Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 9
Abgabe: Montag, 25. 1. 2021, 14:00 Uhr
per E-Mail oder Teams-Nachricht an Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor

---

Aufgabe 1 (5 + 5 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{2}k + 1$ die Abschätzung

$$\left| e^x - \sum_{n=0}^{k} \frac{x^n}{n!} \right| \leq \frac{2|x|^{k+1}}{(k+1)!}$$

gilt. Imitieren Sie dazu die Rechnung aus der Vorlesung.

(b) Bestimmen Sie mithilfe des Resultats aus Aufgabenteil (a) eine Dezimalzahl, die e^2 bis auf einen Fehler von weniger als 0,02 annähert.

Aufgabe 2: Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegeben ist durch $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In dieser Aufgabe wollen wir zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist mit dem Grenzwert e, der *Eulerschen Zahl*, die gegeben ist durch $e = \exp(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Hierzu gehen wir wie folgt vor:

(a) Beweisen Sie für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$ die Abschätzung

$$\frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \leq \frac{1}{k!}$$

und zeigen Sie damit unter Verwendung des binomischen Lehrsatzes, dass

$$a_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(b) Es sei $N \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Zeigen Sie, dass

$$a_n \geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq N \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}.$$

(c) Folgern Sie aus (a) und (b), dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen e konvergiert, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

bitte wenden

Aufgabe 3 (3 + 5 + 2 Punkte): Gegeben seien die folgenden drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \mathbf{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Sind $\mathbf{v}^{(1)}$ und $\mathbf{v}^{(2)}$ linear unabhängig? Kann der Vektor $\mathbf{e}^{(3)}$ der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\mathbf{v}^{(1)}$ und $\mathbf{v}^{(2)}$ geschrieben werden?

(b) Sind $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$ und $\mathbf{v}^{(3)}$ linear unabhängig? Kann der Vektor $\mathbf{e}^{(3)}$ der kanonischen Basis des $\mathbb{R}^3$ als Linearkombination von $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$ und $\mathbf{v}^{(3)}$ geschrieben werden? Falls ja, berechnen Sie die eindeutig bestimmten Koeffizienten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\mathbf{e}^{(3)} = \lambda_1 \mathbf{v}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{v}^{(2)} + \lambda_3 \mathbf{v}^{(3)}.$$

(c) Bildet $(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{e}^{(3)})$ eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 4 (3 + 4 + 3 Punkte):

(a) Zeigen Sie, dass durch

$$\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |x_j| \qquad \text{und} \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty := \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \qquad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert werden.

(b) In der Vorlesung haben wir bereits die Norm $\|\cdot\|_2$ kennengelernt, die durch

$$\|\mathbf{x}\|_2 := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \right)^{1/2} \qquad \text{für } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

definiert ist. Finden Sie Konstanten c_1, $c_2 \in \mathbb{R}$, sodass

$$c_1 \|\mathbf{x}\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_1 \leq c_2 \|\mathbf{x}\|_2 \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis: Sie dürfen *ohne Beweis* verwenden, dass $\left|\sum_{j=1}^n x_j y_j\right| \leq \left(\sum_{j=1}^n |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^n |y_j|^2\right)^{1/2}$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt. Dies ist die sogenannte *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* auf $\mathbb{R}^n$.

(c) Skizzieren Sie für die Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^2$ jeweils die Menge aller Punkte mit der Norm 1.

Zusatzaufgabe (5 + 5 Punkte):

(a) Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$|x + 2| + |x - 2| > x^2 + 1.$$

(b) Gegeben sei die Wertetabelle

j	0	1	2
x_j	-2	1	2
y_j	-2	1	-6

und es sei $p_2(x)$ das Interpolationspolynom zu den Stützstellen x_j mit den Werten y_j, $0 \leq j \leq 2$. Berechnen Sie $p_2(x)$ mittels der *Lagrangeschen Darstellung*.