Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 8
Abgabe: Montag, 18. 1. 2021, 14:00 Uhr
per E-Mail oder Teams-Nachricht an Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor

---

Aufgabe 1 (4 × 2,5 Punkte): Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}$$

(c) $$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$$

(b) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n(n+1)}}$$

(d) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)}$$

Aufgabe 2 (2 + 4 + 4 Punkte):

(a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n$$

konvergent?

(b) Es sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$. Zeigen Sie mithilfe der Rechenregeln für Reihen, dass

$$(1-x)\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

und folgern Sie daraus, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}. \tag{1}$$

(c) Geben Sie mithilfe des Cauchy-Produkts von Reihen einen weiteren Beweis für (1).

bitte wenden

Aufgabe 3 (5 + 5 Punkte): Wir betrachten die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben sind durch

$$\begin{aligned} f_n : [\tfrac{1}{2}, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \sqrt[n]{x}, \\ g_n : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x - \frac{1}{n}}{1 + 2\frac{x^2}{n^2}}, \\ h_n : [0, \infty) &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x - \frac{1}{n}}{1 + 2\frac{x^2}{n^2}}. \end{aligned}$$

(a) Welche dieser Folgen sind punktweise konvergent? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(b) Welche dieser Folgen sind sogar gleichmäßig konvergent?

Hinweis: Zur Untersuchung von $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ berechnen Sie zunächst $h_n(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 ((2 × 2) + (2 × 3) Punkte):

(a) Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Potenzreihen jeweils konvergieren:

(i) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}(x-1)^n$$ (ii) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{3}\, x^n$$

(b) Begründen Sie, warum es sich bei den folgenden Reihen um Potenzreihen im Sinne der Vorlesung handelt, und untersuchen Sie anschließend für welche $x \in \mathbb{R}$ diese jeweils konvergieren:

(i) $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n}(x-2)^{3n}$$ (ii) $$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^{2n}$$