitung $f'(x_0) = \eta(x_0)$). □

Satz 14.5. Seien $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar. Dann sind auch $f + g$, λf (für alle $\lambda \in \mathbb{R}$) und $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar und es gilt:

(i) $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(ii) $(\lambda f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$.

(iii) $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$. (Produktregel)

Beweis. Teile (i) und (ii) folgen direkt aus der Definition der Differenzierbarkeit unter Verwendung der Grenzwertsätze. Zum Beweis der Produktregel überprüfen wir Bedingung (3) von **Satz 14.4**: Da f und g in x_0 differenzierbar sind, existieren in x_0 stetige Funktionen $\eta, \rho : D \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = f(x_0) + \eta(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{sowie} \quad g(x) = g(x_0) + \rho(x) \cdot (x - x_0) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Außerdem gilt $f'(x_0) = \eta(x_0)$ und $g'(x_0) = \rho(x_0)$. Es folgt

$$\begin{aligned} (f \cdot g)(x) - (f \cdot g)(x_0) &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0) \\ &= f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0) \\ &= (f(x) - f(x_0))g(x) + f(x_0)(g(x) - g(x_0)) \\ &= \eta(x)(x - x_0)g(x) + f(x_0)\rho(x)(x - x_0) \\ &= (\eta(x)g(x) + f(x_0)\rho(x)) \cdot (x - x_0). \end{aligned}$$

Als Komposition in x_0 stetiger Funktionen ist auch $\zeta(x) := \eta(x)g(x) + f(x_0)\rho(x)$ in x_0 stetig, also ist $f \cdot g$ in x_0 differenzierbar mit

$$(f \cdot g)'(x_0) = \zeta(x_0) = \eta(x_0)g(x_0) + f(x_0)\rho(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0). \quad \square$$

Korollar 14.6. (a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Dann ist f in jedem $x \in \mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $f'(x) = nx^{n-1}$.

(b) Jede Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $a_k \in \mathbb{R}$ ist differenzierbar. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1}x^k = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \dots + a_1.$$

Beweis. (a) Folgt per vollständiger Induktion nach n :

(IA) Für $n = 1$ folgt die Aussage über die Differenzierbarkeit der Identität aus **Beispiel 14.3**.

(IV) Für ein beliebiges, aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(IS) Mit der Produktregel gilt

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = (x)' \cdot x^n + x \cdot (x^n)' \stackrel{\text{IA, IV}}{=} 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

(b) Folgt aus (a) mit den übrigen Regeln aus **Satz 14.5**. □

Bemerkung 14.7. Ist eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbar, so ist sie in x auch stetig. Dies folgt etwa direkt aus (3) in **Satz 14.4**.

Satz 14.8 (Kettenregel). Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ sowie $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(D) \subseteq E$. Sei weiterhin g in $x_0 \in D$ differenzierbar und f in $g(x_0) \in E$ differenzierbar. Dann ist auch $f \circ g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Beweis. Da g in x_0 differenzierbar ist, existiert laut **Satz 14.4** eine in x_0 stetige Funktion $\eta : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g'(x_0) = \eta(x_0)$ und

$$g(x) - g(x_0) = (x - x_0)\eta(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Weiterhin ist f in $y_0 := g(x_0)$ differenzierbar, also existiert erneut laut **Satz 14.4** eine in y_0 stetige Funktion $\rho : E \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(y_0) = \rho(y_0)$ und

$$f(y) - f(y_0) = (y - y_0)\rho(y) \quad \text{für alle } y \in E.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) - (f \circ g)(x_0) &= f(g(x)) - f(g(x_0)) \\ &= (g(x) - g(x_0))\rho(g(x)) \\ &= (x - x_0)\eta(x)\rho(g(x)) \quad \text{für alle } x \in D. \end{aligned}$$

Da $\zeta(x) := \eta(x)\rho(g(x))$ als Produkt und Komposition in x_0 stetiger Funktionen wiederum in x_0 stetig ist, ist $f \circ g$ in x differenzierbar nach **Satz 14.4** und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = \zeta(x_0) = \eta(x_0)\rho(g(x_0)) = g'(x_0)f'(g(x_0)). \quad \square$$

Korollar 14.9 (Quotientenregel). Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$. Wenn f und g in $x_0 \in D$ differenzierbar sind, dann ist auch $\frac{f}{g}$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}(x_0).$$

Beweis. Wir führen den Beweis in drei Schritten:

- (1) Zeige zunächst, dass $h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{1}{y}$ in jedem $y_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar ist: Es gilt

$$h(y) - h(y_0) = \frac{1}{y} - \frac{1}{y_0} = \frac{y_0 - y}{yy_0} = (y - y_0) \cdot \frac{-1}{yy_0} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Da $\eta(y) := -\frac{1}{yy_0}$ in y_0 stetig ist, ist h in y_0 differenzierbar und es gilt

$$h'(y_0) = \eta(y_0) = -\frac{1}{y_0^2}.$$

- (2) Mit der Kettenregel gilt für $\frac{1}{g} = h \circ g$

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = (h \circ g)'(x_0) = h'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) = -\frac{1}{g(x_0)^2} \cdot g'(x_0).$$

(3) Mit der Produktregel gilt für $\frac{f}{g} = f \cdot \frac{1}{g}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0) \cdot \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0) \cdot \left(-\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\right) \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}. \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel 14.10. Jede rationale Funktion ist auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.

Satz 14.11. Die Funktionen $\exp, \sin, \cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sind differenzierbar und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\exp'(x) = \exp(x)$.

(ii) $\sin'(x) = \cos(x)$.

(iii) $\cos'(x) = -\sin(x)$.

Beweis. (i) Wir zeigen zunächst, dass $\exp'(0) = 1 = \exp(0)$: Laut **Satz 7.3** gilt (für $N = 1$)

$$|\exp(x) - (1 + x)| \leq 2 \frac{|x|^2}{2!} = |x|^2 \quad \text{für alle } |x| \leq \frac{3}{2},$$

also

$$\left| \frac{\exp(x) - 1}{x} - 1 \right| = \frac{|\exp(x) - (1 + x)|}{|x|} \leq |x| \quad \text{für alle } |x| \leq \frac{3}{2}.$$

Insbesondere gilt wegen $|x| \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ mit dem Quetschlemma

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1,$$

also $\exp'(0) = 1$.

Für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ gilt nun

$$\frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x) \cdot \underbrace{\frac{\exp(h) - 1}{h}}_{\xrightarrow{h \rightarrow 0} 1} \quad \text{für alle } h \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

also

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} = \exp(x)$$

und damit $\exp'(x) = \exp(x)$.

(ii) Man überzeugt sich leicht, dass obige Abschätzung auch für komplexe Zahlen gilt, man also für beliebiges $z, k \in \mathbb{C}$ hat

$$\lim_{\substack{k \rightarrow 0 \\ k \neq 0}} \frac{\exp(z+k) - \exp(z)}{k} = \exp(z).$$

Insbesondere bekommen wir dann für $z = ix$ und $k = ih$ mit $x, h \in \mathbb{R}$ die Aussage

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(i(x+h)) - \exp(ix)}{ih} = \exp(ix)$$

oder

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\exp(i(x+h)) - \exp(ix)}{h} = i \exp(ix)$$

Da das Bilden des Imaginärteiles eine stetige Funktion ist, liefert dies dann

$$\begin{aligned} \sin'(x) &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} \\ &= \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{\operatorname{Im}(e^{i(x+h)}) - \operatorname{Im}(e^{ix})}{h} \\ &= \operatorname{Im} \left(\lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ h \neq 0}} \frac{e^{i(x+h)} - e^{ix}}{h} \right) = \operatorname{Im}(ie^{ix}) = \operatorname{Re}(e^{ix}) = \cos(x), \end{aligned}$$

und analog für den Kosinus durch Bilden des Realteiles.

- (iii) Alternativ kann man die Ableitungen von Sinus und Kosinus auch folgendermaßen erhalten: Mit den Additionstheoremen gilt

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h} \\ &= \sin(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $h \neq 0$. Für $|h| \leq 3$ gilt mit den Restgliedabschätzungen

$$\left| \frac{\cos(h) - 1}{h} \right| = \frac{|r_2(h)|}{|h|} \leq \frac{|h|^2}{2|h|} = \frac{1}{2}|h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

sowie

$$\left| \frac{\sin(h)}{h} - 1 \right| = \left| \frac{\sin(h) - h}{h} \right| = \frac{|r_3(h)|}{|h|} \leq \frac{|h|^3}{6|h|} = \frac{1}{6}|h|^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \sin(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \sin(x) \cdot 0 + \cos(x) \cdot 1 = \cos(x). \end{aligned}$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\ &= \cos(x) \cdot \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \cdot \frac{\sin(h)}{h} \\ &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \cos(x) \cdot 0 - \sin(x) \cdot 1 = -\sin(x). \end{aligned}$$

□

Bemerkung 14.12. Formal sieht man $\exp' = \exp$ auch durch die Reihendarstellung:

$$\exp'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' \stackrel{?}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^n)'}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x).$$

Allerdings ist zum jetzigen Zeitpunkt noch unklar, ob man die unendliche Summation mit der Differentiation vertauschen darf. Darauf kommen wir später in [Beispiel 17.16](#) im Rahmen von Taylor-Reihen zurück.

Satz 14.13. Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \rightarrow E$ eine bijektive stetige Funktion mit Umkehrfunktion $g := f^{-1}$. Wenn f in $x_0 \in D$ differenzierbar ist und $f'(x_0) \neq 0$ gilt, so ist g in $f(x_0)$ differenzierbar und es gilt

$$g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \text{31}$$

Beweis. Setze $y_0 := f(x_0)$, dann gilt $g(y_0) = x_0$. Da f in x_0 differenzierbar ist, existiert eine in x_0 stetige Funktion $\eta : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) = \eta(x_0)$ und

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\eta(x) \quad \text{für alle } x \in D.$$

Für alle $x \in D \setminus \{x_0\}$ gilt dann $\eta(x) \neq 0$, da sonst

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\eta(x) = 0,$$

also $f(x) = f(x_0)$ und aufgrund der Injektivität von f der Widerspruch $x = x_0$ folgen würde. Mit $y := f(x) \in E \setminus \{y_0\}$ gilt dann

$$\begin{aligned} g(y) - g(y_0) &= (y - y_0) \frac{g(y) - g(y_0)}{f(g(y)) - f(g(y_0))} \\ &= (y - y_0) \frac{g(y) - g(y_0)}{(g(y) - g(y_0))\eta(g(y))} \\ &= (y - y_0) \cdot \frac{1}{\eta(g(y))}. \end{aligned}$$

Als Umkehrfunktion einer stetigen Funktion ist g selbst stetig. Nach Voraussetzung ist η in x_0 stetig, also ist auch $y \mapsto \eta(g(y))$ und damit $y \mapsto \frac{1}{\eta(g(y))}$ in $y_0 = f(x_0)$ stetig. Somit ist g in y_0 differenzierbar und es gilt

$$g'(y_0) = \frac{1}{\eta(g(y_0))} = \frac{1}{\eta(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \square$$

Beispiel 14.14. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ ist bijektiv und überall differenzierbar. Also ist auch der natürliche Logarithmus $\ln : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ überall differenzierbar und es gilt

$$\ln'(\exp(x_0)) = \frac{1}{\exp'(x_0)} = \frac{1}{\exp(x_0)} \quad \text{für alle } x_0 \in \mathbb{R},$$

³¹Die Formel für die Ableitung folgt aus der Kettenregel: Wegen $g \circ f = \text{id}_D$ gilt

$$1 = \text{id}'_D(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Dazu brauchen wir aber, dass g in $f(x_0)$ differenzierbar ist. Dies können wir aber nicht benutzen, da dies nicht Teil der Voraussetzung, sondern Teil der Behauptung ist.

also (mittels der Transformation $x_0 := \ln(x)$) auch

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{für alle } x \in (0, \infty).$$

Notation 14.15. (i) Wenn $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ auf ganz $D \subseteq \mathbb{R}$ differenzierbar ist, so ist

$$D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f'(x)$$

eine wohldefinierte Funktion, die wir auch mit f' bezeichnen und (*erste*) *Ableitung* von f nennen.

(ii) Wenn f' wieder differenzierbar ist, so erhält man die *zweite Ableitung*

$$f'' := (f')' : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f''(x) := (f')'(x)$$

und nennt f *zweimal differenzierbar*.

(iii) Induktiv erhält man für $k \in \mathbb{N}_0$ die k -te Ableitung $f^{(k)} : D \rightarrow \mathbb{R}$ mittels $f^{(0)} := f$ und $f^{(k)} := (f^{(k-1)})'$ für $k \in \mathbb{N}$, falls $f^{(k-1)}$ differenzierbar ist. Entsprechend nennt man f dann *k -mal differenzierbar*.

(iv) Schließlich heißt f *k -mal stetig differenzierbar*, wenn f k -mal differenzierbar ist und $f^{(k)}$ stetig ist.

Beispiel 14.16. (i) Es gilt $\exp^{(n)} = \exp$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^3 + 5x + 1$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = 6x^2 + 5, \quad f^{(2)}(x) = 12x \quad \text{und} \quad f^{(3)}(x) = 12.$$

Alle noch höheren Ableitungen von f sind die Nullfunktion.

15. Lokale Extrema und Mittelwertsatz

Konvention. In diesem Kapitel seien stets $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Definition 15.1. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

- (1) Die Funktion f hat in $x_0 \in D$ ein *lokales Maximum* (bzw. *lokales Minimum*), falls

$$\exists \varepsilon > 0 \forall x \in D \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) : \quad f(x_0) \geq f(x) \quad (\text{bzw. } f(x_0) \leq f(x)).$$

- (2) Die Funktion f hat in $x_0 \in D$ ein *globales Maximum* (bzw. *globales Minimum*), falls

$$\forall x \in D : \quad f(x_0) \geq f(x) \quad (\text{bzw. } f(x_0) \leq f(x)).$$

- (3) Ein *Extremum* ist ein Minimum oder ein Maximum.

- (4) Der Punkt $x_0 \in D$, an dem ein Extremum angenommen wird, heißt auch *Extremstelle*.

Satz 15.2. Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Wenn f in $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Extremum besitzt und in x_0 differenzierbar ist, so folgt $f'(x_0) = 0$.

Beweis. Wenn f in x_0 ein lokales Maximum hat, gibt es ein Intervall $(c, d) \subseteq (a, b)$ mit $x_0 \in (c, d)$ und $f(x_0) \geq f(x)$ für alle $x \in (c, d)$. Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in (c, x_0)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in (x_0, d)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

- Für alle $x \in (c, x_0)$ gilt $x - x_0 < 0$ und $f(x) - f(x_0) \leq 0$, also $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$ und damit auch

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in (c, x_0)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

- Für alle $x \in (x_0, d)$ gilt $x - x_0 > 0$ und weiterhin $f(x) - f(x_0) \leq 0$, also $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$ und damit auch

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in (x_0, d)}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

Also muss $f'(x_0) = 0$ gelten. Die Aussage für Minima folgt analog. □

Bemerkung 15.3. (1) Die Bedingung $f'(x) = 0$ ist zwar notwendig für die Existenz eines lokalen Extremums in x , aber nicht hinreichend: So hat etwa die Funktion $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ in $x = 0$ kein lokales Extremum, obwohl $f'(0) = 0$ gilt.

- (2) Ebenso gilt obiger Satz nicht für Randpunkte des Definitionsbereiches: So hat etwa die (streng monoton wachsende) Funktion $\text{id} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ ein lokales Maximum in $x = 1$, obwohl $\text{id}'(1) = 1 \neq 0$ gilt.

- (3) Offensichtlich kann obiger Satz keine Aussage über Punkte machen, an denen f nicht differenzierbar ist: So hat etwa die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ in $x = 0$ ein (globales) Minimum, obwohl $f'(0)$ nicht existiert.

Satz 15.4 (Satz von Rolle). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $f(a) = f(b)$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.

Beweis. Falls f konstant ist, so gilt $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a, b)$.

Sei also f nicht konstant, dann gibt es ein $y \in (a, b)$ mit $f(y) \neq f(a)$. Wir betrachten hier nur den Fall $f(y) > f(a)$ (andernfalls ersetzt man f durch $-f$). Laut dem Satz von Minimum und Maximum 10.6 nimmt die Funktion f auf $[a, b]$ ihr Maximum an, also gibt es ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) \geq f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Wegen

$$f(\xi) \geq f(y) > f(a) = f(b)$$

muss $\xi \in (a, b)$ gelten. Da $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Maximum in ξ hat, folgt mit Satz 15.2 schon $f'(\xi) = 0$. \square

Satz 15.5 (Mittelwertsatz). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Beweis. Für $f(a) = f(b)$ ist dies der Satz von Rolle; wir werden den Mittelwertsatz darauf zurückführen. Dazu sei

$$g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) - m(x - a), \quad \text{wobei} \quad m := \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dann ist g stetig und auf (a, b) differenzierbar. Weiterhin gilt

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = g(a).$$

Mit dem Satz von Rolle 15.4 existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $g'(\xi) = 0$, also

$$0 = g'(\xi) = f'(\xi) - m$$

und somit $f'(\xi) = m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. \square

Bemerkung 15.6. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Extremstellen von f können nur an den folgenden Punkten auftreten:

- (i) Punkte $x \in (a, b)$, an denen f differenzierbar ist mit $f'(x) = 0$.
- (ii) Randpunkte $x = a$ und $x = b$.
- (iii) Punkte $x \in (a, b)$, an denen f nicht differenzierbar ist.

Satz 15.7 (Monotoniekriterium). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls...

- $f'(x) > 0$ streng monoton wachsend.
 - $f'(x) < 0$ streng monoton fallend.
 - $f'(x) \geq 0$ monoton wachsend.
 - $f'(x) \leq 0$ monoton fallend.
- für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf $[a, b]$

Beweis. Sei $f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Für alle $x, y \in [a, b]$ mit $x < y$ existiert laut dem Mittelwertsatz 15.5 ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(\xi) > 0,$$

also (wegen $y - x > 0$) auch $f(y) - f(x) > 0$ und somit $f(y) > f(x)$, also ist f auf $[a, b]$ streng monoton wachsend.

Die anderen Fällen werden analog bewiesen. \square

Bemerkung 15.8. Falls f in der Situation von Satz 15.7 auf (a, b) monoton wachsend (bzw. fallend) ist, gilt auch $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a, b)$.

Aus strenger Monotonie folgt allerdings im Allgemeinen nicht die strikte Ungleichheit für die Ableitung: Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist streng monoton wachsend, aber es gilt trotzdem $f'(0) = 0$.

Beispiel 15.9. Wir untersuchen das Verhalten der Funktion

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp'\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right) \cdot \left(\frac{1}{x} \ln(x)\right)' \\ &= \exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \ln(x) + \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \underbrace{\exp\left(\frac{1}{x} \ln(x)\right)}_{>0} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{>0} \cdot (1 - \ln(x)). \end{aligned}$$

Wegen $(1 - \ln(x))' = -\frac{1}{x} < 0$ für alle $x \in (0, \infty)$ gilt

$$1 - \ln(x) \begin{cases} > 0, & \text{falls } x \in (0, e), \\ = 0, & \text{falls } x = e, \\ < 0, & \text{falls } x \in (e, \infty), \end{cases}$$

und damit auch

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{falls } x \in (0, e), \\ = 0, & \text{falls } x = e, \\ < 0, & \text{falls } x \in (e, \infty). \end{cases}$$

Insbesondere ist f für $x > e$ nach dem Monotoniekriterium 15.7 streng monoton fallend.³² Somit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n := f(n) = n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n}$ ab $n \geq 3 > e$ streng monoton fallend. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ muss dann auch $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$ gelten.

³²Streng genommen betrachtet man wieder die Einschränkung von f auf Intervalle der Form $[e, n]$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 3$, wendet dort das Monotoniekriterium an und nutzt $[e, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}} [e, n]$.

Satz 15.10. Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Weiterhin sei $x_0 \in (a, b)$ mit $f'(x_0) = 0$.

(a) Falls $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein lokales Maximum.

(b) Falls $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein lokales Minimum.

(Für $f''(x_0) = 0$ ist keine Aussage möglich, dafür muss man (falls möglich) höhere Ableitungen betrachten.)

Beweis. Wir zeigen nur die erste Aussage, die zweite folgt analog: Nach Voraussetzung ist f'' stetig und $f''(x_0) < 0$, also existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subseteq (a, b)$ und $f''(x) < 0$ für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Laut Monotoniekriterium 15.7 (angewendet auf $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$) ist f' streng monoton fallend auf $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$. Wegen $f'(x_0) = 0$ folgt

$$f'(x) \begin{cases} > 0, & \text{falls } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0), \\ < 0, & \text{falls } x \in (x_0, x_0 + \varepsilon). \end{cases}$$

Wiederum nach Satz 15.7 ist f auf $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ streng monoton wachsend und auf $(x_0, x_0 + \varepsilon)$ streng monoton fallend, also muss f in x_0 ein lokales Maximum haben. \square

Satz 15.11. Sei $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Falls $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f konstant.

Beweis. Seien $x, y \in (a, b)$ mit $x < y$, dann ist f auf $[x, y]$ stetig. Laut Mittelwertsatz 15.5 existiert ein $\xi \in (x, y)$ mit

$$f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{=0} \cdot (y - x) = 0,$$

also gilt $f(x) = f(y)$. \square

Satz 15.12. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = af(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = Ce^{ax}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis. Betrachte

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) \cdot e^{-ax}.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt mit der Produktregel

$$g'(x) = f'(x) \cdot e^{-ax} + f(x) \cdot (-ae^{-ax}) = 0,$$

also ist g laut Satz 15.11 konstant. Somit gibt es ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$C = g(x) = f(x) \cdot e^{-ax} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

also $f(x) = Ce^{ax}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. \square

Satz 15.13 (Regel von l'Hospital³³). Seien $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. In jeder der beiden Situationen

(a) $\lim_{x \searrow a} f(x) = 0$ und $\lim_{x \searrow a} g(x) = 0$ sowie

(b) $\lim_{x \searrow a} f(x) = \infty$ und $\lim_{x \searrow a} g(x) = \infty$

gilt: Falls $\lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so gilt

$$\lim_{x \searrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Entsprechendes gilt für die Grenzwerte $x \nearrow b$, $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow \infty$.

Beweis. (a) Setze f und g zu stetigen Funktionen auf $[a, b]$ fort durch $f(a) := g(a) := 0$. Wegen $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$ gilt auch $g(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.³⁴ Für festes $x \in (a, b)$ setze

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto f(t) - g(t) \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Dann ist F stetig auf $[a, x]$ und differenzierbar auf (a, x) . Weiterhin gilt

$$F(a) = \underbrace{f(a)}_{=0} - \underbrace{g(a)}_{=0} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \text{und} \quad F(x) = f(x) - g(x) \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

mit dem Satz von Rolle 15.4 existiert also ein $\xi_x \in (a, x)$ mit

$$0 = F'(\xi_x) = f'(\xi_x) - g'(\xi_x) \frac{f(x)}{g(x)},$$

also

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)}.$$

Sei nun $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \searrow a$. Wegen $a < \xi_{x_n} < x_n$ folgt $\xi_{x_n} \searrow a$. Somit gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f'(\xi_{x_n})}{g'(\xi_{x_n})} = \lim_{x \searrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(b) Ähnlich.

Zum Abschluss führen wir noch den Beweis für den Fall $x \rightarrow \infty$ auf den Fall $x \searrow 0$ zurück: Es gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \searrow 0} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \searrow 0} \frac{\left(f\left(\frac{1}{y}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{y}\right)\right)'} = \lim_{y \searrow 0} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad \square$$

³³Auch *Regel von l'Hôpital* geschrieben, in jedem Fall aber wie "Lopital" ausgesprochen. Ursprünglich bewiesen von Johann I Bernoulli.

³⁴Wenn es ein $x \in (a, b)$ mit $g(x) = 0$ gäbe, so könnte man den Satz von Rolle 15.4 auf dem Intervall $[a, x]$ anwenden und würde ein $\xi \in (a, x) \subseteq (a, b)$ erhalten mit $f'(\xi) = 0$.

Beispiel 15.14. (1) Was ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1 - e^{2x}}$? Es gilt

$$\sin(0) = 0 = 1 - e^{2 \cdot 0},$$

$\sin' = \cos$ und $(1 - e^{2x})' = -2e^{2x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Mit der Regel von l'Hospital (angewendet auf $(0, 1)$ für $x \searrow 0$ und $(-1, 0)$ für $x \nearrow 0$) folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{1 - e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{-2e^{2x}} = \frac{1}{-2 \cdot 1} = -\frac{1}{2},$$

da $x \mapsto \frac{\cos(x)}{-2e^{2x}}$ in $x = 0$ stetig ist.³⁵

(2) Was ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha}$ für beliebiges $\alpha > 0$ (vgl. [Satz 11.8](#))? Es gilt

$$\ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \quad \text{und} \quad x^\alpha \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

sowie $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \neq 0$ für alle $x \in (0, \infty)$. Weiterhin gilt

$$\frac{(\ln(x))'}{(x^\alpha)'} = \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \frac{1}{\alpha x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0,$$

also mit der Regel von l'Hospital auch

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))'}{(x^\alpha)'} = 0.$$

³⁵Streng genommen müssten wir hier entweder den punktierten Grenzwert $x \rightarrow 0$ mit $x \neq 0$ betrachten oder die Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\sin(x)}{1 - e^{2x}}$$

zunächst durch $f(0) := -\frac{1}{2}$ stetig fortsetzen, damit der unpunktierter Grenzwert existiert (wobei wir im Vorhinein natürlich nicht wissen, *welcher* Wert an der Stelle 0 gebraucht wird). Um Schreibarbeit zu sparen unterdrücken wir dieses Detail.

16. Integration

Konvention. In diesem Kapitel seien stets $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$.

Bemerkung 16.1. Die ursprüngliche Motivation der Integration ist die Berechnung von Flächeninhalten von allgemeinen Flächen. Dabei ist die grundlegende Idee, komplizierte Flächen durch (mehrere) "einfache" Flächen zu approximieren und dann den Grenzwert zu bilden. Spezialfälle sind bereits aus der Antike überliefert (Archimedes ca. 250 v.Chr.), eine systematische Theorie entwickelte sich erst mit Leibniz und Newton (ca. 1680).

Für eine Funktion f betrachten wir die Fläche, die zwischen zwei Werten a und b vom Graphen der Funktion und der x -Achse eingeschlossen wird, ihren Inhalt bezeichnen wir mit dem Integral $I = \int_a^b f(x) dx$. Dabei approximieren wir I durch Rechtecke. Dies entspricht der Approximation von f durch "Treppenfunktionen".

Definition 16.2. Eine *Unterteilung* des Intervalls $[a, b]$ (in n Abschnitte) ist ein Tupel $T = (x_0, \dots, x_n)$ mit $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, so dass

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Hierbei heißen die x_0, \dots, x_n auch *Stützstellen* von T .

Ist $S = (y_0, \dots, y_m)$ eine weitere Unterteilung von $[a, b]$ mit m Abschnitten, so schreiben wir $S \cup T$ für die eindeutige Unterteilung von $[a, b]$, die $x_0, \dots, x_n, y_0, \dots, y_m$ als Stützstellen hat (nach Aussortieren von Duplikaten).

Wir schreiben $S \subseteq T$, wenn jede Stützstelle von S auch eine Stützstelle von T ist.

Beispiel 16.3. Für das Intervall $[1, 4]$ hat man die Unterteilungen $T = (1, \sqrt{2}, e, 3, \pi, 4)$ und $S = (1, 2, 3, 4)$ mit

$$S \cup T = T \cup S = (1, \sqrt{2}, 2, e, 3, \pi, 4).$$

Es gilt $S \subseteq S \cup T$ und $T \subseteq S \cup T$.

Definition 16.4. Eine Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Treppenfunktion*, wenn es eine Unterteilung $T = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ von $[a, b]$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $i \in \{1, \dots, n\}$

$$\varphi(x) = c_i \quad \text{für alle } x \in (x_{i-1}, x_i).^{36}$$

Wir setzen

$$I(T) := \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}).$$

Satz 16.5. Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich zweier Unterteilungen $T = (x_0, \dots, x_n)$ und $S = (y_0, \dots, y_m)$ mit

$$\varphi(x) = c_i \quad \text{für alle } x \in (x_{i-1}, x_i) \quad \text{sowie} \quad \varphi(x) = d_j \quad \text{für alle } x \in (y_{j-1}, y_j).$$

Dann gilt $I(T) = I(S)$, also

$$\sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) = \sum_{j=1}^m d_j (y_j - y_{j-1}).$$

³⁶Die Werte von φ an den Stellen x_i können dabei beliebig in \mathbb{R} sein.

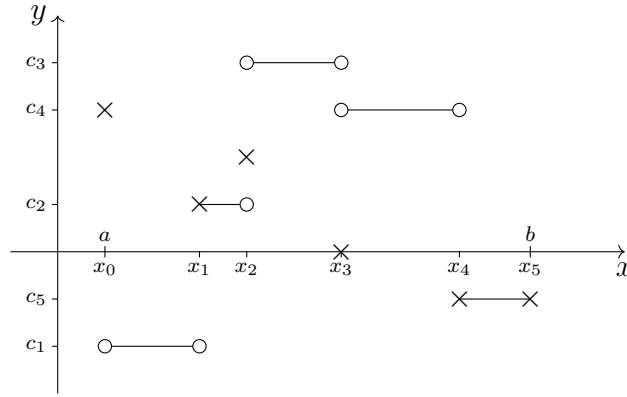


Abbildung 16: Graph einer Treppenfunktion mit $n = 5$ Abschnitten. Der Wert an den Stützstellen wird dabei durch ein Kreuz dargestellt, ein leerer Kreis symbolisiert, dass der Endpunkt der Linie nicht zum Graphen gehört.

Beweis. Es reicht zu zeigen, dass $I(T) = I(\tilde{T})$ für $T \subseteq \tilde{T}$, denn dann folgt automatisch $I(T) = I(S \cup T) = I(S)$. Weiterhin reicht es induktiv den Fall $\tilde{T} = T \cup (a, t, b)$ für ein $t \in (a, b)$ zu betrachten, wobei t keine Stützstelle von T ist.

Sei also $T = (t_0, \dots, t_n)$, dann gibt es ein $k \in \{1, \dots, n\}$ mit $t_{k-1} < t < t_k$, also

$$\tilde{T} = (t_0, \dots, t_{k-1}, t, t_k, \dots, t_n).$$

Es folgt

$$I(\tilde{T}) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n c_i(t_i - t_{i-1}) + \underbrace{c_k(t - t_{k-1}) + c_k(t_k - t)}_{=c_k(t_k - t_{k-1})} = I(T). \quad \square$$

Definition 16.6. Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Wir setzen

$$\int_a^b \varphi(x) \, dx := I(T) = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1})$$

für eine beliebige Unterteilung $T = (x_0, \dots, x_n)$ von $[a, b]$, bezüglich welcher φ eine Treppenfunktion ist.³⁷ Wenn a und b aus dem Kontext klar sind, schreiben wir auch

$$\int \varphi = \int_a^b \varphi(x) \, dx.$$

Satz 16.7. Seien $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Treppenfunktionen und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $\alpha\varphi + \beta\psi$ und $|\varphi|$ Treppenfunktionen und es gilt:

- (a) $\int(\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int \varphi + \beta \int \psi$.
- (b) $|\int \varphi| \leq \int |\varphi|$.
- (c) Falls $\varphi \leq \psi$ (im Sinne von $\varphi(x) \leq \psi(x)$ für alle $x \in [a, b]$), so gilt $\int \varphi \leq \int \psi$.

Insbesondere ist $\{\varphi \mid \varphi \text{ Treppenfunktion auf } [a, b]\}$ ein Vektorraum über \mathbb{R} und

$$\int : \{\varphi \mid \varphi \text{ Treppenfunktion auf } [a, b]\} \rightarrow \mathbb{R}$$

³⁷Laut **Satz 16.5** hängt der Wert $I(T)$ nicht von der konkreten Wahl von T ab.

ist eine lineare Abbildung.³⁸

Beweis. Wenn φ eine Treppenfunktion bezüglich einer Unterteilung S und ψ eine Treppenfunktion bezüglich einer Unterteilung T ist, so ist $\alpha\varphi + \beta\psi$ eine Treppenfunktion bezüglich $S \cup T$ und $|\varphi|$ eine Treppenfunktion bezüglich S . Die weiteren Aussagen sind Aussagen über endliche Summen; für $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ gilt

$$(a) \quad \alpha \sum_{i=1}^n a_i + \beta \sum_{i=1}^n b_i = \sum_{i=1}^n (\alpha a_i + \beta b_i).$$

$$(b) \quad \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |a_i|.$$

$$(c) \quad \text{Falls } a_i \leq b_i \text{ für alle } i, \text{ so gilt } \sum_{i=1}^n a_i \leq \sum_{i=1}^n b_i. \quad \square$$

Definition 16.8. Sei X eine Menge und $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wir definieren die *Supremumsnorm* $\|f\|$ von f mittels

$$\|f\| := \sup \{ |f(x)| : x \in X \} \in [0, \infty).$$

Ist f auf X unbeschränkt, so schreiben wir auch $\|f\| = \infty$.

Bemerkung 16.9. Sei $V := \{f : X \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ beschränkt}\}$.

(1) Es ist leicht nachzurechnen, dass die Supremumsnorm wirklich eine *Norm* auf V ist, das heißt, dass folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Für alle $f \in V$ gilt $\|f\| \geq 0$ mit $\|f\| = 0$ genau dann, wenn $f = 0$.

(ii) Es gilt $\|\alpha f\| = |\alpha| \cdot \|f\|$ für alle $f \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

(iii) Es gilt die Dreiecksungleichung $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$ für alle $f, g \in V$.

Wir nennen dann V versehen mit $\|\cdot\|$ einen *normierten Vektorraum*. Insbesondere gibt $\|f - g\|$ einen sinnvollen "Abstand" zwischen den Funktionen f und g .

(2) Weiterhin gilt $\|f \cdot g\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ für alle $f, g \in V$.

(3) Sei $\varepsilon > 0$. Explizit bedeutet $\|f - g\| \leq \varepsilon$, dass

$$\sup \{ |f(x) - g(x)| : x \in X \} \leq \varepsilon,$$

also $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$ für alle $x \in X$. Intuitiv liegt g in einem ε -"Schlauch" um f .

Satz 16.10. Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion, dann gilt

$$\left| \int_a^b \varphi(x) \, dx \right| \leq \|\varphi\| \cdot (b - a).$$

Beweis. Sei $T = (x_0, \dots, x_n)$ eine Unterteilung von $[a, b]$ mit $\varphi(x) = c_i \in \mathbb{R}$ für alle $x \in (x_{i-1}, x_i)$. Dann ist φ beschränkt. Mit $c_i \leq \|\varphi\|$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b \varphi(x) \, dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n \|\varphi\| (x_i - x_{i-1}) \\ &= \|\varphi\| \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \\ &= \|\varphi\| \cdot (x_n - x_0) \\ &= \|\varphi\| \cdot (b - a). \quad \square \end{aligned}$$

³⁸Natürlich ist auch das Produkt von zwei Treppenfunktionen wieder eine Treppenfunktion, allerdings können wir das Integral vom Produkt nicht direkt durch das Produkt der Integrale kontrollieren.

Satz 16.11. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann existieren Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\varphi \leq f \leq \psi$ und $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$.³⁹

Beweis. Da f auf $[a, b]$ stetig ist, folgt aus **Satz 10.10** auch die gleichmäßige Stetigkeit:

$$\exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Sei nun durch $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ eine Unterteilung von $[a, b]$ gegeben mit $|x_i - x_{i-1}| < \delta$ für alle i . Laut **Satz 10.6** existieren nun

$$m_i := \min \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\} \quad \text{und} \quad M_i := \max \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

für alle i . Definiere nun

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} m_i, & \text{falls } x \in (x_{i-1}, x_i], \\ m_1, & \text{falls } x = a, \end{cases}$$

sowie

$$\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} M_i, & \text{falls } x \in (x_{i-1}, x_i], \\ M_1, & \text{falls } x = a. \end{cases}$$

Dann gilt

$$\varphi(x) = m_i \leq f(x) \leq M_i = \psi(x) \quad \text{für alle } x \in (x_{i-1}, x_i]$$

und ebenso für $x = a$, also $\varphi \leq f \leq \psi$.

Sei $x \in (x_{i-1}, x_i]$. Per Definition der m_i und M_i gibt es $\xi_i, \eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ mit $M_i = f(\xi_i)$ und $m_i = f(\eta_i)$. Nach Wahl der Unterteilung gilt $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, also auch $|\xi_i - \eta_i| < \delta$. Mit der gleichmäßigen Stetigkeit folgt

$$|\psi(x) - \varphi(x)| = |M_i - m_i| = |f(\xi_i) - f(\eta_i)| < \varepsilon.$$

Da dies für alle i (und analog auch an der Stelle $x = a$) gilt, folgt $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$. \square

Definition 16.12. Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Regelfunktion*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit $\|f - \varphi\| < \varepsilon$.

Lemma 16.13. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktionen und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch αf , $f + g$ und $f \cdot g$ Regelfunktionen.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$.

- (i) Für $\alpha = 0$ ist αf die konstante Nullfunktion und damit eine Regelfunktion, sei also $\alpha \neq 0$. Da f eine Regelfunktion ist, gibt es eine Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$. Dann ist $\alpha\varphi$ eine Treppenfunktion und es gilt

$$\|\alpha f - \alpha\varphi\| = \|\alpha(f - \varphi)\| = |\alpha| \cdot \|f - \varphi\| < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon.$$

- (ii) Da f und g Regelfunktionen sind, gibt es Treppenfunktionen $\varphi, \psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\|g - \psi\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist auch $\varphi + \psi$ eine Treppenfunktion und es gilt

$$\|(f + g) - (\varphi + \psi)\| = \|(f - \varphi) + (g - \psi)\| \leq \|f - \varphi\| + \|g - \psi\| < \varepsilon.$$

³⁹Insbesondere ist dann auch $\|f - \varphi\| < \varepsilon$ und $\|f - \psi\| < \varepsilon$.

- (iii) Falls f oder g die Nullfunktion ist, so ist auch $f \cdot g$ die Nullfunktion und somit eine Regelfunktion, seien also f und g beide nicht die Nullfunktion, dann gilt insbesondere $\|g\| > 0$. Da f eine Regelfunktion ist, gibt es eine Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2\|g\|}$. Für jedes beschränkte $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\|f \cdot g - \varphi \cdot \psi\| &= \|f \cdot g - \varphi \cdot g + \varphi \cdot g - \varphi \cdot \psi\| \\ &\leq \|f - \varphi\| \cdot \|g\| + \|\varphi\| \cdot \|g - \psi\|.\end{aligned}$$

Falls $\|\varphi\| = 0$, so wählen wir ψ z.B. als konstante Funktion und erhalten

$$\|f \cdot g - \varphi \cdot \psi\| \leq \|f - \varphi\| \cdot \|g\| < \frac{\varepsilon}{2\|g\|} \cdot \|g\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Falls $\|\varphi\| > 0$, so gibt es eine Treppenfunktion $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|g - \psi\| < \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|}$. Dann ist auch $\varphi \cdot \psi$ eine Treppenfunktion und es gilt

$$\begin{aligned}\|f \cdot g - \varphi \cdot \psi\| &\leq \|f - \varphi\| \cdot \|g\| + \|\varphi\| \cdot \|g - \psi\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2\|g\|} \cdot \|g\| + \|\varphi\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|} = \varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

Bemerkung 16.14. (1) Laut [Satz 16.11](#) ist jede stetige Funktion auf $[a, b]$ auch eine Regelfunktion.

- (2) Eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *stückweise stetig*, falls es eine Unterteilung $T = (x_0, \dots, x_n)$ von $[a, b]$ gibt, so dass f auf jedem Intervall (x_k, x_{k+1}) stetig ist und in jeder Stützstelle die einseitigen Grenzwerte in \mathbb{R} existieren. Eine solche Funktion lässt sich auf jedem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ beliebig gut durch eine Treppenfunktion approximieren. Da man diese Treppenfunktionen an den Stützstellen “zusammenkleben” kann, ist auch jede stückweise stetige Funktion eine Regelfunktion.

- (3) Jede monotone Funktion ist eine Regelfunktion.

- (4) Jede Regelfunktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt, also $\|f\| < \infty$: Für $\varepsilon = 1$ existiert eine Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f - \varphi\| < 1$. Da Treppenfunktionen beschränkt sind, ist $\|\varphi\| < \infty$ und somit

$$\|f\| = \|f - \varphi + \varphi\| \leq \underbrace{\|f - \varphi\|}_{<1} + \underbrace{\|\varphi\|}_{<\infty} < \infty.$$

Satz 16.15. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen $\varphi_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f - \varphi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.⁴⁰ Dann ist die Folge $(\int \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen und damit konvergent. Der Grenzwert dieser Folge hängt nicht von der Wahl der φ_n ab.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|\varphi_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Für alle $n, m \geq N$ gilt dann

$$\|\varphi_n - \varphi_m\| = \|\varphi_n - f + f - \varphi_m\| \leq \underbrace{\|\varphi_n - f\|}_{< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} + \underbrace{\|f - \varphi_m\|}_{< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}} < \frac{\varepsilon}{b-a},$$

⁴⁰Eine solche Folge existiert nach Definition der Regelfunktionen.

also

$$\left| \int \varphi_n - \int \varphi_m \right| = \left| \int (\varphi_n - \varphi_m) \right| \stackrel{16.10}{\leq} \|\varphi_n - \varphi_m\| \cdot (b - a) < \frac{\varepsilon}{(b - a)} \cdot (b - a) = \varepsilon.$$

Somit ist $(\int \varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge.

Um die Unabhängigkeit von der Wahl der φ_n zu zeigen sei nun $(\tilde{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine weitere Folge von Treppenfunktionen mit $\|f - \tilde{\varphi}_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Dann gilt

$$\|\tilde{\varphi}_n - \varphi_n\| \leq \|\tilde{\varphi}_n - f\| + \|f - \varphi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

und somit

$$\left| \int \tilde{\varphi}_n - \int \varphi_n \right| = \left| \int (\tilde{\varphi}_n - \varphi_n) \right| \stackrel{16.10}{\leq} \|\tilde{\varphi}_n - \varphi_n\| \cdot (b - a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \tilde{\varphi}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n. \quad \square$$

Definition 16.16. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Wir definieren

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n(x) \, dx$$

für eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $\|f - \varphi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Satz 16.17. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Regelfunktionen. Dann gilt:

(a) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist $\alpha f + \beta g$ eine Regelfunktion mit

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g.$$

(b) Aus $f \leq g$ folgt $\int f \leq \int g$.

(c) $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \leq \|f\| \cdot (b - a)$.

(d) Für alle $c \in (a, b)$ ist f eingeschränkt auf $[a, c]$ und f eingeschränkt auf $[c, b]$ eine Regelfunktion. Es gilt

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx.$$

Beweis. Seien $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen von Treppenfunktionen mit

$$\|f - \varphi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und} \quad \|g - \psi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\alpha \varphi_n + \beta \psi_n$ eine Treppenfunktion mit

$$\begin{aligned} \|(\alpha f + \beta g) - (\alpha \varphi_n + \beta \psi_n)\| &= \|\alpha(f - \varphi_n) + \beta(g - \psi_n)\| \\ &\leq |\alpha| \cdot \|f - \varphi_n\| + |\beta| \cdot \|g - \psi_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

also ist $\alpha f + \beta g$ eine Regelfunktion. Weiterhin gilt mit der Linearität des Integrals für Treppenfunktionen

$$\begin{aligned} \int (\alpha f + \beta g) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int (\alpha \varphi_n + \beta \psi_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\alpha \int \varphi_n + \beta \int \psi_n \right) \\ &= \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} \int \varphi_n + \beta \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n \\ &= \alpha \int \varphi + \beta \int \psi. \end{aligned}$$

(b) Da $f \leq g$ zu $g - f \geq 0$ äquivalent ist, reicht es zu zeigen, dass aus $g \geq 0$ schon $\int g \geq 0$ folgt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ setze $\psi_n^+ := \psi_n + \|g - \psi_n\|$, dann gilt $0 \leq g \leq \psi_n^+$. Weil ψ_n^+ eine Treppenfunktion ist, folgt $\int \psi_n^+ \geq 0$ aus **Satz 16.7**. Wegen

$$\|g - \psi_n^+\| = \|g - \psi_n - \|g - \psi_n\|\| \leq \|g - \psi_n\| + \underbrace{\| \|g - \psi_n\| \|}_{=\|g - \psi_n\|} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

folgt dann

$$\int g = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \psi_n^+ \geq 0.$$

Die übrigen Aussagen folgen analog. □

Bemerkung 16.18. Insbesondere ist $\{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Regelfunktion}\}$ ein normierter Vektorraum und

$$\int : \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ Regelfunktion}\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f \mapsto \int_a^b f(x) dx$$

ist eine lineare Abbildung. Aus $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \|f\| \cdot (b-a)$ erhält man auch die “Stetigkeit” dieser Abbildung in dem Sinne, dass

$$\|f_n - f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \Rightarrow \quad \int f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int f.$$

Außerdem ist die Menge der Regelfunktionen unter dieser Konvergenz “abgeschlossen”: Falls $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion ist und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Regelfunktionen mit $\|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, dann ist auch f eine Regelfunktion.

Notation 16.19. In **Notation 5.5** haben wir nur *beschränkte* Intervalle definiert, deren Randpunkte reelle Zahlen sind. Im Folgenden fassen wir “Intervall” auf als Sammelbegriff für die beschränkten und die *unbeschränkten* Intervalle:

$$(-\infty, a), \quad (-\infty, a], \quad (a, \infty), \quad [a, \infty) \quad \text{und} \quad (-\infty, \infty), \quad \text{wobei} \quad a \in \mathbb{R}.$$

Satz 16.20. Sei I ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $a \in I$. Für $x \in I$ sei

$$F : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t) dt. \quad \text{⁴¹}$$

Dann ist F differenzierbar mit $F' = f$.

⁴¹Für $x < a$ setzen wir $\int_a^x f(t) dt = -\int_x^a f(t) dt$.

Beweis. Für alle $h \in \mathbb{R}$ mit $x + h \in I$ gilt

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Da f in x stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall t \in I : |t - x| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Für $|h| < \delta$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \cdot ((x+h) - x) \cdot f(x) \right| \\ &= \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \cdot \int_x^{x+h} f(x) dt \right| \\ &= \frac{1}{h} \left| \int_x^{x+h} (f(t) - f(x)) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \cdot \underbrace{((x+h) - x)}_{=h} \cdot \sup \underbrace{\{|f(t) - f(x)| : t \in [x, x+h]\}}_{< \varepsilon} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

also

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

und somit $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$. □

Definition 16.21. Sei I ein Intervall. Eine differenzierbare Funktion $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *Stammfunktion* zu $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, falls $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Satz 16.22. Sei I ein Intervall und $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Ist $G : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine weitere Funktion, so sind folgende Aussagen äquivalent:

- (1) G ist eine Stammfunktion von f .
- (2) $G - F$ ist konstant auf I : Es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $(G - F)(x) = c$ für alle $x \in I$.

Beweis. (1) \Rightarrow (2): Seien $a, b \in I$ mit $a < b$. Dann ist $G - F$ auf (a, b) differenzierbar und

$$(G - F)' = G' - F' = f - f = 0.$$

Laut [Satz 15.11](#) ist $G - F$ konstant auf $[a, b]$, also $(G - F)(a) = (G - F)(b)$.⁴² Somit ist $G - F$ auf ganz I konstant.

(2) \Rightarrow (1): Da F und die konstante Funktion $x \mapsto c$ auf I differenzierbar sind, ist auch $G = F + c$ auf I differenzierbar und es gilt

$$G' = (F + c)' = F' + c' = F' = f,$$

also ist G eine Stammfunktion von f . □

⁴²Genauer gesagt laut der folgenden minimalen Variation von [15.11](#), deren Beweis nahezu identisch verläuft: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Falls $f'(x) = 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f auf $[a, b]$ konstant.

Satz 16.23 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung). Sei I ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und F eine Stammfunktion von f . Dann gilt für alle $a, b \in I$

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Außerdem ist für jedes $a \in I$ eine Stammfunktion von f gegeben durch

$$F_a : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \int_a^x f(t) dt.$$

Beweis. Laut **Satz 16.20** ist F_a für jedes $a \in I$ eine Stammfunktion von f .

Sei nun F eine beliebige Stammfunktion von f . Laut **Satz 16.22** gilt $F = F_a + C$ für eine Konstante $C \in \mathbb{R}$. Wegen $F_a(a) = 0$ gilt $F(a) = F_a(a) + C = C$ und damit

$$\int_a^b f(x) dx = F_a(b) = F(b) - C = F(b) - F(a). \quad \square$$

Notation 16.24. (i) Wir schreiben $F = \int f(x) dx$ für die (nur bis auf eine Konstante bestimmte) Stammfunktion von f und nennen dies das *unbestimmte Integral* von f .

(ii) Wir schreiben kurz

$$F(x)|_a^b := [F(x)]_a^b := F(b) - F(a),$$

damit ist dann $\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b$ das *bestimmte Integral* über f von a bis b .

Beispiel 16.25. Wir kennen bereits etwa die folgenden Ableitungen:

f	f'
$x^n, n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}
$\ln(x), x > 0$	$\frac{1}{x}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
e^x	e^x
$\arcsin(x), x < 1$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Somit haben wir die folgenden bestimmten Integrale:

(1) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \Big|_a^b = \frac{1}{n+1} (b^{n+1} - a^{n+1}).$$

(2) Für $0 < a < b$ gilt

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_a^b = \ln(b) - \ln(a).$$

(3) Was ist mit $\int_a^b \frac{1}{x} dx$ für $a < b < 0$? Für alle $x < 0$ gilt

$$\ln(-x)' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x},$$

also

$$\int_a^b \frac{1}{x} dx = \ln(-x) \Big|_a^b = \ln(-b) - \ln(-a).$$

(4) Es gilt⁴³

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) \Big|_{-1}^1 = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Satz 16.26 (Substitutionsregel). Sei I ein Intervall, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varphi : [a, b] \rightarrow I$ stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Beweis. Sei F eine Stammfunktion von f . Dann gilt $F' = f$ und nach Kettenregel

$$(F \circ \varphi)' = (F' \circ \varphi) \cdot \varphi' = (f \circ \varphi) \cdot \varphi',$$

also ist $F \circ \varphi$ eine Stammfunktion von $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ (letztere Funktion ist nach Voraussetzung stetig als Komposition stetiger Funktionen). Somit gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt &= (F \circ \varphi) \Big|_a^b \\ &= (F \circ \varphi)(b) - (F \circ \varphi)(a) \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx. \end{aligned} \quad \square$$

Beispiel 16.27. (1) Für $c \in \mathbb{R}$ und $\varphi(t) = t + c$ mit $\varphi'(t) = 1$ gilt

$$\int_a^b f(t + c) dt = \int_{a+c}^{b+c} f(t) dt.$$

(2) Für $\varphi(t) = \sin(t)$ gilt

$$\int_a^b \cos(t) \cdot e^{\sin(t)} dt = \int_a^b \varphi'(t) \cdot e^{\varphi(t)} dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} e^u du = e^u \Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = e^{\sin(b)} - e^{\sin(a)}.$$

Satz 16.28 (Partielle Integration). Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Beweis. Laut der Produktregel ist fg eine Stammfunktion von $f'g + fg'$. Dann folgt die Aussage aus der Linearität des Integrals. \square

Beispiel 16.29. Es gilt

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \int \underbrace{\ln(x)}_f \cdot \underbrace{1}_{g'} dx = \underbrace{\ln(x)}_f \cdot \underbrace{x}_g - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{f'} \cdot \underbrace{x}_g dx \\ &= x \ln(x) - \int 1 dx = x \ln(x) - x. \end{aligned}$$

⁴³Wenn man bei dieser Rechnung etwas Bauchweh bekommt, da die zu integrierende Funktion $1/\sqrt{1-x^2}$ bei den Grenzen -1 und 1 ja gar nicht definiert ist, so ist dieses flauere Gefühl in der Tat gerechtfertigt. Um die Rechnung rigoros zu machen, insbesondere auch zu sagen, was wir mit diesem "uneigentlichen" Integral überhaupt meinen, sei auf [Definition 16.33](#) verwiesen.

Satz 16.30 (Riemannsche Summen). Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass für jede Unterteilung $T = (t_0, \dots, t_n)$ von $[a, b]$ mit *Feinheit*

$$\mu(T) := \max \{|t_i - t_{i-1}| : i = 1, \dots, n\} < \delta$$

und für alle $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ ($j = 1, \dots, n$) gilt:

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \right| < \varepsilon.$$

Hierbei heißt $\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j - t_{j-1})$ *Riemannsche Summe* für f bezüglich der Zerlegung T und der Auswertungsstellen ξ_1, \dots, ξ_n .

Beweis. Wir führen den Beweis in Analogie zu **Satz 16.11**: Da f auf $[a, b]$ stetig ist, folgt aus **Satz 10.10** auch die gleichmäßige Stetigkeit:

$$\exists \delta > 0 \forall x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Sei nun eine Unterteilung $T = (t_0, \dots, t_n)$ von $[a, b]$ mit $\mu(T) < \delta$ sowie $\xi_j \in [t_{j-1}, t_j]$ für alle j gegeben. Setze

$$\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} f(\xi_j), & \text{falls } x \in (t_{j-1}, t_j], \\ f(\xi_1), & \text{falls } x = a. \end{cases}$$

Dann ist φ eine Treppenfunktion und

$$\sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) = \int_a^b \varphi(t) dt.$$

Sei $t \in (t_{j-1}, t_j]$. Dann gilt

$$|\xi_j - t| \leq |t_j - t_{j-1}| \leq \mu(T) < \delta$$

und daher

$$|(\varphi - f)(t)| = |\varphi(t) - f(t)| = |f(\xi_j) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Da dies für alle j (und analog auch an der Stelle $t = a$) gilt, folgt $\|\varphi - f\| < \frac{\varepsilon}{b - a}$. Da $f - \varphi$ als Differenz einer stetigen Funktion und einer Treppenfunktion selbst eine Regelfunktion ist, folgt mit **Satz 16.17**

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(t_j - t_{j-1}) \right| &= \left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b \varphi(t) dt \right| \\ &= \left| \int_a^b (f - \varphi)(t) dt \right| \\ &\leq \|f - \varphi\| \cdot (b - a) < \frac{\varepsilon}{b - a} \cdot (b - a) = \varepsilon. \quad \square \end{aligned}$$

Korollar 16.31. Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zerlegungen von $[a, b]$ mit

$$\mu(T_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Ist S_n eine Riemannsche Summe für f bezüglich T_n und beliebiger Auswertungsstellen, so gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Beispiel 16.32. Bestimmung von Stammfunktionen von rationalen Funktionen, also Quotienten von zwei Polynomfunktionen: Seien $A, B : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ zwei reelle Polynomfunktionen mit $B(x) \neq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist die rationale Funktion $\frac{A}{B} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Um eine Stammfunktion von $\frac{A}{B}$ zu finden, kann man wie folgt vorgehen:

- (1) Mit dem Euklidischen Algorithmus (oder mittels Polynomdivision) gilt

$$A = C \cdot B + R$$

für gewisse Polynomfunktionen $C, R : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\text{grad}(R) < \text{grad}(B)$. Dann ist

$$\frac{A}{B} = C + \frac{R}{B}.$$

Eine Stammfunktion von C ist bekannt, es reicht also, eine Stammfunktion von $\frac{R}{B}$ zu bestimmen.

- (2) Seien also $P, Q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ reelle Polynomfunktionen mit $\text{grad}(P) < \text{grad}(Q)$. Es gelten die folgenden (algebraischen) Fakten:

- (i) Jede reelle Polynomfunktion Q faktorisiert als

$$Q = \prod_{j=1}^n Q_j^{k_j} = Q_1^{k_1} \cdot \dots \cdot Q_n^{k_n}$$

mit $k_j \in \mathbb{N}$ und irreduzible⁴⁴ reelle Polynomfunktionen Q_j mit $\text{grad}(Q_j) \leq 2$.

- (ii) Wenn $Q = Q_1^{k_1} \cdot \dots \cdot Q_n^{k_n}$ eine solche Faktorisierung ist, dann ist $\frac{P}{Q}$ eine Summe von Ausdrücken der Form

$$\frac{ax + b}{Q_j^k(x)} \quad (\text{falls } \text{grad}(Q_j) = 2) \quad \text{und} \quad \frac{b}{Q_j^k(x)} \quad (\text{falls } \text{grad}(Q_j) = 1),$$

wobei $1 \leq k \leq k_j$ und $a, b \in \mathbb{R}$. (Dies ist der *Hauptsatz der Partialbruchzerlegung*.)

Es reicht also, eine Stammfunktion von $\frac{b}{(x-q)^k}$ und $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$ zu bestimmen für $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$.

- (3) Für $b, q \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int \frac{b}{(x-q)^k} dx = \begin{cases} b \cdot \ln(|x-q|), & \text{falls } k = 1, \\ -\frac{b}{(k-1)(x-q)^{k-1}}, & \text{falls } k \geq 2. \end{cases}$$

Wegen

$$\frac{2x+1}{1-x^2} = \frac{\frac{3}{2}}{1-x} + \frac{-\frac{1}{2}}{1+x}$$

hat man also beispielsweise

$$\int \frac{2x+1}{1-x^2} dx = -\frac{3}{2} \ln(|1-x|) - \frac{1}{2} \ln(|1+x|).$$

⁴⁴Irreduzibel bedeutet, dass Q_j nicht als Produkt zweier Polynomfunktionen mit Grad mindestens 1 geschrieben werden kann.

Ausdrücke der Form $\frac{b}{x^2+px+q}$ kann man durch quadratische Ergänzung mittels

$$\int \frac{1}{x^2+1} = \arctan(x)$$

integrieren und die resultierende Formel dann Schritt für Schritt auf $\frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}$ verallgemeinern.

Definition 16.33. Sei $I = (\alpha, \beta)$ ein offenes Intervall mit $\alpha < \beta$ für $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Weiterhin sei $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, so dass jede Einschränkung von f auf ein abgeschlossenes und beschränktes Teilintervall $[a, b] \subseteq I$ eine Regelfunktion ist. Das Integral $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ heißt konvergent gegen $A \in \mathbb{R}$, wenn für alle Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in I mit $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \alpha$ und $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \beta$ gilt

$$\int_{a_n}^{b_n} f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} A.$$

Wir nennen dann $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ ein *uneigentliches Integral* und schreiben

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = A.$$

Beispiel 16.34. Für $s \in (0, \infty)$ betrachten wir $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$. Sei dazu $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $(0, \infty)$ mit $b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$.⁴⁵

(1) Für $s > 1$ gilt

$$\int_1^{b_n} \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{1-s} \cdot \frac{1}{x^{s-1}} \Big|_1^{b_n} = \frac{1}{1-s} \left(\frac{1}{b_n^{s-1}} - 1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s-1},$$

also

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{1}{s-1} \quad \text{für } s > 1.$$

(2) Für $s = 1$ gilt

$$\int_1^{b_n} \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_1^{b_n} = \ln(b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

also existiert $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$ nicht.

(3) Analog kann man zeigen, dass $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^s} dx$ auch für $s \in (0, 1)$ nicht existiert.

Satz 16.35 (Integralkriterium für Konvergenz von Reihen). Sei $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ eine monoton fallende Funktion. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergiert genau dann, wenn $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergiert.

⁴⁵Da $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^s}$ stetig ist, können wir uns sparen, eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen 1 anzusetzen, da jede Stammfunktion F von f in 1 stetig ist und daher

$$\int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x) \Big|_{a_n}^{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (F(b_n) - F(a_n)) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F(b_n) \right) - F(1)$$

gilt, falls der letzte Grenzwert existiert.

Beweis. Folgt aus der Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{N-1} f(n+1) \leq \int_1^N f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{N-1} f(n) \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}.$$

Dabei sind die Summen gerade die Integrale über zwei Treppenfunktionen bezüglich der Unterteilung $(1, \dots, N)$, die auf jedem Abschnitt $[n, n+1]$ den kleinsten (also $f(n+1)$) beziehungsweise größten (also $f(n)$) Funktionswert von f annehmen. \square

Beispiel 16.36. Sei $s \in (0, \infty)$. Laut **Beispiel 16.34** und **Satz 16.35** konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ genau dann, wenn $s > 1$.

Zum Abschluss noch eine Bemerkung zum Verhältnis zwischen Differenzieren und Integrieren: Letzteres ist im Prinzip zwar die Umkehrung von ersterem, was aber nicht heißt, dass beide den gleichen Schwierigkeitsgrad haben. So ist die partielle Integration zwar die umgekehrte Version der Produktregel; allerdings erlaubt uns die Produktregel die Ableitung von fg zu berechnen, wenn wir die Ableitung von f und die Ableitung von g kennen, während die partielle Integration uns nicht sagt, was das Integral von fg ist, wenn wir das Integral von f und das Integral von g kennen. Man sagt deshalb auch oft: “Differenzieren ist Handwerk, Integrieren ist Kunst.”

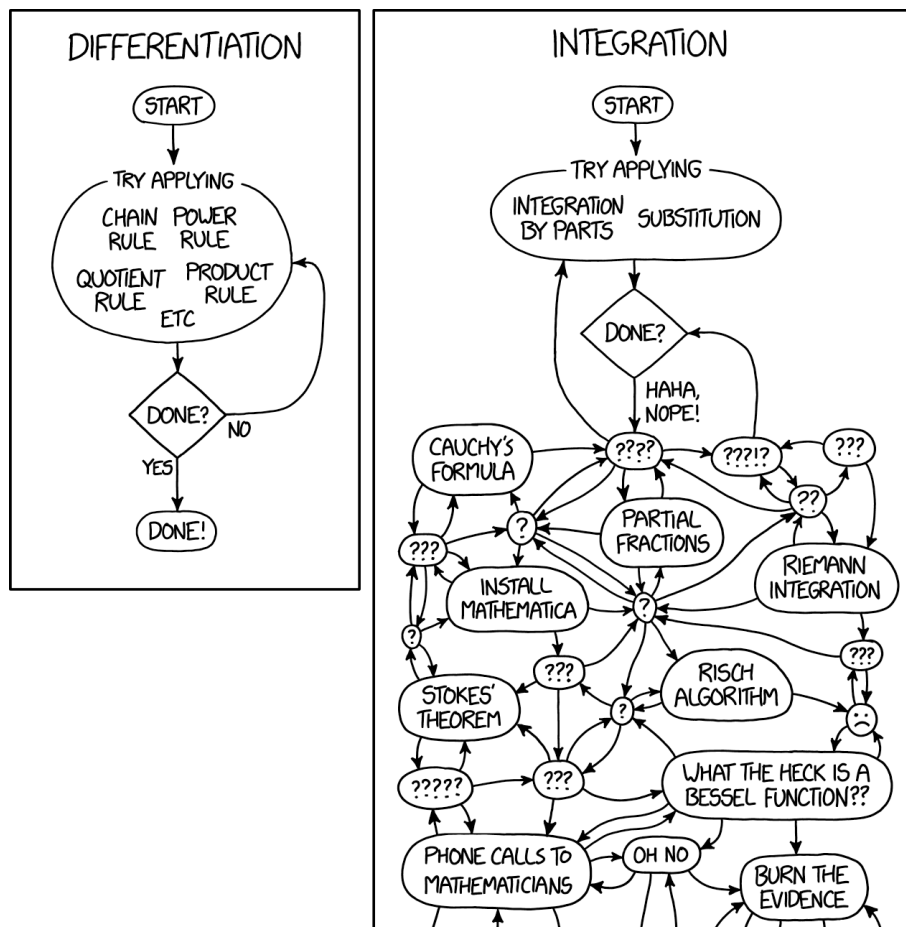


Abbildung 17: xkcd: “Differentiation and Integration”, <https://xkcd.com/2117>

17. Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen und der Satz von Taylor

Definition 17.1. Sei K eine Menge und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$.

- (a) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise* gegen eine Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, falls für jedes feste $x \in K$ gilt:

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

- (b) Die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *konvergiert gleichmäßig* gegen eine Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$, falls

$$\|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Dabei ist die Supremumsnorm $\|f\|$ für jede Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ definiert als

$$\|f\| := \|f\|_K := \sup \{|f(x)| : x \in K\} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Bemerkung 17.2. (1) Die Aussage $\|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ist äquivalent zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N : \|f - f_n\| < \varepsilon$$

und damit zu

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \forall x \in K : |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

- (2) Es gilt genau dann $\|g\| < \infty$, wenn g beschränkt ist.

- (3) Die Supremumsnorm erfüllt die Dreiecksungleichung. Aus $\|f - f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ folgt somit

$$\|f_n\| = \|(f_n - f) + f\| \leq \underbrace{\|f_n - f\|}_{\rightarrow 0} + \|f\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|.$$

- (4) Punktweise Konvergenz ist eine sehr schwache Form der Konvergenz; typischerweise gehen Eigenschaften der f_n im Grenzwert verloren. So ist der punktweise Grenzwert stetiger Funktion im Allgemeinen nicht stetig: Für

$$f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^n$$

konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen die unstetige Funktion

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0, 1), \\ 1, & \text{falls } x = 1. \end{cases}$$

Siehe auch [Abbildung 18](#).

Satz 17.3. Sei $K \subseteq \mathbb{C}$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ konvergiert. Dann ist f stetig.

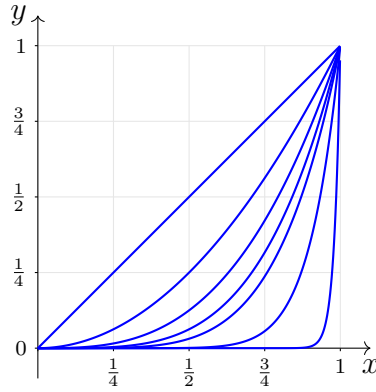


Abbildung 18: Graph von $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$ für $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 10, 50\}$ (von links oben nach rechts unten).

Beweis. Wir müssen zeigen, dass f in $x \in K$ stetig ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Da f_N stetig in x ist, existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\forall y \in K : |x - y| < \delta \Rightarrow |f_N(x) - f_N(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Für alle $y \in K$ mit $|x - y| < \delta$ gilt also

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(y) + f_N(y) - f(y)| \\ &\leq \underbrace{|f(x) - f_N(x)|}_{\leq \|f - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(x) - f_N(y)|}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_N(y) - f(y)|}_{\leq \|f - f_N\| < \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist f in x stetig. □

Satz 17.4 (Konvergenzkriterium von Weierstraß). Sei K eine Menge und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty$. Dann konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig und in jedem Punkt absolut gegen eine Funktion $F : K \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\|F\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|.$$

Beweis. Für jedes $x \in K$ gilt $|f_n(x)| \leq \|f_n\|$, also konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ absolut nach dem Majorantenkriterium. Somit ist

$$F : K \rightarrow \mathbb{C}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

eine wohldefinierte Funktion. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $F_n := \sum_{k=1}^n f_k$. Dann gilt $\|F - F_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, denn für alle $x \in K$ gilt

$$|F(x) - F_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\|$$

und damit

$$\|F - F_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|f_k\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

da $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|$ konvergiert. Aus

$$\|F\| \xleftarrow{n \rightarrow \infty} \|F_n\| = \left\| \sum_{k=1}^n f_k \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|f_k\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$$

folgt dann $\|F\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|$. □

Definition 17.5. Sei K eine Menge und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : K \rightarrow \mathbb{C}$. Wir sagen, dass $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *normal* konvergiert, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\| < \infty$.

Beispiel 17.6. (1) Sei $K = \mathbb{R}$ und $f_n(x) := 2^{-n} \sin(nx)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\|f_n\| = 2^{-n}$ und

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\| = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2 < \infty,$$

also konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \sin(nx)$ normal auf \mathbb{R} (dies ist ein Beispiel für eine sogenannte *Fourier-Reihe*).

(2) Die (*Riemannsche*) *Zeta-Funktion* $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ ist für $s > 0$ eine Reihe über die monoton fallenden Funktionen $f_n(s) := \frac{1}{n^s}$, für jedes $\rho > 0$ gilt also $\|f_n\|_{[\rho, \infty)} = \frac{1}{n^\rho}$. Mit [Beispiel 16.36](#) gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{[\rho, \infty)} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\rho} < \infty$$

für $\rho > 1$, also konvergiert $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ normal auf $[\rho, \infty)$ für jedes $\rho > 1$.

Definition 17.7. Eine *Potenzreihe* ist ein formaler Ausdruck der Form

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$, Koeffizienten $c_n \in \mathbb{C}$, einem *Entwicklungspunkt* $a \in \mathbb{C}$ und einer (komplexen) Unbestimmten z . Wir sagen, dass die Potenzreihe für $z = z_1 \in \mathbb{C}$ konvergiert, wenn die Reihe

$$\sum_{n=k}^{\infty} c_n (z_1 - a)^n$$

konvergiert.

Beispiel 17.8. Die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ und $\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ sind Potenzreihen.

Satz 17.9. Sei $\sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - a)^n$ eine Potenzreihe, die für ein $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$ konvergiert. Weiterhin sei $\rho \in (0, |z_1 - a|)$ und

$$K(a, \rho) := \{w \in \mathbb{C} : |w - a| \leq \rho\}.$$

Dann gilt:

- (i) Die Potenzreihe $\sum_{n=k}^{\infty} c_n (z - a)^n$ konvergiert normal (also insbesondere gleichmäßig) auf $K(a, \rho)$.
- (ii) Die Potenzreihe $\sum_{n=k}^{\infty} n c_n (z - a)^{n-1}$ konvergiert ebenfalls normal auf $K(a, \rho)$.

Beweis. Sei $K := K(a, \rho)$.

(i) Für

$$f_n : K \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto c_n(z - a)^n,$$

müssen wir zeigen, dass $\sum_{n=k}^{\infty} \|f_n\| < \infty$. Es gilt

$$|f_n(z)| = |c_n| \cdot |z - a|^n \leq |c_n| \cdot \rho^n \quad \text{für alle } z \in K.$$

Mit $q := \frac{\rho}{|z_1 - a|} < 1$ gilt

$$\|f_n\| \leq |c_n| \cdot \rho^n = \left(\frac{\rho}{|z_1 - a|} \right)^n \cdot |c_n| \cdot |z_1 - a|^n = q^n \cdot |c_n| \cdot |z_1 - a|^n.$$

Nach Voraussetzung ist $\sum_{n=k}^{\infty} c_n(z_1 - a)^n$ konvergent, also ist nach dem Nullfolgenkriterium $(c_n(z_1 - a)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge und damit insbesondere beschränkt: Es existiert ein $C \in \mathbb{R}$ mit

$$|c_n| \cdot |z_1 - a|^n \leq C \quad \text{für alle } n \geq k.$$

Somit gilt

$$\|f_n\| \leq q^n \cdot |c_n| \cdot |z_1 - a|^n \leq q^n \cdot C \quad \text{für alle } n \geq k.$$

Wegen $q < 1$ konvergiert $\sum_{n=k}^{\infty} q^n$, also folgt

$$\sum_{n=k}^{\infty} \|f_n\| \leq \sum_{n=k}^{\infty} (q^n \cdot C) = C \sum_{n=k}^{\infty} q^n < \infty.$$

(ii) Für

$$g_n : K \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto n c_n (z - a)^{n-1} = \frac{n}{z - a} f_n(z)$$

erhält man analog zum vorherigen Teil

$$|g_n(z)| = n \cdot |c_n| \cdot |z - a|^{n-1} \leq n \cdot |c_n| \cdot \rho^{n-1} \quad \text{für alle } z \in K,$$

also

$$\|g_n\| \leq n \cdot |c_n| \cdot \rho^{n-1} = q^n \cdot \frac{1}{\rho} \cdot n \cdot |c_n| \cdot |z_1 - a|^n \leq n \cdot q^n \cdot \frac{C}{\rho}.$$

Wegen $q < 1$ konvergiert $\sum_{n=k}^{\infty} n q^n$ laut Quotientenkriterium, also folgt

$$\sum_{n=k}^{\infty} \|g_n\| \leq \sum_{n=k}^{\infty} \left(n \cdot q^n \cdot \frac{C}{\rho} \right) = \frac{C}{\rho} \sum_{n=k}^{\infty} n q^n < \infty. \quad \square$$

Definition 17.10. Sei $\sum_{n=k}^{\infty} c_n(z - a)^n$ eine Potenzreihe. Dann heißt

$$r := \sup \left\{ |z_1 - a| : \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z - a)^n \text{ konvergiert} \right\}$$

der *Konvergenzradius* der Potenzreihe. Dabei ist $r = \infty$ möglich, dann konvergiert die Potenzreihe für alle z .

Bemerkung 17.11. (1) Für jedes $\rho \in (0, r)$ konvergiert $\sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n$ in $K(a, \rho)$ normal.

(2) Sei $z \in \mathbb{C}$.

- Im Fall $|z-a| < r$ konvergiert $\sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n$.
- Im Fall $|z-a| > r$ divergiert $\sum_{n=k}^{\infty} c_n(z-a)^n$.
- Im Fall $|z-a| = r$ ist im Allgemeinen keine Aussage möglich.

Beispiel 17.12. (1) Die Reihen

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

haben jeweils Konvergenzradius $r = \infty$.

(2) Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ konvergiert für $|z| < 1$ und konvergiert nicht für $|z| > 1$, hat also Konvergenzradius $r = 1$.

(3) Für $|1-z| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1-z)^n = \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z},$$

also ist $\frac{1}{z}$ darstellbar als Potenzreihe um 1 mit Konvergenzradius 1.

Satz 17.13. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Regelfunktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die gleichmäßig gegen eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Dann ist f eine Regelfunktion und

$$\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$. Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Da f_n eine Regelfunktion ist, gibt es eine Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\|f_n - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann gilt

$$\|f - \varphi\| = \|f - f_n + f_n - \varphi\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - \varphi\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

also ist f eine Regelfunktion. Weiterhin gilt

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \int_a^b f_n(t) dt \right| = \left| \int_a^b (f - f_n)(t) dt \right| \leq \underbrace{\|f - f_n\|}_{\rightarrow 0} \cdot (b-a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

also gilt $\int_a^b f_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) dt$. □

Satz 17.14. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Wenn zusätzlich die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen gleichmäßig gegen eine Funktion $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, so ist f differenzierbar mit $f' = g$.

Beweis. Sei $x \in [a, b]$, wir wollen zeigen, dass $f'(x) = g(x)$.

- Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen f konvergiert, gilt

$$f_n(a) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a) \quad \text{und} \quad f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

- Da die f'_n nach Voraussetzung stetig sind, ist laut **Satz 17.3** auch g stetig und laut **Satz 17.13** gilt

$$\int_a^x f'_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^x g(t) dt.$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung gilt

$$f(x) \xleftarrow{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a) + \int_a^x g(t) dt,$$

also

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t) dt.$$

Laut **Satz 16.20** ist f differenzierbar mit $f'(x) = g(x)$. □

Korollar 17.15. Sei

$$f : (a - r, a + r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n \quad \text{mit} \quad a, c_n \in \mathbb{R}$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $r > 0$.⁴⁶ Dann gilt:

- (i) Die Funktion f ist differenzierbar und ihre Ableitung ist gegeben durch die Potenzreihe

$$f' : (a - r, a + r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - a)^{n-1};$$

letztere hat ebenfalls Konvergenzradius r .

- (ii) Die Funktion

$$F : (a - r, a + r) \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} c_n (x - a)^{n+1}$$

ist eine Stammfunktion von f und hat ebenfalls Konvergenzradius r .

Beweis. (i) Für jedes $\rho \in (0, r)$ und jedes $x \in (a - \rho, a + \rho)$ konvergiert die Folge der Partialsummen $\sum_{n=0}^N c_n (x - a)^n$ punktweise gegen $f(x)$ und $\sum_{n=1}^N n c_n (x - a)^{n-1}$ gleichmäßig gegen $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x - a)^{n-1}$, da g laut **Satz 17.9** den gleichen Konvergenzradius hat wie f . Laut **Satz 17.14** ist f differenzierbar und $f'(x) = g(x)$.

- (ii) Die Funktion F hat auch den gleichen Konvergenzradius wie f , $F' = f$ folgt aus dem ersten Teil. □

Beispiel 17.16. Die Exponentialreihe $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat Konvergenzradius $r = \infty$. Somit gilt

$$\exp'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \exp(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Dies rechtfertigt die formale Rechnung aus **Bemerkung 14.12**.

⁴⁶Per Konvention gilt weiterhin $0^0 = 1$, also $f(a) = c_0$.

Bemerkung 17.17. **Korollar 17.15** kann beliebig oft iteriert werden: Eine Potenzreihe ist auf $(a - r, a + r)$ beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$f(a) = c_0, \quad f'(a) = c_1, \quad f''(a) = 2c_2, \quad f'''(a) = 3!c_3, \quad \dots \quad f^{(n)}(a) = n!c_n,$$

also

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Definition 17.18. Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $a \in I$. Für eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n$$

die *Taylorreihe* von f um a .

Bemerkung 17.19. (1) A priori ist die Taylorreihe nur ein formaler Ausdruck.

(2) Falls f durch eine in I konvergente Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - a)^n$ dargestellt werden kann, gilt notwendigerweise $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, also ist diese Potenzreihe bereits eine Taylorreihe. Insbesondere gibt es höchstens eine Darstellung von f als Potenzreihe um a .

(3) Vorsicht: Die Taylorreihe kann konvergieren, ohne f darzustellen: Für

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{falls } x = 0, \end{cases}$$

gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Somit ist die Taylorreihe von f um 0 gegeben durch $\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$. Diese Taylorreihe hat Konvergenzradius $r = \infty$ und konvergiert auf \mathbb{R} gegen die konstante Nullfunktion. Somit stimmt die Taylorreihe nur im Punkt 0 mit der ursprünglichen Funktion f überein.

Satz 17.20 (Satz von Taylor/Taylor-Formel). Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar. Für alle $a, x \in I$ gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + R_{n+1}(x),$$

wobei

$$R_{n+1}(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t) dt.$$

Beweis. Beweis mittels vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$:

- Für $n = 0$ ist

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

gerade der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung **16.23**.

- Sei die Aussage für n wahr und f $(n+2)$ -mal stetig differenzierbar. Für das Restglied gilt dann mit partieller Integration

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_a^x \underbrace{(x-t)^n}_{v'} \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_u dt \\
&= \frac{1}{n!} \underbrace{\frac{-1}{n+1}(x-t)^{n+1}}_v \underbrace{f^{(n+1)}(t)}_u \Big|_a^x - \frac{1}{n!} \int_a^x \underbrace{\frac{-1}{n+1}(x-t)^{n+1}}_v \underbrace{f^{(n+2)}(t)}_{u'} dt \\
&= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} \int_a^x (x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t) dt \\
&= \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} + R_{n+2}(x),
\end{aligned}$$

also gilt die Aussage auch für $n+1$. □

Bemerkung 17.21. (1) Eine Funktion f ist also in x genau dann durch die Taylorreihe darstellbar, wenn $R_{n+1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

- (2) Nützlich ist oft die sogenannte *Lagrange-Form* für R_{n+1} :

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

für ein ξ zwischen x und a . Die Form des Restglieds in [Satz 17.20](#) heißt auch *Integraldarstellung*.

- (3) Das Polynom $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ heißt auch *n -tes Taylorpolynom von f um a* .

Beispiel 17.22. (1) Für $f(x) = e^x$ gilt $f^{(n)}(x) = e^x$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, an der Stelle $a = 0$ also $f^{(n)}(a) = e^0 = 1$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
R_{n+1}(x) &= \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n e^t dt \leq \frac{1}{n!} e^x \frac{-1}{n+1} (x-t)^{n+1} \Big|_0^x \\
&= \frac{1}{n!} e^x \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
&\leq \underbrace{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}_{\rightarrow 0} \cdot e^x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,
\end{aligned}$$

also $R_{n+1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Somit ist $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ durch seine Taylorreihe gegeben. Analog zeigt man dies für

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

- (2) Für $f(x) = \ln(1+x)$ gilt

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad \text{und} \quad f'''(x) = 2\frac{1}{(1+x)^3}.$$

Induktiv erhält man

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)! \frac{1}{(1+x)^n},$$

die Taylorreihe um $a = 0$ ist gegeben durch

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Durch Abschätzung erhält man

$$|R_{n+1}(x)| = \left| \int_0^x (x-t)^n \frac{1}{(1+t)^{n+1}} dt \right| \leq \dots \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)},$$

also $R_{n+1}(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ für $x \in (-1, 1)$. Dort hat man also

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \text{für } x \in (-1, 1).$$

Wie sieht es am Rand des Intervalls aus? Am Randpunkt $x = -1$ sind beide Seiten $-\infty$. Für $x = 1$ nehmen beide Seiten allerdings einen endlichen Wert an. Dass diese beiden Werte dann auch übereinstimmen müssen, folgt aus folgendem Satz.

Satz 17.23 (Abelscher Grenzwertsatz). Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe reeller Zahlen. Dann konvergiert die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ in allen $x \in [0, 1]$ und es gilt

$$\lim_{x \nearrow 1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Somit erhalten wir also

$$\ln(2) = \lim_{x \nearrow 1} \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

als den Wert der alternierenden harmonischen Reihe.

A. Das griechische Alphabet

Bemerkung A.1. In der Mathematik kommen häufig griechische Buchstaben zum Einsatz, die der Vollständigkeit halber in der folgenden Tabelle aufgelistet sind:

Buchstabe		Name
A	α	Alpha
B	β	Beta
Γ	γ	Gamma
Δ	δ	Delta
E	ε, ϵ	Epsilon
Z	ζ	Zeta
H	η	Eta
Θ	θ, ϑ	Theta
I	ι	Iota
K	κ	Kappa
Λ	λ	Lambda
M	μ	My ("Mü")
N	ν	Ny ("Nü")
Ξ	ξ	Xi
O	o	Omikron
Π	π	Pi
P	ρ	Rho
Σ	σ	Sigma
T	τ	Tau
Υ	υ	Ypsilon
Φ	φ, ϕ	Phi
Ψ	ψ	Psi
Ω	ω	Omega

Da beispielsweise ein großes Alpha nicht von einem großen "a" zu unterscheiden ist, verwendet man natürlich nur diejenigen Buchstaben, die sich von den lateinischen Buchstaben unterscheiden lassen.

B. Summen- und Produktzeichen

In [Notation 1.11](#) wurde das Summenzeichen \sum und das Produktzeichen \prod definiert als

$$\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_n \quad \text{und} \quad \prod_{k=1}^n a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n,$$

solange a_1, \dots, a_n Zahlen sind. Man kann diese Definition problemlos auf $a_1, \dots, a_n \in K$ für einen beliebigen Körper K erweitern, siehe auch Kapitel 3. Statt von 1 bis n kann man auch beliebige andere ganzzahlige Grenzen nehmen:

Definition B.1. Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq n$. Weiterhin sei K ein Körper und $a_k \in K$ für alle $m \leq k \leq n$. Dann definieren wir

$$\sum_{k=m}^n a_k := a_m + a_{m+1} + \dots + a_n \quad \text{und} \quad \prod_{k=m}^n a_k := a_m \cdot a_{m+1} \cdot \dots \cdot a_n.$$

Für $m > n$ setzen wir weiterhin

$$\sum_{k=m}^n a_k := 0 \quad \text{und} \quad \prod_{k=m}^n a_k := 1.$$

Aus den Körperaxiomen ([Definition 3.1](#)) erhält man die folgenden Rechenregeln:

Lemma B.2. Seien $m, n, p \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq p \leq n$. Weiterhin sei K ein Körper und $a, a_k, b_k \in K$ für alle $m \leq k \leq n$. Dann gilt:

$$(a) \quad \left(\sum_{k=m}^p a_k \right) + \left(\sum_{k=p+1}^n a_k \right) = \sum_{k=m}^n a_k.$$

$$(b) \quad \left(\prod_{k=m}^p a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=p+1}^n a_k \right) = \prod_{k=m}^n a_k.$$

$$(c) \quad \left(\sum_{k=m}^n a_k \right) + \left(\sum_{\ell=m}^n b_\ell \right) = \sum_{t=m}^n (a_t + b_t).$$

$$(d) \quad \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \cdot \left(\prod_{\ell=m}^n b_\ell \right) = \prod_{t=m}^n (a_t \cdot b_t).$$

$$(e) \quad \sum_{k=m}^n (a \cdot a_k) = a \cdot \left(\sum_{k=m}^n a_k \right).$$

$$(f) \quad \prod_{k=m}^n (a \cdot a_k) = a^{n-m+1} \cdot \left(\prod_{k=m}^n a_k \right).$$

Dramatis personae

ABEL, Niels Henrik (1802-1829), [119](#)

ARCHIMEDES (ca. 287 v.Chr.-212 v.Chr.), [22](#), [97](#)

BERNOULLI, Jakob I (1655-1705), [22](#)

BERNOULLI, Johann I (1667-1748), [95](#)

BOLZANO, Bernard (1781-1848), [36](#)

CANTOR, Georg (1845-1918), [10](#), [16](#)

CAUCHY, Augustin-Louis (1789-1857), [33](#), [41](#), [50](#), [73](#), [83](#)

DE MORGAN, Augustus (1806-1871), [13](#)

EULER, Leonhard (1707-1783), [48](#)

FOURIER, Joseph (1768-1830), [113](#)

GAUSS, Carl Friedrich (1777-1855), [6](#), [50](#)

LAGRANGE, Joseph-Louis (1736-1813), [118](#)

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (1646-1716), [45](#), [83](#), [97](#)

L'HOSPITAL, Guillaume François Antoine, Marquis de (1661-1704), [95](#)

NEWTON, Isaac (1643-1727), [83](#), [97](#)

PASCAL, Blaise (1623-1662), [8](#)

RIEMANN, Bernhard (1826-1866), [107](#), [113](#)

ROLLE, Michel (1652-1719), [92](#)

TAYLOR, Brook (1685-1731), [117](#), [118](#)

VENN, John (1834-1923), [11](#)

WEIERSTRASS, Karl (1815-1897), [36](#), [83](#), [112](#)

Index

- Abbildung, 14
- Ableitung (einer Funktion), 83, 90
- Abzählbarkeit (von Mengen), 16
- Äquivalenz (Logik), 3
- Allquantor, 12
- alternierende harmonische Reihe, 32, 46
- angeordnet (Körper), 20
- archimedisch (angeordneter Körper), 22
- Arkuskosinus, 80
- Arkussinus, 80
- Aussagenlogik, 3
- Axiom, 3

- bedingt konvergent, bedingte
 Konvergenz (einer Reihe), 46
- Bernoullische Ungleichung, 22
- beschränkt, Beschränktheit
 - einer Folge, 27
 - einer Funktion, 64
 - einer Menge, 53
- bestimmt divergent, 30
- bestimmtes Integral, 105
- Betrag
 - einer komplexen Zahl, 71
 - in einem angeordneten Körper, 22
- Beweis
 - direkter, 4
 - per Kontraposition, 4
 - per Widerspruch, 4
- bijektiv, Bijektion, 14
- Bild (unter einer Funktion), 14
- Binomialkoeffizient, 7
- Binomischer Lehrsatz, 7

- Cauchy-Folge
 - komplexer Zahlen, 73
 - reeller Zahlen, 33
- Cauchy-Kriterium, 41
- Cauchy-Produkt (von Reihen), 50

- Definitionsbereich (einer Funktion), 14
- differenzierbar, Differenzierbarkeit (einer
 Funktion), 83
- Disjunktion (Logik), 3
- divergent, Divergenz (einer Folge), 24
- Divergenzkriterium, *siehe*
 Nullfolgenkriterium

- Dreiecksungleichung
 - in den komplexen Zahlen, 71
 - in einem angeordneten Körper, 22

- Element (einer Menge), 10
- Eulersche Zahl, 48
- Existenzquantor, 12
- Exponentialfunktion, 48

- Fakultät, 7
- Folge, 24
- Fundamentalsatz der Algebra, 71
- Funktion, 14

- Ganze Zahl, 11
- Gaußsche Summenformel, 6
- geometrische Reihe, 31
- gleichmäßig stetig, gleichmäßige
 Stetigkeit (einer Funktion), 64
- gleichmäßige Konvergenz (einer
 Funktionsfolge), 111
- Graph (einer Funktion), 57
- Grenzwert
 - einer komplexen Folge, 72
 - einer reellen Folge, 24
- Grenzwertsätze
 - für komplexe Folgen, 73
 - für reelle Folgen, 27

- harmonische Reihe, 32
- Hauptsatz der Differential- und
 Integralrechnung, 105
- Häufungspunkt, 36, 55

- Identitätsabbildung, 14
- imaginäre Einheit, 70
- Imaginärteil (einer komplexen Zahl), 71
- Implikation (Logik), 3
- Induktion, *siehe* Vollständige Induktion
- Infimum (einer Teilmenge von \mathbb{R}), 53
- injektiv, Injektion, 14
- Integral
 - über Regelfunktionen, 102
 - über stetige Funktionen, 105
 - über Treppenfunktionen, 98
- Integralkriterium, 109
- Intervall, 34, 103
- Intervallschachtelungsprinzip, 34

Kettenregel, 86
 Komplement (von Mengen), 11
 komplex Konjugierte (einer komplexen Zahl), 71
 Komplexe Zahl, 11, 70
 Komposition (von Funktionen), 14
 Konjunktion (Logik), 3
 konvergent, Konvergenz
 einer komplexen Folge, 72
 einer reellen Folge, 24
 einer Reihe, 31
 Konvergenzkriterium von Weierstraß (für Funktionenfolgen), 112
 Konvergenzradius (einer Potenzreihe), 114
 Kosinus, 77
 Körper, 18

 Laufindex, 5
 Leere Menge, 11
 Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen, 45
 Limes inferior, 55
 Limes superior, 55
 Limitenregeln, *siehe* Grenzwertsätze
 Logarithmus, 67

 Majorantenkriterium, 42
 Maximum (einer Teilmenge von \mathbb{R}), 54
 Menge, 10
 Minimum (einer Teilmenge von \mathbb{R}), 54
 Mittelwertsatz, 92
 monoton, Monotonie
 von Folgen, 37
 von Funktionen, 66
 Monotoniekriterium (für Funktionen), 92
 Mächtigkeit (von Mengen), 16

 Natürliche Zahl, 11
 Negation (Logik), 3, 12
 normale Konvergenz (einer Reihe über eine Funktionenfolge), 113
 Nullfolgenkriterium, 41

 Partialsumme, 31
 Partielle Integration, 106
 Pascalsches Dreieck, 8
 Potenzreihe, 113
 Produktregel, 85
 Produktschreibweise, 5, 121

 punktweise Konvergenz (einer Funktionenfolge), 111

 Quotientenkriterium, 43
 Quotientenregel, 86

 Rationale Zahl, 11
 Realteil (einer komplexen Zahl), 71
 Reelle Zahl, 11
 reelle/reellwertige Funktion, 57
 Regel von de Morgan, 13
 Regel von l'Hospital, 95
 Regelfunktion, 100
 Reihe, 31, 41
 Riemannsche Summen, 107

 Satz vom Minimum und Maximum, 64
 Satz von Rolle, 92
 Satz von Taylor, 117
 Schnitt (von Mengen), 10
 Sinus, 77
 Stammfunktion, 104
 stetig differenzierbar, stetige Differenzierbarkeit (einer Funktion), 90
 stetig, Stetigkeit (einer Funktion), 60
 Substitutionsregel, 106
 Summenschreibweise, 5, 121
 Supremum (einer Teilmenge von \mathbb{R}), 53
 Supremumseigenschaft, 53
 Supremumsnorm (einer Funktion), 99, 111
 surjektiv, Surjektion, 14

 Taylor-Formel, 117
 Taylorreihe, 117
 Teilfolge, 36
 Teilmenge, 10
 Treppenfunktion, 97
 Trivialkriterium, *siehe* Nullfolgenkriterium

 Überabzählbarkeit (von Mengen), 16
 Umkehrabbildung, 15
 Umordnung (einer Reihe), 47
 Umordnungssatz, 47
 unbestimmt divergent, 30
 unbestimmtes Integral, 105
 uneigentlich konvergent, *siehe* bestimmt divergent

Unterteilung (eines Intervalls), 97
Urbild (unter einer Funktion), 14

Venn-Diagramm, 11
Vereinigung (von Mengen), 10
Vollständige Induktion, 5

Vollständigkeitsaxiom, 33

Wahrheitstafel, 3
Wertebereich (einer Funktion), 14
Wurzelkriterium, 44
Zwischenwertsatz, 63

Symbolverzeichnis

Logische Operatoren

\exists	Existenzquantor, 12
\forall	Allquantor, 12
\Leftrightarrow	logische Äquivalenz, 3
\neg	logische Negation, 3
\Rightarrow, \Leftarrow	logische Implikation, 3
\vee	logisches oder, 3
\wedge	logisches und, 3

Mengentheorie

\in, \notin	Elementbeziehung, 10
$\subset, \subseteq, \subsetneq$	Teilmengenbeziehung, 10
\cup	mengentheoretische Vereinigung, 10
\cap	mengentheoretischer (Durch)Schnitt, 10
\setminus	mengentheoretisches Komplement, 11
\emptyset	leere Menge, 11
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \dots\}$, 11
\mathbb{N}_0	Menge der natürlichen Zahlen mit Null $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$, 11
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen $\{-2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, 11
\mathbb{Q}	Menge der rationalen Zahlen, 11
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen, 11
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen, 70
sup	Supremum einer Menge, 54
inf	Infimum einer Menge, 54
max	Maximum einer Menge, 54
min	Minimum einer Menge, 54

Grenzwerte

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Folge von Zahlen, 24
$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$	Grenzwert einer Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, auch $a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$, 24
$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$	(unendliche) Reihe über die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, 31
$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$	Limes superior der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, auch $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, 55
$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$	Limes inferior der Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, auch $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n$, 55
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	Grenzwert einer Funktion f an der Stelle a , 58

Komplexe Zahlen

i	imaginäre Einheit, $i^2 = -1$, 70
Re	Realteil, 71
Im	Imaginärteil, 71
\bar{z}	komplex Konjugierte(s) einer komplexen Zahl z , 71
$ z $	Betrag einer komplexen Zahl z , 71
\arg	Argument oder Winkel einer komplexen Zahl, 81

Exponentialfunktion und Trigonometrie

\exp	(natürliche) Exponentialfunktion, 48
e	Eulersche Zahl, $e = 2.71828\dots$, 48
\ln	(natürlicher) Logarithmus, 67
\cos	Kosinus, 77
\sin	Sinus, 77
π	Kreiszahl, $\pi = 3.14159\dots$, 80
\arccos	Arkuskosinus, 80
\arcsin	Arkussinus, 80

Differential- und Integralrechnung

$f'(x_0)$	Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 , 83
f'	erste Ableitung einer Funktion f , 90
$f^{(n)}$	n -te Ableitung einer Funktion f , 90
$\ f\ $	Supremumsnorm einer Funktion f , 99
$\int_a^b f(x) dx$	bestimmtes Integral über eine Regelfunktion f von a bis b , 102
$\int f(x) dx$	unbestimmtes Integral oder Stammfunktion von f , 105

Weitere Symbole

$\sum_{k=1}^n a_k$	endliche Summe $a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 121
$\prod_{k=1}^n a_k$	endliches Produkt $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$, 121