Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Tobias Mai

Übungen zur Vorlesung *Höhere Mathematik für Ingenieure I*
Wintersemester 2020/21

Zusatzblatt
Abgabe (**freiwillig!**): Montag, 4. 1. 2021, 14:00 Uhr
per E-Mail oder Teams-Nachricht an Ihre Tutorin bzw. Ihren Tutor

---

*Die Bearbeitung der Aufgaben auf diesem Zusatzblatt ist **freiwillig**. Hierdurch können Sie insgesamt **50 Zusatzpunkte** erwerben, mit denen Sie nicht nur Ihr Gesamtpunktekonto aufbessern, sondern zugleich auch frühere und künftige Übungsblätter ausgleichen können, auf denen Sie weniger als 25 % der jeweils möglichen Punkte erreicht haben bzw. erreichen werden.*

Zusatzaufgabe 1 (3 × 5 Punkte): Beweisen Sie die folgenden Aussagen jeweils durch vollständige Induktion:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.

(b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Zahl $9^{2n-1} + 1$ durch 10 teilbar.

(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(2n)! \geq (n!)^2$.

Zusatzaufgabe 2 (5 Punkte): Bestimmen Sie die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für die gilt

$$(x-2)^2 - 1 < 9 - (x-4)^2.$$

Zusatzaufgabe 3 (5 + 5 Punkte): Ein Passwort soll mit vier verschiedenen Großbuchstaben von A bis Z (d. h. ohne Umlaute) beginnen, gefolgt von drei bis fünf Ziffern zwischen 0 und 9.

(a) Wie viele solcher Passwörter gibt es insgesamt?

(b) Wie viele Passwörter davon enthalten die Zeichenfolge „A1“?

bitte wenden

Zusatzaufgabe 4 (3 + 4 + 3 Punkte): Gegeben seien $m, n \in \mathbb{N}$.

(a) Wie viele Funktionen $f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ gibt es?

(b) Wie viele injektive Funktionen $f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ gibt es für $m \leq n$? Welches Ergebnis erhalten Sie im Fall $m = n$?

(c) Die Frage nach surjektiven Funktionen ist ungleich komplizierter. Man kann zeigen (was Sie nicht tun müssen!), dass für $m \geq n$ die Anzahl aller surjektiven Funktionen $f : \{1, \dots, m\} \to \{1, \dots, n\}$ gegeben ist durch den Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m.$$

Bestätigen Sie dieses Ergebnis für $m = 3$ und $n = 2$.

Zusatzaufgabe 5 (2 + 2 + 6 Punkte): Gegeben sei die Funktion

$$f : \ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 4 - x^2.$$

(a) Begründen Sie, warum $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ weder injektiv noch surjektiv ist.

(b) Finden Sie ein möglichst großes Intervall I in $\mathbb{R}$, für das die Einschränkung von f auf I injektiv ist.

(c) Begründen Sie, warum die Funktion $f : I \to f(I)$ für das Intervall I aus (b) bijektiv ist, und bestimmen Sie das Bild $f(I)$ sowie einen expliziten Ausdruck für die Umkehrfunktion $f^{-1} : f(I) \to I$.