Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Blatt 10
Abgabe: Montag, 1. 2. 2021, 14:00 Uhr
per E-Mail oder Teams-Nachricht an Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor

---

Dies ist das letzte bewertete Übungsblatt. Denken Sie bitte an die Anmeldung zur Klausur.

Notation:

(a) Es sei V ein Vektorraum über dem Grundkörper $\mathbb{K}$. Sind n beliebige Vektoren $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)} \in V$ gegeben, so definieren wir ihre *lineare Hülle* durch

$$\mathrm{Spann}(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}) := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{v}^{(j)} \;\middle|\; \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \right\}.$$

Man kann zeigen (siehe Aufgabe 2 (a) auf Präsenzblatt 9 B), dass $\mathrm{Spann}(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)})$ einen Unterraum von V darstellt. Man nennt $\mathrm{Spann}(\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)})$ deshalb auch den *von* $\mathbf{v}^{(1)}, \dots, \mathbf{v}^{(n)}$ *aufgespannten Unterraum von* V.

(b) Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Ist M eine beliebige Teilmenge von V, so definieren wir $M^{\perp} := \{\mathbf{v} \in V \mid \forall \mathbf{w} \in M : \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0\}$. Wir nennen $M^{\perp}$ das *orthogonale Komplement von* M. Man kann zeigen, dass $M^{\perp}$ immer einen Unterraum von V darstellt.

Aufgabe 1 (6 + 6 Punkte): Im $\mathbb{R}^4$ betrachten wir die Vektoren

$$\mathbf{v}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{v}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{v}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Wir setzen

$$U := \mathrm{Spann}\left(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}\right) \qquad \text{und} \qquad V := \mathrm{Spann}\left(\mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{v}^{(4)}\right).$$

Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $U \cap V$.

Hinweis: Für jedes $\mathbf{x} \in U \cap V$ gibt es $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{v}^{(1)} + \lambda_2 \mathbf{v}^{(2)} = \lambda_3 \mathbf{v}^{(3)} + \lambda_4 \mathbf{v}^{(4)}$.

(b) Wir betrachten nun den Unterraum

$$W := \mathrm{Spann}\left(\mathbf{v}^{(1)}, \mathbf{v}^{(2)}, \mathbf{v}^{(3)}, \mathbf{v}^{(4)}\right).$$

Bestimmen Sie $\dim W$ und geben Sie eine Orthonormalbasis von W an.

bitte wenden

Aufgabe 2 (5 + 3 + 2 Punkte):

(a) Betrachten Sie den Unterraum $V := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$ des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie $\dim V$ und geben Sie eine Orthonormalbasis von V an.

(b) Ergänzen Sie die in (a) bestimmte Orthonormalbasis von V zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$.

(c) Stellen Sie den kanonischen Einheitsvektor $\mathbf{e}^{(1)}$ als Linearkombination der in (b) bestimmten Basisvektoren dar.

Aufgabe 3 (5 + 3 Punkte): Es sei

$$M = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \mathbf{x} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, -1 \leq \lambda \leq 1 \right\}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $M^\perp$.

(b) Bestimmen Sie $(M^\perp)^\perp$ und $\big((M^\perp)^\perp\big)^\perp$.

Aufgabe 4 (10 Punkte): Für zwei Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir das *Vektorprodukt*

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie (durch direktes Nachrechnen mittels der Definitionen von Vektor- und Skalarprodukt) für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$ den *Entwicklungssatz*

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{z} \rangle \mathbf{y} - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{z}.$$

Zusatzaufgabe (4 × 5 Punkte):

(a) Es seien A, B, C Mengen. Verdeutlichen Sie die folgende Beziehung zunächst anhand eines Venn-Diagrammes und geben Sie anschließend einen formalen Beweis:

$$(A \cup B) \cap (C \setminus B) \subseteq (A \cup C).$$

Belegen Sie mit einem Beispiel, dass im Allgemeinen keine Gleichheit gelten kann.

(b) Zusammen mit zwei Bekannten nehmen Sie an einem Wettbewerb mit insgesamt sieben Personen teil. Wie viele Möglichkeiten gibt es,

(i) dass Sie Dritter werden und besser als Ihre beiden Bekannten abschneiden;

(ii) dass Sie als Vierter abschneiden, einer Ihrer Bekannten besser ist als Sie und der andere den letzten Platz belegt?

(c) Es seien A, B, C Aussagen. Für welche Kombinationen von $w(A)$, $w(B)$, $w(C)$ sind die Aussagen $A \Rightarrow \neg B$, $\neg B \Rightarrow A$ und $B \Leftrightarrow C$ alle richtig?

(d) Es sei $(G, \circ)$ eine endliche Gruppe mit neutralem Element $e \in G$. Zeigen Sie, dass es für alle $g \in G$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $g^n = e$, wobei $g^n := \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ Faktoren}}$.