Universität des Saarlandes
Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik
Prof. Dr. Roland Speicher
Dr. Johannes Hoffmann

Übungen zur Vorlesung HMI 4b (Funktionentheorie)
Sommersemester 2022
Blatt 5
Abgabe: Freitag, 17.06.2022, 22:00 Uhr über Moodle

Bemerkung. Es gelten die folgenden Reihendarstellungen mit Konvergenzradius ∞:

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad \text{und} \quad \sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Satz (A)**.** Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(i) $\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w)$. (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)

(ii) $\exp(z) \neq 0$. (Exponentialfunktion hat keine Nullstellen)

(iii) $\cos(-z) = \cos(z)$. (Kosinus ist eine gerade Funktion)

(iv) $\sin(-z) = -\sin(z)$. (Sinus ist eine ungerade Funktion)

(v) $\exp(\mathrm{i}z) = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z)$. (Verallgemeinerte Eulersche Formel)
Daraus folgt insbesondere

$$\cos(z) = \frac{1}{2}(\exp(\mathrm{i}z) + \exp(-\mathrm{i}z)) \quad \text{und} \quad \sin(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\exp(\mathrm{i}z) - \exp(-\mathrm{i}z)).$$

(vi) $\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$. (Additionstheorem für Kosinus)

(vii) $\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$. (Additionstheorem für Sinus)

(viii) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$. (Komplexer trigonometrischer Pythagoras)

(ix) $\cos(z) = \cos(x)\cosh(y) - \mathrm{i}\sin(x)\sinh(y)$ wobei $x := \mathrm{Re}(z)$ und $y := \mathrm{Im}(z)$.

(x) $\sin(z) = \sin(x)\cosh(y) + \mathrm{i}\cos(x)\sinh(y)$ wobei $x := \mathrm{Re}(z)$ und $y := \mathrm{Im}(z)$.

(xi) $\cos'(z) = -\sin(z)$.

(xii) $\sin'(z) = \cos(z)$.

bitte wenden

Aufgabe 1 ($(2+1+2+3+1)+3$ Punkte)**.**

(a) Beweisen Sie (i), (ii), (v), (x) und (xii) von Satz (A).

(b) Bestimmen Sie alle Nullstellen von sin und cos in $\mathbb{C}$.

Definition. Analog zum Reellen definieren wir die komplexen hyperbolischen Funktionen $\sinh, \cosh : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mittels

$$\sinh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) - \exp(-z)) \quad \text{und} \quad \cosh(z) := \frac{1}{2}(\exp(z) + \exp(-z)).$$

Satz (B)**.** Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(i) $\cos(\mathrm{i}z) = \cosh(z)$.

(ii) $\sin(\mathrm{i}z) = \mathrm{i}\sinh(z)$.

(iii) $\cosh(-z) = \cosh(z)$.

(iv) $\sinh(-z) = -\sinh(z)$.

(v) $\exp(z) = \cosh(z) + \sinh(z)$.

(vi) $\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$.

(vii) $\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$.

(viii) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

Sei nun $x := \mathrm{Re}(z)$ und $y := \mathrm{Im}(z)$, dann gilt

(ix) $\cosh(z) = \cosh(x)\cos(y) + \mathrm{i}\sinh(x)\sin(y)$.

(x) $\sinh(z) = \sinh(x)\cos(y) + \mathrm{i}\cosh(x)\sin(y)$.

(xi) $|\cos(z)|^2 = \cos^2(x) + \sinh^2(y)$.

(xii) $|\sin(z)|^2 = \sin^2(x) + \sinh^2(y)$.

Aufgabe 2 ($(3+2)+3$ Punkte)**.**

(a) Beweisen Sie (vi) und (xi) von Satz (B).

(b) Bestimmen Sie jeweils für sinh und cosh die Taylor-Reihe um $z_0 = 0$, deren Konvergenzradius und die erste Ableitung mit Satz 7.2.

bitte wenden

Aufgabe 3 (3 + 4 Punkte).

(a) Sei $R \in (0, \infty)$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und $f : B_R(z_0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiterhin seien $r \in (0, R)$ und ein $M \in (0, \infty)$ so, dass $|f(z)| \leq M$ für alle $z \in \kappa_r(z_0)$ gilt. Zeigen Sie, dass

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{Mn!}{r^n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) Seien $K \in (0, \infty)$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit

$$|f(z)| \leq K|z|^k \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass f eine Polynomfunktion mit Grad höchstens k ist.

Hinweis: Betrachten Sie die Koeffizienten der Taylor-Reihe von f um $z_0 = 0$.

Aufgabe 4 (3 Punkte). Sei $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ holomorph und $g : B_1(0) \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z^2)$. Zeigen Sie, dass $g^{(2n+1)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 5 (2 + 2 + 3 + 1 + 2 Punkte). Bestimmen Sie die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen f um den angegebenen Entwicklungspunkt z_0 und bestimmen Sie die Konvergenzradien:

(a) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \exp(az + b)$ um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $a, b \in \mathbb{C}$.

(b) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z \sinh(z^2)$ um $z_0 = 0$.

(c) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \cos^2(z)$ um $z_0 = \pi$.

(d) $f : \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{1+2z}$ um $z_0 = 0$.

(e) $f : \mathbb{C} \setminus \{3\} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \frac{1}{3-z}$ um $z_0 = 4\mathrm{i}$.