Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 4
Abgabe: Montag, 7. 12. 2020, 14:00 Uhr
per E-Mail oder Teams-Nachricht an Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor

---

Aufgabe 1 (3 + (3 + 4) Punkte):

(a) Rechnen Sie nach, dass

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 7 - 2|x-6| \leq 2x - 1\} = \mathbb{R}.$$

(b) Bestimmen Sie für die folgenden beiden Ungleichungen jeweils die Lösungsmenge:

$$\big|7 - 2|x-6|\big| \leq 2x - 1 \qquad \text{und} \qquad \big||x^2 - 9| - 1\big| < 2.$$

Aufgabe 2 (5 × 2 Punkte): Sind die folgenden Mengen nach oben beschränkt, nach unten beschränkt, beschränkt? Falls ja, bestimmen Sie das Supremum und das Infimum sowie, falls existent, das Maximum und das Minimum der Mengen.

$$M_1 = (a,b) \cup (b,c] \qquad \text{für } a,b,c \in \mathbb{R} \text{ mit } a < b < c$$

$$M_2 = \left\{ (-1)^n \frac{1}{n^2} + n \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$M_3 = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\middle|\; \frac{1}{x} > \frac{1}{x^4} \right\}$$

$$M_4 = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \;\middle|\; \frac{1}{x} \leq \frac{1}{x^4} \right\}$$

$$M_5 = \big\{ x \in \mathbb{R} \;\big|\; |x+3| > |x-2| \big\}$$

Aufgabe 3 (6 + 4 Punkte):

(a) Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion die *Bernoullische Ungleichung*: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(b) Geben Sie für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 0$ einen direkten Beweis der Bernoullischen Ungleichung mithilfe des binomischen Lehrsatzes.

bitte wenden

Aufgabe 4 (2 + 3 + 5 Punkte): Wir betrachten die Potenzmenge $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ der Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, d. h. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) := \{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *überabzählbar* ist (d. h. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist nicht höchstens abzählbar unendlich). In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen überabzählbar ist. Diesen Beweis wollen wir imitieren. Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

(a) Begründen Sie, warum $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ keine endliche Menge sein kann.

(b) Zu jedem $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ assoziieren wir eine Funktion $f_A : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ durch die Vorschrift

$$f_A(n) := \begin{cases} 1, & \text{falls } n \in A \\ 0, & \text{falls } n \notin A \end{cases}.$$

Erstellen Sie für jede der beiden Mengen $A = \{1, 5, 6\}$ und $A = \{n \mid n \text{ gerade}\}$ eine (aussagekräftige) Wertetabelle für die jeweilige Funktion f_A. Überlegen Sie sich anschließend, dass es umgekehrt zu jeder Funktion $f : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ eine Menge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gibt, sodass $f = f_A$.

(c) Nehmen Sie an, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar ist, d. h. es gibt eine Bijektion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Konstruieren Sie mithilfe von Aufgabenteil (b) ein „Diagonalelement“ $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, welches garantiert nicht im Bild von φ auftaucht.