Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 5
Abgabe: Montag, 14. 12. 2020, 14:00 Uhr
per E-Mail oder Teams-Nachricht an Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor

---

Aufgabe 1 (5 + 2 Punkte): Es sei $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ein Polynom n-ten Grades mit reellen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Für ein festes $x_0 \in \mathbb{R}$ definieren wir $b_{-1}, b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ rekursiv durch die Vorschrift

$$b_{n-1} = a_n \qquad \text{und} \qquad b_{k-1} = a_k + x_0 b_k \quad \text{für } k = n-1, \ldots 2, 1, 0.$$

(a) Zeigen Sie, dass $b_{-1} = p(x_0)$ gilt.

(b) Aufgabenteil (a) besagt, dass wir mithilfe der eingangs beschriebenen Rekursion den Wert des Polynoms p an einer beliebigen Stelle x_0 bestimmen können. Diese Rekursion lässt sich mittels des sogenannten *Horner-Schemas* sehr einfach durchführen:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\ + & & x_0 b_{n-1} & \ldots & x_0 b_1 & x_0 b_0 \\ \hline x_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_0 & p(x_0) \end{array}$$

Erläuterung: Hier werden die Koeffizienten von p in die erste Zeile sowie der führende Koeffizient a_n zusätzlich in die dritte Zeile der erste Spalte von links geschrieben (gemäß $b_{n-1} = a_n$). Beginnend in der ersten Spalte von links wird nacheinander in jeder Spalte der jeweilige Eintrag in der dritten Zeile (nämlich b_k) mit x_0 multipliziert und das Ergebnis (nämlich $x_0 b_k$) in der zweiten Zeile der jeweils nächsten Spalte notiert; anschließend werden in dieser Spalte die übereinanderstehenden Einträge addiert und das Ergebnis (nämlich $b_{k-1} = a_k + x_0 b_k$) in der dritten Zeile eingetragen. Der Eintrag in der dritten Zeile der letzten Spalte ist dann gerade $p(x_0)$.

Berechnen Sie mithilfe des Horner-Schemas $p(2)$ für $p(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$.

Aufgabe 2 (5 + 4 + 2 Punkte): In der Situation von Aufgabe 1 nehmen wir nun an, dass x_0 eine Nullstelle von p ist (d. h. es gelte $p(x_0) = 0$).

(a) Zeigen Sie, dass $p(x) = q(x)(x - x_0)$ gilt, wobei $q(x) := b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$.

bitte wenden

(b) Aufgabenteil (a) besagt, dass wir aus dem in Aufgabe 1 beschriebenen Horner-Schema zur Berechnung von $p(x_0)$ im Fall einer Nullstelle x_0 von p das Ergebnis $q(x)$ der Polynomdivision $p(x) : (x - x_0)$ ablesen können.
Überprüfen Sie diese Feststellung am Beispiel $p(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$ und $x_0 = 1$, indem Sie hier sowohl das Horner-Schema anwenden, als auch die Polynomdivision $p(x) : (x - 1)$ durchführen.

(c) Faktorisieren Sie das Polynom $p(x) = x^3 - 3x^2 - 13x + 15$ vollständig in Linearfaktoren und geben Sie alle Nullstellen von p an.

Aufgabe 3 (3 + (3 + 3) Punkte): Mithilfe der natürlichen Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \exp(x) = e^x$ definiert man die sogenannten *Hyperbelfunktionen* als

$$\sinh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}\big) \qquad \text{und} \qquad \cosh\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big).$$

Man nennt sinh den *Sinus hyperbolicus* und cosh den *Cosinus hyperbolicus.* Diese Funktionen besitzen Eigenschaften, die denen der trigonometrischen Funktionen sin und cos sehr ähnlich sind:

(a) Zeigen Sie, dass $\cosh^2(y) - \sinh^2(y) = 1$ für alle $y \in \mathbb{R}$ gilt.

(b) Beweisen Sie für $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ die beiden *Additionstheoreme*

$$\begin{aligned}\sinh(y_1 + y_2) &= \sinh(y_1)\cosh(y_2) + \cosh(y_1)\sinh(y_2),\\ \cosh(y_1 + y_2) &= \cosh(y_1)\cosh(y_2) + \sinh(y_1)\sinh(y_2).\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 + 5 + 4 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass eine gerade und monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konstant sein muss.

(b) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die streng monoton wachsend und beschränkt ist. Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum.

(c) Kann eine streng monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ihr Maximum bzw. Minimum annehmen?