Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 7
Abgabe: Montag, 11. 1. 2021, 14:00 Uhr
per E-Mail oder Teams-Nachricht an Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor

---

Aufgabe 1 (10 Punkte): Gegeben sei eine reelle Zahl $a > 0$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Hinweis: Unterscheiden Sie die drei Fälle $a > 1$, $a = 1$ und $a < 1$. Überlegen Sie sich, dass Sie den Fall $a < 1$ auf den Fall $a > 1$ zurückführen können.

Aufgabe 2 (4 + 6 Punkte): Wir definieren eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch die Rekursion

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{1+a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Begründen Sie, warum der Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls dieser existiert, die positive Lösung a der quadratischen Gleichung $a^2 + a - 1 = 0$ sein muss. Berechnen Sie anschließend den Wert von a.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass für den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls dieser existiert, $a \geq 0$ gelten muss. Verwenden Sie hierzu das Resultat aus Aufgabe 3 (a) von Blatt 6.

(b) Zeigen Sie, dass

$$|a_{n+1} - a| \leq \frac{1}{1+a}|a_n - a| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

und folgern Sie daraus die Konvergenz der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

Hinweis: Rechnen Sie zunächst nach, dass $a_{n+1} - a = -\frac{a_n - a}{(1+a)(1+a_n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 3 (8 Punkte): Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, und bestimmen Sie anschließend alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

bitte wenden

Aufgabe 4 (8 × 1,5 Punkte): Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und entscheiden Sie jeweils, ob sogar absolute Konvergenz vorliegt.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{-1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\big((-1)^n+2^{-n}\big)$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n^2+1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)^{-n}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+4^n}$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}5^{-n}$

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{3n-1}}{3^{5+2n}}$

Hinweis zu (g): Sie dürfen *ohne Beweis* verwenden, dass $(2n)! \leq 4^n(n!)^2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt. (Auch wenn Sie keinen Beweis dafür geben müssen, merken wir dennoch an, dass sich diese Aussage wie in Zusatzaufgabe 1 (c) des Zusatzblatts mit vollständiger Induktion beweisen lässt.)