



UNIVERSITÄT
DES
SAARLANDES

UNSCHÄRFE IN DER FOURIER-ANALYSIS

Bachelorarbeit

vorgelegt von

Jenny Stephanie Klee

Betreuer :
Prof. Dr. Moritz Weber,
M.Sc. Nina Kiefer

Erstkorrektor :
Prof. Dr. Moritz Weber

Zweitkorrektor :
Prof. Dr. Michael Hartz

28. September 2025

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre hiermit eidesstattlich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und alle fremden Quellen und Gedanken als solche kenntlich gemacht habe. Die Arbeit wurde bisher keiner Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht. Ich bin mir bewusst, dass eine unwahre Erklärung rechtliche Folgen haben kann.

Saarbrücken, _____

Danksagung

Zunächst möchte ich mich bei Prof. Moritz Weber und Nina Kiefer für ihre Betreuung meiner Bachelorarbeit bedanken. Mein Dank gilt darüber hinaus Prof. Michael Hartz, der es mit seinen Vorlesungen geschafft hat, mich letztendlich doch noch von der reinen Mathematik zu überzeugen.

„Der gerade Weg ist oft der schnellste, aber nicht unbedingt der interessanteste.“

Mein Weg zu dieser Arbeit war wahrlich alles andere als gerade, aber hinter jeder Kurve warteten neben neuen Herausforderungen auch neue Chancen und Möglichkeiten, die ich auf direktem Wege niemals hätte ergreifen können. Dementsprechend umfangreich ist die Liste an Menschen, die mich auf diesem Weg begleitet haben und denen ich an dieser Stelle danken möchte.

Ich danke Katrin, Andreas und Florian, die meinen ersten Studienabschnitt (damals, als sich Studieren noch wie Studieren anfühlte) zu einer unvergesslichen Zeit gemacht haben, die ich für nichts auf der Welt missen möchte. Hinter der ersten Kurve warteten Clemens, Dimitri und Rebecca, denen ich meine erste Tutorenstelle und somit den Beginn eines neuen Lebensabschnitts verdanke, der maßgeblich zu meiner persönlichen Entwicklung beitrug. Mein Dank gilt deshalb auch all meinen ehemaligen Studenten, die mir über sechs Jahre hinweg so viel mehr gegeben und bedeutet haben als nur einen Job – aus manchen wurden sogar Freunde.

Ich danke Mara, ohne die ich das Studium während der Pandemie definitiv nicht überlebt hätte, Lisa für ihre unerbittlich beharrliche, nervtötend lebenswerte Art, Nik und Enes für unsere jahrelange wöchentliche Therapie, Nathalie und Luc danke ich dafür, dass sie mich an meinem ersten Tag im Bachelorstudium zu sich in die erste Reihe riefen und Alex Y. danke ich für Gespräche, die man mit jüngeren Kommilitonen einfach nicht führen kann. Außerdem danke ich Kevin für über 15 Jahre Freundschaft und dafür, dass ich bei ihm jederzeit der universitären Bubble entfliehen kann.

Ich danke Nina, Selina, Simon und meiner Patentante Michaela dafür, dass sie mir in richtungsweisenden Schlüsselmomenten kurz vor meinem Wechsel zum Bachelorstudium und in dessen finaler Phase unterstützend zur Seite standen.

Mein Dank gilt außerdem Prof. Michael Bildhauer, Prof. Bernhard Burgeth, Prof. Gabriela Weitze-Schmithüsen und Nils Gutheil für ihr Vertrauen und die Möglichkeit, trotz der Einschränkungen des Wissenschaftszeitvertragsgesetzes weitere zwei Jahre an der UdS arbeiten zu dürfen. Dadurch war es mir möglich, die schmerzhafteste Suche nach einem neuen Arbeitgeber auf die Zeit nach meinem Bachelorabschluss zu verschieben.

Zu guter Letzt danke ich meiner Familie – insbesondere meiner Mutter Kerstin und meinem Stiefvater Frank – dafür, dass sie mir die Aufnahme eines Studiums ermöglicht und nie aufgehört haben daran zu glauben, dass aus diesem irgendwann tatsächlich einmal ein Abschluss resultieren würde.

Wenn wir mal ganz ehrlich sind, gebührt mein größter Dank den besorgniserregend vielen Kaffeepausen am „Raimer“ – und all jenen, die mir bei dieser Gesellschaft geleistet haben.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Vorbereitungen	3
1.1 Die $L^p(\mathbb{R})$ -Räume	3
1.2 Der Schwartz-Raum $S(\mathbb{R})$	5
2 Fourier-Analysis	15
2.1 Die Fourier-Transformation auf $S(\mathbb{R})$	15
2.2 Eigenschaften der Fourier-Transformation	19
2.3 Die inverse Fourier-Transformation auf $S(\mathbb{R})$	31
3 Unschärfe in der Fourier-Analysis	35
3.1 Simultane Kompaktheit der Träger von f und $\hat{f}$	36
3.2 Punktuelle Konzentration von f und $\hat{f}$	36
4 Unschärfe in der Physik	43
4.1 Von der Fourier-Analysis zu Heisenberg	43
4.2 Unschärfe und Nichtkommutativität: Der Zugang über Operatoren	46
5 Ausblick	51
5.1 Weitere Unschärfeprinzipien	51
5.1.1 Unschärfe in der Größe der Träger	52
5.1.2 Unschärfe im Abklingverhalten im Unendlichen	53
5.2 Der Ansatz von Wigner und Wigner	55
5.3 Aktuelle Forschung	56
Literaturverzeichnis	59
Verzeichnis der Unschärfeprinzipien	65

Einleitung

Die Bekanntgabe des Titels der vorliegenden Arbeit rief Reaktionen hervor wie „Unschärfe kenne ich doch aus der Physik! Da heißt es, dass man Ort und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig genau bestimmen kann.“ Das ist zwar korrekt, aber da es sich bei der vorliegenden Arbeit um keine physikalische Arbeit handelt, stellt sich die Frage, welche Rolle das Konzept der Unschärfe im mathematischen Kontext – insbesondere innerhalb der Fourier-Analysis – spielt.

Im naturwissenschaftlichen Bereich gilt die von W. Heisenberg im Jahre 1927 formulierte Heisenbergsche Unschärferelation [Hei27] als allgemein bekannt und spätestens seit der Fernsehserie *Breaking Bad* ist zumindest der Name Heisenberg wahrscheinlich jedem ein Begriff. Weniger bekannt dürfte sein, dass es sich bei dieser Relation um kein rein physikalisches, auf Ort und Impuls beschränktes Phänomen handelt, sondern dass sie vielmehr einen Spezialfall eines allgemeineren mathematischen Zusammenhangs darstellt. Im Kontext der Fourier-Analysis ist dieser Zusammenhang durch den Tradeoff zwischen Eigenschaften einer Funktion f und Eigenschaften ihrer Fourier-Transformierten $\hat{f}$ gegeben, der erstmals 1932 von N. Wiener beobachtet und 1933 von seinem Lehrer und Mentor G. Hardy schriftlich festgehalten wurde [Har33]. Darauf aufbauend wurden im Laufe des letzten Jahrhunderts zahlreiche, teils sehr unterschiedliche Unschärfeprinzipien formuliert und kontinuierlich weiterentwickelt.

Zwei dieser Prinzipien wollen wir uns in dieser Arbeit im Detail anschauen:

- Ein qualitatives Prinzip, das besagt, dass eine glatte Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und ihre Fourier-Transformierte nur dann beide kompakten Träger besitzen können, wenn die Funktion die konstante Null-Funktion ist (Satz 3.1.1).
- Ein quantitatives Prinzip, das besagt, dass es auf dem Schwartz-Raum für das Produkt $\|xf(x)\|_2 \|\xi \hat{f}(\xi)\|_2$ eine untere Schranke gibt, sodass nicht beide Faktoren gleichzeitig beliebig klein werden können (Satz 3.2.1).

Bis heute ist das Konzept der Unschärfe mathematisch von großer Bedeutung und Gegenstand aktueller Forschung.

Ziel dieser Arbeit ist es, besagte mathematische Bedeutsamkeit herauszustellen und anschließend physikalisch zu interpretieren. Dazu führen wir zunächst in Kapitel 1 mit dem Schwartz-Raum einen Raum ein, auf dem wir in Kapitel 2 die Fourier-Transformation definieren und invertieren wollen. Mit ihrer Hilfe werden wir in Kapitel 3 zwei rein analytische Unschärfeprinzipien formulieren und beweisen. Der physikalischen Interpretation eines dieser Prinzipien widmen wir Kapitel 4, wobei wir einmal wahrscheinlichkeitstheoretisch vorgehen und einmal die Nichtkommutativität der Quantenmechanik ausnutzen werden, die wir dafür durch selbstadjungierte unbeschränkte Operatoren auf Hilberträumen beschreiben wollen, so wie es J. von Neumann 1932 erstmals getan hat [Von18]. Beide Ansätze werden uns zur Heisenbergschen Unschärferelation führen. Abschließend geben wir in Kapitel 5 einen Ausblick über weitere mathematische Unschärfeprinzipien und verweisen auf aktuelle Forschungsergebnisse.

Kapitel 1

Vorbereitungen

Für die vorliegende Arbeit setzen wir die Grundvorlesungen der reellen und komplexen Analysis, sowie Grundlagen der Funktionalanalysis als bekannt voraus. In diesem ersten Kapitel wollen wir mit dem Schwartz-Raum $S(\mathbb{R})$ einen Funktionenraum einführen, der im Allgemeinen nicht im Grundstudium behandelt, der aber in den folgenden Kapiteln eine zentrale Rolle spielen wird. Dazu frischen wir zunächst in einer etwas verkürzten Form mit Hilfe von [Els18] und [Wer09] unser Wissen über die L^p -Räume, sowie über einige in diesem Zusammenhang für uns wichtigen Sätze und Ungleichungen auf, werden jedoch auf deren Beweise verzichten. Alle in dieser Arbeit vorkommenden Integrale sind im Sinne von Lebesgue zu verstehen.

1.1 Die $L^p(\mathbb{R})$ -Räume

Die Funktionenräume der p -fach integrierbaren messbaren Funktionen wurden „zu Ehren von H. Lebesgue¹“ von F. Riesz² als $\mathcal{L}^p$ -Räume bezeichnet [Els18], wobei p hier für das französische Wort *puissance* (dt. Potenz) steht [Wer09].

Definition 1.1.1 (Lebesgue-Raum $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$).

Sei $0 < p < \infty$. Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *p -fach integrierbar*, wenn

$$\|f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty$$

gilt. Der Raum der p -fach integrierbaren messbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ wird *$\mathcal{L}^p$ -Raum* genannt und mit $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$ bezeichnet, d. h.

$$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist messbar und } \|f\|_p < \infty\}.$$

¹ Henri Léon Lebesgue (1875–1941), französischer Mathematiker.

² Frigyes Riesz (1880–1956), ungarischer Mathematiker.

Über den Begriff der Messbarkeit wollen wir uns an dieser Stelle keine weiteren Gedanken machen, sondern nur bemerken, dass Stetigkeit Messbarkeit impliziert, dass also jede stetige Funktion messbar ist.

Die Abbildung $\|\cdot\|_p$ aus der letzten Definition ist lediglich eine Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\mathbb{R})$, induziert aber eine Norm auf dem Quotientenraum $L^p(\mathbb{R})$, der durch

$$L^p(\mathbb{R}) := \mathcal{L}^p(\mathbb{R})/\mathcal{N}$$

definiert wird, wobei $\mathcal{N} := \{f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}) \mid \|f\|_p = 0\}$ der Kern der p -Norm ist. Wie in der Literatur üblich, werden auch wir Elemente dieses Quotientenraums nicht wie Äquivalenzklassen, sondern wie Funktionen behandeln und sie als L^p -Funktionen bezeichnen. Alle L^p -Räume mit $p \geq 1$ sind Banachräume³, also vollständige normierte Vektorräume, aber nur der Raum der *quadratintegrierbaren Funktionen* $L^2(\mathbb{R})$ ist ein Hilbertraum⁴, also ein Banachraum, dessen Norm durch ein Skalarprodukt induziert wird. Dieses Skalarprodukt ist für $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} \, dx, \quad (1.1)$$

wobei die Existenz dieses Integrals aus der Hölder⁵-Ungleichung folgt.

Lemma 1.1.2 (Hölder-Ungleichung).

Sei $p \geq 1$ und sei q der konjugierte Exponent zu p , also $1/p + 1/q = 1$. Seien $f \in L^p(\mathbb{R})$ und $g \in L^q(\mathbb{R})$. Dann ist $fg \in L^1(\mathbb{R})$ und es gilt

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Mit dem nächsten Lemma erinnern wir an die Cauchy⁶-Schwarz⁷-Ungleichung.

Lemma 1.1.3 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung).

Sei V ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und sei $\|\cdot\|$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm. Dann gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \text{ für alle } x, y \in V.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn x und y linear abhängig sind.

³ Stefan Banach (1892–1945), polnischer Mathematiker.

⁴ David Hilbert (1862–1943), deutscher Mathematiker.

⁵ Otto Ludwig Hölder (1859–1937), deutscher Mathematiker.

⁶ Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), französischer Mathematiker.

⁷ Karl Hermann Amandus Schwarz (1843–1921), deutscher Mathematiker.

Das Skalarprodukt aus (1.1) und die durch dieses Skalarprodukt induzierte Norm $\|\cdot\|_2$ ermöglichen es, die Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus Lemma 1.1.3 auf dem Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$ zu formulieren. In der Literatur wird auch diese L^2 -Version der Ungleichung als *Cauchy-Schwarz-Ungleichung* (seltener auch als *Schwarz-Ungleichung*) bezeichnet, obwohl sie nach [Haz95] auf V. Bunyakovskiĭ⁸ zurückgeht, der sie bereits im Jahre 1859 veröffentlichte. K. Schwarz hingegen veröffentlichte sie erst 1884 und zwar „ohne Bezugnahme auf die Arbeit von Bunyakovskiĭ“ [Haz95]. Um dies zu würdigen, werden wir im Folgenden auf $L^2(\mathbb{R})$ von der *Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwarz-Ungleichung* sprechen.

Korollar 1.1.4 (Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwarz-Ungleichung).

Für $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ gilt

$$\left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx \right| = |\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \|g\|_2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn f und g linear abhängig sind.

Abschließen wollen wir diesen Abschnitt mit einem wichtigen Satz aus der Maß- und Integrationstheorie, der es unter gewissen Bedingungen erlaubt, Grenzwertbildung und Integration zu vertauschen.

Proposition 1.1.5 (Satz von der majorisierten Konvergenz⁹).

Sei $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Folge messbarer Funktionen. Konvergiert $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf $\mathbb{R}$ punktweise gegen eine Funktion f und existiert für die Folge eine integrierbare Majorante, also eine L^1 -Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $|f_n(x)| \leq g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$, so dürfen Grenzwertbildung und Integration vertauscht werden, d. h. dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n dx.$$

1.2 Der Schwartz-Raum $S(\mathbb{R})$

In Kapitel 2 werden wir uns mit einer für diese Arbeit zentralen Abbildung, der sogenannten *Fourier-Transformation* beschäftigen, die viele Autoren auf $L^1(\mathbb{R})$, also auf dem Raum der (einfach) integrierbaren Funktionen definieren. Es wird sich herausstellen, dass das Bild einer L^1 -Funktion unter dieser Abbildung nicht zwangsläufig wieder eine L^1 -Funktion ist, wodurch das Studium der

⁸ Viktor Yakovlevich Bunyakovskiĭ (1804–1889), russischer Mathematiker.

⁹ Auch *Satz von der dominierten Konvergenz* oder *Lebesguescher Konvergenzsatz*. [Wer09]

inversen Fourier-Transformation an Einschränkungen geknüpft sein würde. Deshalb interessieren wir uns für einen Unterraum des $L^1(\mathbb{R})$, der durch die Fourier-Transformation bijektiv auf sich selbst abgebildet wird.

In diesem Abschnitt wollen wir den Schwartz-Raum $S(\mathbb{R})$ definieren und uns davon überzeugen, dass es sich bei diesem um einen Unterraum des $L^1(\mathbb{R})$ handelt, um anschließend in Kapitel 2 sinnvoll auf ihm arbeiten zu können.

Dazu führen wir zunächst eine Eigenschaft ein, die alle Funktionen dieses Raums aufweisen und orientieren uns dabei an [Wer18]. Anders als dort beschrieben, beschränken wir uns jedoch auf den eindimensionalen reellen Fall, statt Funktionen zu betrachten, die auf dem $\mathbb{R}^n$ operieren.

Definition 1.2.1 (Schnell fallende Funktionen).

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *schnell fallend*, wenn

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha f(x) = 0$$

für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Eine nützliche Charakterisierung schnell fallender Funktionen liefert das folgende Lemma, dessen Aussage in [Wer18] für den mehrdimensionalen Fall unbewiesen zu finden ist. Es besagt, dass schnell fallende Funktionen genau die Funktionen sind, die „im Unendlichen schneller als das Reziproke jeden Polynoms“ verschwinden.

Lemma 1.2.2 (Charakterisierung schnell fallender Funktionen).

Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- i) Die Funktion f ist schnell fallend;
- ii) Für alle Polynome $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ gilt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x)f(x) = 0.$$

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii): Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ schnell fallend und sei $P(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$ ein Polynom von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$. Da f schnell fallend ist, gilt $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^k f(x) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, woraus

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x)f(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k f(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^k f(x) = 0$$

folgt.

ii) $\Rightarrow$ i): Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}_0$ ist x^α ein Polynom auf $\mathbb{R}$, sodass die Behauptung direkt aus Teil ii) folgt. $\square$

Nun können wir den nach L. Schwartz¹⁰ benannten Schwartz-Raum definieren, wobei wir mit $C^\infty(\mathbb{R}) := \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ ist glatt}\}$ den aus der Analysis bekannten Raum der auf $\mathbb{R}$ glatten, also unendlich oft differenzierbaren Funktionen bezeichnen. Dabei sei angemerkt, dass L. Schwartz in keiner Verbindung mit K. Schwarz, dem Namensgeber der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, steht. Wieder beschränkt sich die folgende Definition auf den eindimensionalen Fall aus [Wer18].

Definition 1.2.3 (Schwartz-Raum $S(\mathbb{R})$).

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *Schwartz-Funktion*, wenn f eine auf $\mathbb{R}$ glatte Funktion mit schnell fallenden Ableitungen ist. Der Raum der Schwartz-Funktionen wird *Schwartz-Raum* genannt und mit $S(\mathbb{R})$ bezeichnet, d. h.

$$S(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f^{(n)} \text{ ist schnell fallend für alle } n \in \mathbb{N}_0\}.$$

Mit der Charakterisierung aus Lemma 1.2.2 folgt, dass der Schwartz-Raum $S(\mathbb{R})$ der Raum aller auf $\mathbb{R}$ glatten, komplexwertigen Funktionen ist, die zusammen mit ihren Ableitungen im Unendlichen schneller als das Reziproke jeden Polynoms verschwinden.

Diese Interpretation des Schwartz-Raums führt uns zu zwei Klassen von Funktionen, die von vielen Autoren (vgl. z. B. [SS03b]) als Beispiele für Schwartz-Funktionen angeführt werden. Auch werden sie in dem für diese Arbeit zentralen Kapitel 3 eine wichtige Rolle spielen. Für eines der Beispiele benötigen wir den Begriff des *Trägers* $\text{supp}(f)$ einer Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, der definiert ist als

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\}}.$$

Beispiel 1.2.4.

- i) Glatte Funktionen mit kompaktem Träger sind Schwartz-Funktionen. Für

$$C_c^\infty(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid \text{supp}(f) \text{ ist kompakt}\}$$

gilt also $C_c^\infty(\mathbb{R}) \subset S(\mathbb{R})$.

Der kompakte Träger einer Funktion $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ garantiert, dass es ein $R \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$ gilt, woraus direkt $f^{(n)}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > R$ und alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt. Die Funktion und alle ihre Ableitungen sind also im Unendlichen identisch Null und somit schnell fallend. Außerdem ist f per Definition von $C_c^\infty(\mathbb{R})$ glatt.

- ii) Gauß¹¹-Funktionen, also Funktionen der Form $\exp(-ax^2)$ mit $a > 0$, sind Schwartz-Funktionen. Um dies einzusehen, kann man sich überlegen, dass

¹⁰ Laurent Schwartz (1915–2002), französischer Mathematiker.

¹¹ Johann Carl Friedrich Gauß (1777–1855), deutscher Mathematiker, Astronom und Physiker.

alle Ableitungen einer Funktion $\exp(-ax^2)$ von der Form $P(x)\exp(-ax^2)$ sind, wobei P ein Polynom ist. Daraus folgt für $a > 0$ direkt das für eine Schwartz-Funktion geforderte Verhalten im Unendlichen. Außerdem sind Gauß-Funktionen als Verkettung glatter Funktionen glatt.

Da wir nun ein Gefühl für das Verhalten von Schwartz-Funktionen entwickelt haben, wollen wir die Struktur des Schwartz-Raums besser verstehen und beginnen mit folgendem Lemma.

Lemma 1.2.5.

Der Schwartz-Raum $S(\mathbb{R})$ ist ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum.

Beweis.

Per Definition des Schwartz-Raums gilt $S(\mathbb{R}) \subset C^\infty(\mathbb{R})$. Wir zeigen, dass $S(\mathbb{R})$ ein Unterraum des $\mathbb{C}$ -Vektorraums $C^\infty(\mathbb{R})$ ist. Für $f, g \in S(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha (f + g)^{(n)}(x) &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha (f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha f^{(n)}(x) + \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha g^{(n)}(x) = 0 \end{aligned}$$

für alle $\alpha, n \in \mathbb{N}_0$, also $f + g \in S(\mathbb{R})$ und

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha (\lambda f)^{(n)}(x) = \lambda \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha f^{(n)}(x) = 0$$

für alle $\alpha, n \in \mathbb{N}_0$, also $\lambda f \in S(\mathbb{R})$. Somit ist der Schwartz-Raum $S(\mathbb{R})$ als Unterraum des $\mathbb{C}$ -Vektorraums $C^\infty(\mathbb{R})$ selbst ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum. $\square$

Das nächste Lemma, sowie die Beweisidee zu Teil ii) stammen aus [Str94]. Das Lemma zeigt, dass der Schwartz-Raum abgeschlossen unter Differentiation, Multiplikation mit Schwartz-Funktionen und Multiplikation mit Polynomen ist.

Lemma 1.2.6.

Seien $f, g \in S(\mathbb{R})$ Schwartz-Funktionen, $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Polynom und $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten

- i) $f^{(n)} \in S(\mathbb{R})$,
- ii) $fg \in S(\mathbb{R})$,
- iii) $Pf \in S(\mathbb{R})$.

Beweis.

Da f und g als Schwartz-Funktionen und P als Polynom glatte Funktionen sind, sind $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ als Ableitung, sowie fg und Pf als Produkte glatter Funktionen ebenfalls glatt. Also gilt $f^{(n)}, fg, Pf \in C^\infty(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Es bleibt zu zeigen, dass die jeweiligen Funktionen zusammen mit ihren Ableitungen schnell fallend sind.

i) Da f eine Schwartz-Funktion ist, sind alle Ableitungen von f schnell fallend. Somit sind auch alle Ableitungen jeder Ableitung von f schnell fallend, sodass zusammen mit der Vorbemerkung $f^{(n)} \in S(\mathbb{R})$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgt.

ii) Nach der Leibniz¹²-Regel gilt

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{N}_0$ und $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha (fg)^{(n)}(x) &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^{\alpha_1} f^{(k)}(x) x^{\alpha_2} g^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^{\alpha_1} f^{(k)}(x) \right) \left(\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^{\alpha_2} g^{(n-k)}(x) \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass nach Teil i) für Schwartz-Funktionen f und g die Ableitungen $f^{(k)}$ und $g^{(n-k)}$ für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ ebenfalls Schwartz-Funktionen, also insbesondere schnell fallend sind. Somit ist $(fg)^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ schnell fallend, sodass zusammen mit der Vorbemerkung $fg \in S(\mathbb{R})$ folgt.

iii) Da $S(\mathbb{R})$ ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist, genügt es zu zeigen, dass $x^m f \in S(\mathbb{R})$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt. Der Übergang zu $Pf \in S(\mathbb{R})$ folgt dann, via $P(x) = \sum_{k=0}^n \lambda_k x^k$ mit $\lambda_k \in \mathbb{C}$, aus der Abgeschlossenheit von $S(\mathbb{R})$ bzgl. Addition und skalarer Multiplikation. Nach der Leibniz-Regel gilt

$$(x^m f)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^m)^{(k)} f^{(n-k)}$$

¹² Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), deutscher Mathematiker, Philosoph und Jurist.

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Außerdem gilt

$$(x^m)^{(k)} = \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k}$$

für alle $m, k \in \mathbb{N}_0$ mit $m \geq k$ und $(x^m)^{(k)} = 0$ für $m < k$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha (x^m f)^{(n)}(x) &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (x^m)^{(k)} f^{(n-k)} \\ &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{m!}{(m-k)!} x^{m-k} f^{(n-k)} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{m!}{(m-k)!} \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^{\alpha+m-k} f^{(n-k)} \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt analog zum Beweis von Teil ii) verwendet wurde, dass nach Teil i) die Ableitungen $f^{(n-k)}$ der Schwartz-Funktion f für $n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ ebenfalls Schwartz-Funktionen, also insbesondere schnell fallend sind und dass $\alpha + m - k \in \mathbb{N}_0$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0$ aus $m \geq k$ folgt. Somit ist $(x^m f)^{(n)}$ schnell fallend für alle $m, n \in \mathbb{N}_0$, sodass zusammen mit der Vorbemerkung $Pf \in S(\mathbb{R})$ für jedes Polynom $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ folgt. $\square$

Da wir im Laufe der Arbeit drei konkreten Fällen des letzten Lemmas begegnen werden, wollen wir diese in einem Korollar festhalten.

Korollar 1.2.7.

Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Dann gelten

- i) $f' \in S(\mathbb{R})$,
- ii) $f^2 \in S(\mathbb{R})$,
- iii) $xf \in S(\mathbb{R})$.

Beweis.

Folgt direkt aus Lemma 1.2.6, durch Wahl von $n = 1$ für Teil i), $g = f$ für Teil ii) und $P(x) = x$ für Teil iii). $\square$

Darüber hinaus wird in [Str94] ohne Beweis angeführt, dass der Schwartz-Raum abgeschlossen unter Multiplikation mit komplexen Exponentialfunktionen ist.

Lemma 1.2.8.

Für $f \in S(\mathbb{R})$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(x) = e^{itx}$ gilt $fg \in S(\mathbb{R})$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Seien $f \in S(\mathbb{R})$ und $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(x) = e^{itx}$ mit $t \in \mathbb{R}$. Dann ist fg als Produkt glatter Funktionen selbst eine glatte Funktion. Es bleibt zu zeigen, dass $(fg)^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ schnell fallend ist. Nach der Leibniz-Regel gilt

$$(e^{itx} f(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{itx})^{(k)} f^{(n-k)}(x) \quad (1.2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Außerdem gilt

$$0 \leq |x^\alpha e^{itx} f^{(n-k)}(x)| = |e^{itx}| |x^\alpha f^{(n-k)}(x)| = |x^\alpha f^{(n-k)}(x)| \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} 0$$

für alle $\alpha, n, k \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq k$ und $t \in \mathbb{R}$, also

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha e^{itx} f^{(n-k)}(x) = 0, \quad (1.3)$$

wobei $|e^{itx}| = 1$ für alle $x, t \in \mathbb{R}$ und im Grenzübergang $f \in S(\mathbb{R})$ ausgenutzt wurde. Einsetzen von $(e^{itx})^{(k)} = (it)^k e^{itx}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ in (1.2) liefert unter Verwendung von (1.3) schließlich

$$\begin{aligned} \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha (e^{itx} f(x))^{(n)} &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{itx})^{(k)} f^{(n-k)}(x) \\ &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (it)^k e^{itx} f^{(n-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (it)^k \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\alpha e^{itx} f^{(n-k)}(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

woraus zusammen mit der Vorüberlegung die Behauptung folgt. $\square$

Das nächste Lemma wird sich in späteren Beweisen für bestimmte partielle Integrationen als nützlich erweisen.

Lemma 1.2.9.

Für $f \in S(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$ gelten

- i) $[e^{itx} f(x)]_{-\infty}^{\infty} = 0$,
- ii) $[x|f(x)|^2]_{-\infty}^{\infty} = 0$.

Beweis.

Seien $f \in S(\mathbb{R})$ und $t \in \mathbb{R}$.

i) Aus Lemma 1.2.8 folgt

$$\left[e^{itx} f(x) \right]_{-\infty}^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{itx} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{itx} f(x) = 0 - 0 = 0$$

und somit die Behauptung.

ii) Da $f \in S(\mathbb{R})$, ist nach Korollar 1.2.7 auch $f^2 \in S(\mathbb{R})$, sodass per Definition $\lim_{|x| \rightarrow \infty} x f^2(x) = 0$ und damit auch $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x f^2(x)| = 0$ gilt. Daraus folgt

$$0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x f^2(x)| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| |f^2(x)| = \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| |f(x)|^2$$

und somit die Existenz der Limiten

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x |f(x)|^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x |f(x)|^2 = 0.$$

Mit diesen ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} \left[x |f(x)|^2 \right]_{-\infty}^{\infty} &= \lim_{x \rightarrow \infty} x |f(x)|^2 - \lim_{x \rightarrow -\infty} x |f(x)|^2 \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x |f(x)|^2 + \lim_{x \rightarrow -\infty} -x |f(x)|^2 = 0 + 0 = 0. \quad \square \end{aligned}$$

Wir erinnern uns an die Motivation dieses Abschnitts – einen Unterraum des $L^1(\mathbb{R})$ zu finden, der durch die Fourier-Transformation aus Kapitel 2 bijektiv auf sich selbst abgebildet werden wird. Wir sind nun so weit den ersten Teil dieser Forderung an $S(\mathbb{R})$ zu verifizieren und beginnen mit einem Lemma. Die Idee der zentralen Abschätzung (1.4) des Beweises des folgenden Lemmas stammt aus [Wer18], wobei dort direkt die Teilmengenbeziehung $S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ für $p \geq 1$ gezeigt wird. Wir hingegen werden in zwei Schritten vorgehen und (wie gewohnt auf eine Dimension beschränkt) zuerst zeigen, dass $S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$ gilt.

Lemma 1.2.10.

Es gilt $S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$.

Beweis.

Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Dann ist nach Korollar 1.2.7 auch $f^2 \in S(\mathbb{R})$, also im Unendlichen schneller fallend als das Reziproke jeden Polynoms. Sei durch $P(x) = 1 + x^2$ ein Polynom gegeben. Nach Lemma 1.2.2 gilt dann

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} P(x) f^2(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + x^2) f^2(x) = 0$$

und somit auch

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (1 + x^2)|f^2(x)| = 0.$$

Dies impliziert die Existenz eines $C \geq 0$, für das $(1 + x^2)|f^2(x)| \leq C$ gilt, wodurch sich für $f \in S(\mathbb{R})$ die Abschätzung

$$|f^2(x)| \leq \frac{C}{1 + x^2} \quad (1.4)$$

ergibt. Daraus folgt

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |f^2(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{1 + x^2} dx = C \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + x^2} dx = C\pi < \infty.$$

Also ist $f \in L^2(\mathbb{R})$ und somit $S(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$. □

In einem zweiten Schritt ziehen wir aus dem Lemma ein allgemeineres Korollar.

Korollar 1.2.11.

Es gilt $S(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ für alle $p \geq 1$.

Beweis.

Seien $f \in S(\mathbb{R})$ und $p \geq 1$. Da nach Lemma 1.2.6 jede Potenz einer Schwartz-Funktion wieder eine Schwartz-Funktion ist, für die jeweils Abschätzung (1.4) gilt, folgt die Behauptung direkt aus dem Beweis von Lemma 1.2.10, indem dort jedes f^2 durch f^p ersetzt wird. □

Aus Lemma 1.2.5 und Korollar 1.2.11 folgt nun, dass der Schwartz-Raum $S(\mathbb{R})$ ein Unterraum jedes L^p -Raums ist. Insbesondere ist $S(\mathbb{R})$ ein Unterraum des $L^1(\mathbb{R})$ und des bzgl. der L^2 -Norm normierten Raums der quadratintegrierbaren Funktion $L^2(\mathbb{R})$, sodass durch $(S(\mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ ein normierter Raum gegeben ist. Nach [Wer18] liegt $S(\mathbb{R})$ sogar dicht in $L^2(\mathbb{R})$.

Bemerkung 1.2.12.

Die Cauchy-Bunyakovski-Schwarz-Ungleichung aus Korollar 1.1.4 gilt auch für Schwartz-Funktionen, da jede Schwartz-Funktion insbesondere eine L^2 -Funktion ist.

Kapitel 2

Fourier-Analysis

Die Fourier-Analysis geht auf J. Fourier¹³ und dessen Untersuchungen zur Wärmeleitungsgleichung¹⁴ zurück [Fou78]. Durch seinen Beitrag wurde Fourier „so etwas wie ein Katalysator“ [Wei22], von dem die Wissenschaft nachhaltig profitierte. Anwendung findet die Fourier-Analysis heute in vielen naturwissenschaftlichen und technischen Bereichen, beispielsweise in der Bildverarbeitung, der Signalverarbeitung, den Ingenieurwissenschaften, in der Physik und in der medizinischen Diagnostik [Mar09].

In diesem Kapitel wollen wir die Fourier-Transformation auf dem Schwartz-Raum definieren und zeigen, dass sie diesen bijektiv auf sich selbst abbildet.

2.1 Die Fourier-Transformation auf $S(\mathbb{R})$

Die Tatsache, dass nach Korollar 1.2.11 der Schwartz-Raum $S(\mathbb{R})$ in jedem L^p -Raum liegt, rechtfertigt die nächste Definition.

Definition 2.1.1 (Fourier-Transformation).

Für $f \in S(\mathbb{R})$ und $\xi \in \mathbb{R}$ heißt die Funktion

$$\hat{f}(\xi) := [\mathcal{F}f](\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \quad (2.1)$$

die *Fourier-Transformierte* von f . Die Abbildung $\mathcal{F}$ heißt *Fourier-Transformation*.

Das Integral in (2.1) existiert, da

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-2\pi i \xi x}| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| |e^{-2\pi i \xi x}| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx = \|f\|_1 < \infty \quad (2.2)$$

¹³ Jean Baptiste Joseph Fourier (1768–1830), französischer Mathematiker und Physiker.

¹⁴ Eine partielle Differentialgleichung, die die Wärmeausbreitung in einem Körper beschreibt.

für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt, da f als Schwartz-Funktion eine L^1 -Funktion ist. Insbesondere ist die Fourier-Transformation auf $S(\mathbb{R})$ beschränkt, denn aus (2.2) folgt

$$|\hat{f}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-2\pi i \xi x}| dx = \|f\|_1 < \infty \quad (2.3)$$

für alle $f \in S(\mathbb{R})$ und $\xi \in \mathbb{R}$.

Bemerkung 2.1.2.

Die Fourier-Transformation wird in der Literatur nicht einheitlich definiert. Unsere Definition stimmt mit der aus [SS03b] überein. In [Wer18] dagegen wird sie als

$$\hat{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx \quad (2.4)$$

und in [Str94] als

$$\hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi x} dx \quad (2.5)$$

definiert. Eine mögliche Rechtfertigung für diese uneinheitliche Definition wird in [Mar09, S. 14, Fußnote 6] angeführt. Zudem scheint ein Zusammenhang zwischen der Definition der Fourier-Transformation und dem jeweiligen wissenschaftlichen Fachbereich zu bestehen, wie ein Blick in Bücher zur Quantenmechanik (z.B. [Gri12], [Lew24], [Mor13]) vermuten lässt, in denen die Fourier-Transformation durchweg wie in (2.4) definiert wird. Wir entschieden uns in Definition 2.1.1 für die Version aus [SS03b], da sie die einzige ist, für die weder die Fourier-Transformierte noch ihre Inverse (vgl. Bemerkung 2.3.2) einen Vorfaktor enthalten und da wir uns für einige Beweise dieser Arbeit an [SS03b] orientieren werden.

Um einen Zusammenhang zwischen der „eindimensionalen Theorie der Fourier-Transformation und der Funktionentheorie“ [SS03a] herzustellen, setzen wir für $z \in \mathbb{C}$ die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ einer Funktion $f \in S(\mathbb{R})$ durch

$$\tilde{f}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad z \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(w) e^{-2\pi i z w} dw \quad (2.6)$$

auf die komplexe Ebene fort und untersuchen diese in den beiden nächsten Lemmata aus [SS03a] hinsichtlich Holomorphie und Beschränktheit.

Lemma 2.1.3.

Die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ einer Funktion $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ kann zu einer ganzen, d. h. zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion, fortgesetzt werden.

Beweis.

Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Dann ist f nach Beispiel 1.2.4 i) insbesondere eine Schwartz-Funktion. Sei $\tilde{f}$ die Fortsetzung von $\hat{f}$ auf $\mathbb{C}$ aus (2.6). Für $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(w)e^{-2\pi izw}| dw &= \int_{\mathbb{R}} |f(w)e^{-2\pi i(\operatorname{Re}(z)+i\operatorname{Im}(z))w}| dw \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(w)e^{-2\pi i\operatorname{Re}(z)w} e^{2\pi \operatorname{Im}(z)w}| dw \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(w)| |e^{-2\pi i\operatorname{Re}(z)w}| |e^{2\pi \operatorname{Im}(z)w}| dw \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(w)| e^{2\pi \operatorname{Im}(z)w} dw. \end{aligned}$$

Da f kompakten Träger hat, gibt es ein $R \in \mathbb{R}$, sodass $f(w) = 0$ für alle $w \in \mathbb{R}$ mit $|w| > R$. Somit genügt es, das Integral über $[-R, R]$ statt über ganz $\mathbb{R}$ zu betrachten. Zusammen mit der Monotonie der Exponentialfunktion folgt daraus

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(w)e^{-2\pi izw}| dw &= \int_{\mathbb{R}} |f(w)| e^{2\pi \operatorname{Im}(z)w} dw = \int_{-R}^R |f(w)| e^{2\pi \operatorname{Im}(z)w} dw \\ &\leq \int_{-R}^R |f(w)| e^{2\pi \operatorname{Im}(z)R} dw = e^{2\pi \operatorname{Im}(z)R} \int_{-R}^R |f(w)| dw \\ &= e^{2\pi \operatorname{Im}(z)R} \int_{\mathbb{R}} |f(w)| dw = e^{2\pi \operatorname{Im}(z)R} \|f\|_1. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt $\|f\|_1 < \infty$, sodass aus (2.7) die absolute Konvergenz des Integrals

$$\int_{\mathbb{R}} f(w)e^{-2\pi izw} dw$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt. Die absolute Konvergenz erlaubt es, Differentiation und Integration zu vertauschen, wodurch sich

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \tilde{f}(z) &= \frac{d}{dz} \left(\int_{\mathbb{R}} f(w)e^{-2\pi izw} dw \right) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{d}{dz} f(w)e^{-2\pi izw} \right) dw \\ &= -2\pi i \int_{\mathbb{R}} w f(w)e^{-2\pi izw} dw \end{aligned}$$

ergibt. Somit folgt die Holomorphie von $\tilde{f}$ direkt aus der Holomorphie des Integranden. Da dieser auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, gilt dies auch für $\tilde{f}$, woraus die Behauptung folgt. $\square$

Bemerkung 2.1.4.

Nach [Yos95] heißt die Fortsetzung der Fourier-Transformation auf die komplexe Ebene *Fourier-Laplace*¹⁵-Transformation.

Nach Lemma 2.1.3 ist also die Fourier-Laplace-Transformierte einer glatten Funktion mit kompaktem Träger eine ganze Funktion. Eine weitere Eigenschaft der Fourier-Laplace-Transformation, die es uns in Kapitel 3 ermöglichen wird mit Hilfe eines uns bekannten Satzes aus der Funktionentheorie die erste zentrale Aussage dieser Arbeit (Satz 3.1.1) zu beweisen, ist ihre Beschränktheit.

Lemma 2.1.5.

Die Fortsetzung der Fourier-Transformation auf $\mathbb{C}$ ist beschränkt.

Beweis.

Sei $f \in S(\mathbb{R})$ und sei $\tilde{f}$ die Fortsetzung von $\hat{f}$ auf $\mathbb{C}$ aus (2.6). Sei $z = \eta + i\gamma$ mit $\eta, \gamma \in \mathbb{R}$. Aus der Linearität des Integrals folgt die Linearität von $\tilde{f}$, es gilt also

$$\tilde{f}(z) = \tilde{f}(\eta + i\gamma) = \tilde{f}(\eta) + i\tilde{f}(\gamma).$$

Daraus ergibt sich mit der Dreiecksungleichung

$$|\tilde{f}(z)| = |\tilde{f}(\eta) + i\tilde{f}(\gamma)| \leq |\tilde{f}(\eta)| + |i||\tilde{f}(\gamma)| = |\tilde{f}(\eta)| + |\tilde{f}(\gamma)|. \quad (2.8)$$

Wegen $\tilde{f}|_{\mathbb{R}} = \hat{f}$ und $\eta, \gamma \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\tilde{f}(\eta)| + |\tilde{f}(\gamma)| = |\hat{f}(\eta)| + |\hat{f}(\gamma)|,$$

woraus mit (2.8) und der Beschränktheit der Fourier-Transformation schließlich

$$|\tilde{f}(z)| \leq |\hat{f}(\eta)| + |\hat{f}(\gamma)| \leq 2\|f\|_1 < \infty$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ folgt. $\square$

¹⁵ Pierre-Simon Laplace (1749–1827), französischer Mathematiker, Physiker und Astronom.

2.2 Eigenschaften der Fourier-Transformation

In diesem Abschnitt wollen wir uns Eigenschaften der Fourier-Transformation anschauen. Ausgehend von grundlegenden Eigenschaften wie ihrer Linearität werden wir unter anderem Zusammenhänge zwischen ihr und der Differentialrechnung herstellen, die in der Anwendung von großer Bedeutung sind und die maßgeblich dazu beitragen werden, unsere Einschränkung der Fourier-Transformation auf den Schwartz-Raum zu rechtfertigen.

Wir beginnen mit einer Proposition, deren Teile ii) und iii) unter Berücksichtigung von Bemerkung 2.1.2 nach [Str94] bewiesen werden.

Proposition 2.2.1.

Für $f, g \in S(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gelten

- i) $[\mathcal{F}(\alpha f(x) + \beta g(x))](\xi) = \alpha [\mathcal{F}(f(x))](\xi) + \beta [\mathcal{F}(g(x))](\xi),$
- ii) $[\mathcal{F}(f(x - a))](\xi) = e^{-2\pi i a \xi} [\mathcal{F}(f(x))](\xi),$
- iii) $[\mathcal{F}(e^{2\pi i a x} f(x))](\xi) = [\mathcal{F}(f(x))](\xi - a),$
- iv) $[\mathcal{F}(f(ax))](\xi) = \frac{1}{|a|} [\mathcal{F}(f(x))]\left(\frac{\xi}{a}\right), \text{ für } a \neq 0,$
- v) $[\mathcal{F}(f(-x))](\xi) = [\mathcal{F}(f(x))](-\xi).$

Hierbei wurde die Notation $\hat{f}(\xi) = [\mathcal{F}f](\xi)$ aus Definition 2.1.1 verwendet.

Beweis.

Seien $f, g \in S(\mathbb{R})$ mit Fourier-Transformierten $\hat{f}, \hat{g}$ und sei $a \in \mathbb{R}$.

i) Da $S(\mathbb{R})$ nach Lemma 1.2.5 ein $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist, folgt aus $f, g \in S(\mathbb{R})$, dass $h(x) := \alpha f(x) + \beta g(x)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ eine Schwartz-Funktion ist und somit die Existenz von $[\mathcal{F}h](\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

Die Behauptung folgt dann direkt aus der Linearität des Integrals.

ii) Es gilt

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(f(x - a))](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x - a) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi (x+a)} dx \\ &= e^{-2\pi i a \xi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = e^{-2\pi i a \xi} [\mathcal{F}(f(x))](\xi). \end{aligned}$$

iii) Aus $f \in S(\mathbb{R})$ folgt mit der Abgeschlossenheit des Schwartz-Raums unter Multiplikation mit komplexen Exponentialfunktionen (Lemma 1.2.8) die Existenz von $[\mathcal{F}(e^{2\pi i a x} f(x))](\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(e^{2\pi i a x} f(x))](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i a x} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i (\xi - a)x} dx \\ &= [\mathcal{F}(f(x))](\xi - a). \end{aligned}$$

iv) Für $a > 0$ gilt

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(f(ax))](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{a} f(x) e^{-2\pi i \xi \frac{x}{a}} dx \\ &= \frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \frac{\xi}{a} x} dx = \frac{1}{|a|} [\mathcal{F}(f(x))]\left(\frac{\xi}{a}\right). \end{aligned}$$

Für $a < 0$ gilt

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(f(ax))](\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(ax) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} f(x) e^{-2\pi i \xi \frac{x}{a}} dx \\ &= -\frac{1}{a} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \frac{\xi}{a} x} dx = \frac{1}{|a|} [\mathcal{F}(f(x))]\left(\frac{\xi}{a}\right). \end{aligned}$$

v) Folgt aus iv) mit $a = -1$. □

Wir bemerken, dass im Beweis von Proposition 2.2.1 an keiner Stelle der schnelle Abfall von Schwartz-Funktionen verwendet wurde, sodass alle bisher eingeführten Eigenschaften der Fourier-Transformation nicht nur auf $S(\mathbb{R})$, sondern auf ganz $L^1(\mathbb{R})$ gelten, wenn $\mathcal{F}$ auf $L^1(\mathbb{R})$ definiert wird. Dass wir uns in unserer Definition auf den Schwartz-Raum beschränken liegt darin begründet, dass die Fourier-Transformation sich für Schwartz-Funktionen *schön* verhält. Auch wenn A. Cayley¹⁶ einst sagte, dass „Schönheit [...] wahrgenommen, aber nicht erklärt werden“ könne, wollen wir versuchen, uns durch die folgenden Lemmata von dem *schönen* Verhalten der Fourier-Transformation auf $S(\mathbb{R})$ zu überzeugen.

Als Erstes schauen wir uns an, wie sich Ableitungen von Schwartz-Funktionen unter $\mathcal{F}$ verhalten. Mit der Aussage des folgenden Lemmas werden wir einen der zentralen Beweise dieser Arbeit (Satz 3.2.1) führen. Der Beweis des Lemmas orientiert sich, wieder unter Berücksichtigung von Bemerkung 2.1.2, an [Str94].

Lemma 2.2.2.

Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt

$$\widehat{(f')}(\xi) = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi).$$

¹⁶ Arthur Cayley (1821–1895), englischer Mathematiker.

Beweis.

Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Nach Korollar 1.2.7 ist dann auch $f' \in S(\mathbb{R})$, sodass die Fourier-Transformierte von f' betrachtet werden kann. Für diese gilt per Definition

$$\widehat{(f')}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Partielle Integration und Lemma 1.2.9 i) liefern

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx &= \left[f(x) e^{-2\pi i \xi x} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) (-2\pi i \xi) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = 2\pi i \xi \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. $\square$

Aus dem Lemma lässt sich ein wichtiges Korollar ziehen.

Korollar 2.2.3.

Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt

$$\widehat{(f^{(n)})}(\xi) = (2\pi i)^n \xi^n \hat{f}(\xi)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Sei dazu $f \in S(\mathbb{R})$. Nach Korollar 1.2.7 ist dann auch $f^{(n)} \in S(\mathbb{R})$, sodass die Fourier-Transformierte von $f^{(n)}$ betrachtet werden kann.

Der Fall $n = 1$ entspricht Lemma 2.2.2. Sei also die Behauptung gezeigt für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$. Für $n \rightarrow n + 1$ gilt per Definition

$$\widehat{f^{(n+1)}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f^{(n+1)}(x) e^{-2\pi i \xi x} dx.$$

Partielle Integration und Lemma 1.2.9 i) liefern

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f^{(n+1)}(x) e^{-2\pi i \xi x} dx &= \left[f^{(n)}(x) e^{-2\pi i \xi x} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f^{(n)}(x) (-2\pi i \xi) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= 2\pi i \xi \int_{\mathbb{R}} f^{(n)}(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = 2\pi i \xi \widehat{(f^{(n)})}(\xi) \\ &= (2\pi i)^{n+1} \xi^{n+1} \hat{f}(\xi) \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei im letzten Schritt die Induktionsvoraussetzung verwendet wurde. $\square$

Die Fourier-Transformierte einer Ableitung ist also zurückzuführen auf die Fourier-Transformierte der Funktion selbst. Dieser Zusammenhang findet Anwendung beim Lösen von Differentialgleichungen. Dabei wird ausgenutzt, dass durch die Fourier-Transformation Ableitungen zu Produkten und somit Differentialgleichungen zu algebraischen Gleichungen werden, welche sich im Allgemeinen besser lösen lassen als Differentialgleichungen. In [Str94, S. 35] wird dieses Lösungsverfahren exemplarisch an der auf E. Schrödinger¹⁷ zurückgehenden *Schrödinger-Gleichung*, bei der es sich um eine partielle Differentialgleichung handelt, veranschaulicht.

Als nächstes schauen wir uns umgekehrt an, wie sich die Fourier-Transformation auf $S(\mathbb{R})$ unter Differentiation verhält. Der Fall $n = 1$ des folgenden Lemmas stammt wieder aus [Str94].

Lemma 2.2.4.

Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt

$$(\widehat{f})^{(n)}(\xi) = (-2\pi i)^n \widehat{x^n f(x)}(\xi)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis.

Der Beweis erfolgt per vollständiger Induktion nach $n \in \mathbb{N}$. Sei dazu $f \in S(\mathbb{R})$. Für den Fall $n = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned} (\widehat{f})'(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{d}{d\xi} e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(x) (-2\pi i x) e^{-2\pi i \xi x} dx = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\ &= -2\pi i \widehat{x f(x)}(\xi) \end{aligned} \quad (2.9)$$

und somit die Behauptung für $n = 1$, wobei im ersten Schritt nach [Str94] Differentiation und Integration vertauscht werden dürfen, da für $f \in S(\mathbb{R})$ gemäß Lemma 1.2.8 auch $f(x)e^{-2\pi i \xi x}$ und somit der Integrand eine Schwartz-Funktion ist. Sei also die Behauptung gezeigt für ein beliebiges, festes $n \in \mathbb{N}$. Für $n \rightarrow n + 1$ gilt

$$(\widehat{f})^{(n+1)}(\xi) = \frac{d}{d\xi} (\widehat{f})^{(n)}(\xi) = \frac{d}{d\xi} (-2\pi i)^n \widehat{x^n f(x)}(\xi)$$

nach Induktionsvoraussetzung. Da für $f \in S(\mathbb{R})$ nach Lemma 1.2.6 für alle $n \in \mathbb{N}_0$ auch $x^n f \in S(\mathbb{R})$ ist, können mit dem selben Argument wie im Fall

¹⁷ Erwin Rudolf Josef Alexander Schrödinger (1887–1961), österreichischer Physiker.

$n = 1$ im Folgenden Differentiation und Integration vertauscht werden, sodass

$$\begin{aligned}
(\widehat{f})^{(n+1)}(\xi) &= \frac{d}{d\xi} (-2\pi i)^n \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = (-2\pi i)^n \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) \frac{d}{d\xi} e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= (-2\pi i)^n \int_{\mathbb{R}} x^n f(x) (-2\pi i x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= (-2\pi i)^{n+1} \int_{\mathbb{R}} x^{n+1} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \\
&= (-2\pi i)^{n+1} \widehat{x^{n+1} f(x)}(\xi)
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt. $\square$

Um ein Gefühl für die soeben eingeführten Eigenschaften zu entwickeln, wollen wir sie auf eine konkrete Schwartz-Funktion anwenden. Wie viele Autoren, so beispielsweise auch [SS03b], entscheiden wir uns für die normierte Gauß-Funktion, die invariant unter der Fourier-Transformation ist. Diese Invarianz werden wir uns zu einem späteren Zeitpunkt noch zunutze machen.

Beispiel 2.2.5.

Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{-\pi x^2}$ gilt $\widehat{f}(\xi) = f(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$.

Um dies zu sehen, bemerken wir zuerst, dass f nach Beispiel 1.2.4 ii) als Gauß-Funktion eine Schwartz-Funktion ist, sodass $\widehat{f}$ existiert.

Wie in [SS03b] betrachten wir für $\xi \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$G(\xi) := \widehat{f}(\xi) e^{\pi \xi^2}$$

und werden zeigen, dass G auf $\mathbb{R}$ die konstante Eins-Funktion ist. Für die Ableitung von G gilt

$$G'(\xi) = \frac{d}{d\xi} (\widehat{f}(\xi) e^{\pi \xi^2}) = (\widehat{f})'(\xi) e^{\pi \xi^2} + \widehat{f}(\xi) 2\pi \xi e^{\pi \xi^2}. \quad (2.10)$$

Für $f(x) = e^{-\pi x^2}$ liefert (2.9) aus dem Beweis von Lemma 2.2.4 die Darstellung

$$(\widehat{f})'(\xi) = -2\pi i \int_{\mathbb{R}} x f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = i \int_{\mathbb{R}} -2\pi x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx. \quad (2.11)$$

Es gilt $f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2}$ und per Definition ist $\widehat{(f')}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx$. Durch Einsetzen in (2.11) ergibt sich daraus

$$(\widehat{f})'(\xi) = i \int_{\mathbb{R}} -2\pi x e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i \xi x} dx = i \int_{\mathbb{R}} f'(x) e^{-2\pi i \xi x} dx = i \widehat{(f')}(\xi),$$

also

$$(\hat{f})'(\xi) = i2\pi i \xi \hat{f}(\xi) = -2\pi \xi \hat{f}(\xi) \quad (2.12)$$

nach Lemma 2.2.2. Einsetzen von (2.12) in (2.10) liefert

$$G'(\xi) = (\hat{f})'(\xi) e^{\pi \xi^2} + \hat{f}(\xi) 2\pi \xi e^{\pi \xi^2} = -2\pi \xi \hat{f}(\xi) e^{\pi \xi^2} + 2\pi \xi \hat{f}(\xi) e^{\pi \xi^2} = 0$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$, sodass G auf $\mathbb{R}$ konstant ist. Da

$$\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi 0 x} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1,$$

ist $G(0) = \hat{f}(0) \cdot e^{\pi 0^2} = 1 \cdot 1 = 1$ und somit $G \equiv 1$ auf $\mathbb{R}$. Daraus folgt

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{e^{\pi \xi^2}} G(\xi) = \frac{1}{e^{\pi \xi^2}} = e^{-\pi \xi^2} = f(\xi)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$ und somit die Behauptung.

Wir erinnern uns, dass wir mit Blick auf die *inverse Fourier-Transformation*, der wir das nächste Unterkapitel widmen werden, verifizieren wollen, dass die Fourier-Transformation den Schwartz-Raum bijektiv auf sich selbst abbildet. Das folgende Lemma zeigt einen Teil dieser Aussage, und zwar dass die Fourier-Transformierte einer Schwartz-Funktion wieder eine Schwartz-Funktion ist. Diese Invarianz des Schwartz-Raums unter $\mathcal{F}$ ist eine der wichtigsten – oder *schönsten* – Eigenschaften der Fourier-Transformation auf $S(\mathbb{R})$.

Die Grundidee des geführten Beweises und die dort definierte Hilfsfunktion g stammen aus [SS03b].

Lemma 2.2.6.

Für $f \in S(\mathbb{R})$ ist auch $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$.

Beweis.

Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Um zu zeigen, dass $\hat{f}$ eine Schwartz-Funktion ist, müssen wir zeigen, dass

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \xi^\alpha (\hat{f})^{(n)}(\xi) = 0$$

für alle $\alpha, n \in \mathbb{N}_0$ gilt. Dazu zeigen wir zunächst, dass $\xi^\alpha (\hat{f})^{(n)}(\xi)$ für alle $\alpha, n \in \mathbb{N}_0$ die Fourier-Transformierte einer Schwartz-Funktion g ist und nutzen dann die Beschränktheit der Fourier-Transformation gemäß (2.3) aus. Seien dazu $\alpha, n \in \mathbb{N}_0$ und

$$g(x) := \frac{1}{(2\pi i)^\alpha} ((-2\pi i x)^n f(x))^{(\alpha)}.$$

Da der Schwartz-Raum ein unter Differentiation und Multiplikation mit Polynomen abgeschlossener $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist, folgt aus $f \in S(\mathbb{R})$, dass $g \in S(\mathbb{R})$. Mit Korollar 2.2.3, Lemma 2.2.4 und der Notation $\hat{f}(\xi) = [\mathcal{F}f](\xi)$ aus Definition 2.1.1 ergibt sich

$$\begin{aligned}\hat{g}(\xi) &= \left[\mathcal{F} \left(\frac{1}{(2\pi i)^\alpha} ((-2\pi i x)^n f(x))^{(\alpha)} \right) \right] (\xi) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^\alpha} \left[\mathcal{F} \left(((-2\pi i x)^n f(x))^{(\alpha)} \right) \right] (\xi) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^\alpha} (2\pi i \xi)^\alpha [\mathcal{F}((-2\pi i x)^n f(x))] (\xi) \\ &= \frac{(2\pi i)^\alpha}{(2\pi i)^\alpha} \xi^\alpha (-2\pi i)^n [\mathcal{F}(x^n f(x))] (\xi) \\ &= \xi^\alpha [\mathcal{F}f]^{(n)}(\xi) = \xi^\alpha (\hat{f})^{(n)}(\xi).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left| \xi^\alpha (\hat{f})^{(n)}(\xi) \right| = |\hat{g}(\xi)| = \frac{1}{|\xi|} |\xi \hat{g}(\xi)| = \frac{1}{|\xi|} \frac{1}{2\pi} \left| \widehat{(g')}(\xi) \right| \quad (2.13)$$

für alle $\xi \neq 0$, wobei im letzten Schritt Lemma 2.2.2 verwendet wurde, nach dem

$$\left| \widehat{(g')}(\xi) \right| = |2\pi i \xi \hat{g}(\xi)| = 2\pi |\xi \hat{g}(\xi)|$$

und somit

$$|\xi \hat{g}(\xi)| = \frac{1}{2\pi} \left| \widehat{(g')}(\xi) \right|$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gilt. Da g' als Ableitung einer Schwartz-Funktion selbst eine Schwartz-Funktion ist und nach (2.3) die Fourier-Transformierte einer Schwartz-Funktion durch die L^1 -Norm der Funktion beschränkt wird, gilt

$$\left| \widehat{(g')}(\xi) \right| \leq \|g'\|_1 =: C$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Zusammen mit (2.13) folgt daraus

$$0 \leq \left| \xi^\alpha (\hat{f})^{(n)}(\xi) \right| = \frac{1}{2\pi |\xi|} \left| \widehat{(g')}(\xi) \right| \leq \frac{C}{2\pi |\xi|} \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0$$

für alle $\xi \neq 0$ und somit

$$\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \xi^\alpha (\hat{f})^{(n)}(\xi) = 0$$

für alle $\alpha, n \in \mathbb{N}_0$. Also ist $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$. □

Wir wollen uns an einem Beispiel klarmachen, dass, sofern $\mathcal{F}$ auf $L^1(\mathbb{R})$ definiert wird, das letzte Lemma im Allgemeinen nicht auf ganz $L^1(\mathbb{R})$ gilt, dass also die Fourier-Transformierte einer L^1 -Funktion nicht zwangsläufig wieder eine L^1 -Funktion ist.

Beispiel 2.2.7.

Für $T \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Rechteckfunktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & |x| \leq \frac{T}{2} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

aus [But15], bei der es sich wegen

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \, dx = T$$

um eine L^1 -Funktion handelt. Unter der Annahme, dass $\mathcal{F}$ auf $L^1(\mathbb{R})$ definiert wird, ergibt sich die Fourier-Transformierte von f durch direktes Nachrechnen als

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} \, dx = \int_{-T/2}^{T/2} 1 \cdot e^{-2\pi i \xi x} \, dx = -\frac{1}{2\pi i \xi} \left[e^{-2\pi i \xi x} \right]_{-T/2}^{T/2} \\ &= -\frac{1}{2\pi i \xi} \left(e^{-i\pi T \xi} - e^{i\pi T \xi} \right) = \frac{T}{\pi T \xi} \frac{e^{i\pi T \xi} - e^{-i\pi T \xi}}{2i} = T \cdot \frac{\sin(\pi T \xi)}{\pi T \xi} \\ &= T \operatorname{sinc}(\pi T \xi). \end{aligned}$$

Da die sinc-Funktion bekanntlich keine L^1 -Funktion ist (nachzulesen z. B. in [For17, S. 59 f.]), haben wir mit der Rechteckfunktion eine Funktion in $L^1(\mathbb{R})$ gefunden, deren Fourier-Transformierte nicht mehr in $L^1(\mathbb{R})$ liegt. Dies ist kein Widerspruch zu Lemma 2.2.6, da die Rechteckfunktion offensichtlich nicht stetig, also nicht differenzierbar und somit keine Schwartz-Funktion ist.

Das folgende Lemma aus [SS03b] zeigt, dass das Integral über die Fourier-Transformierte einer Schwartz-Funktion f auf eine einfache Punktauswertung der Funktion f zurückgeführt werden kann.

Lemma 2.2.8.

Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \, d\xi.$$

Beweis.

Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Wir betrachten für $\delta > 0$ die Funktionen $G_\delta(x) := e^{-\pi\delta x^2}$ und $h(x) := e^{-\pi x^2}$ und bemerken, dass $h(\sqrt{\delta}x) = G_\delta(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Nach Beispiel 1.2.4 ii) ist G_δ für beliebiges $\delta > 0$ eine Schwartz-Funktion, sodass die Fourier-Transformierte $\widehat{G}_\delta$ existiert. Unter Ausnutzung der Skalierungseigenschaft aus Proposition 2.2.1 iv) ergibt sich für diese

$$[\mathcal{F}G_\delta(x)](\xi) = [\mathcal{F}h(\sqrt{\delta}x)](\xi) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}[\mathcal{F}h(x)](\xi/\sqrt{\delta}) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}[\mathcal{F}e^{-\pi x^2}](\xi/\sqrt{\delta}),$$

also

$$\widehat{G}_\delta(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi(\xi/\sqrt{\delta})^2} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\pi}{\delta}\xi^2} \quad (2.14)$$

nach Beispiel 2.2.5. Anwendung des Satzes von Fubini¹⁸ liefert außerdem

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{G}_\delta(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} G_\delta(\xi)e^{-2\pi i x \xi} d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} G_\delta(\xi) \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x \xi} dx d\xi = \int_{\mathbb{R}} G_\delta(\xi)\hat{f}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

und somit

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{G}_\delta(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)G_\delta(\xi) d\xi. \quad (2.15)$$

Wir wollen für die beiden Integrale in (2.15) das Grenzverhalten für $\delta \rightarrow 0$ untersuchen. Mit der Substitution $z := x/\sqrt{\delta}$ und (2.14) ergibt sich für das linke Integral

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\widehat{G}_\delta(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{\delta}z)\widehat{G}_\delta(\sqrt{\delta}z)\sqrt{\delta} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{\delta}z)\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\frac{\pi}{\delta}(\sqrt{\delta}z)^2}\sqrt{\delta} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{\delta}z)e^{-\pi z^2} dz. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Bevor wir zum Limes übergehen, rechtfertigen wir zuerst mit Hilfe des Satzes von der majorisierten Konvergenz (Proposition 1.1.5), dass Grenzwertbildung und Integration vertauscht werden dürfen. Mit f ist nach Lemma 1.2.8 auch $f(\sqrt{\delta}z)e^{-\pi z^2}$ eine Schwartz-Funktion, also stetig und somit messbar. Aus der

¹⁸ Guido Fubini (1879–1943), italienischer Mathematiker.

Stetigkeit von f folgt außerdem $\lim_{\delta \rightarrow 0} f(\sqrt{\delta}z)e^{-\pi z^2} = f(0)e^{-\pi z^2}$ für alle $z \in \mathbb{R}$. Eine integrierbare Majorante ist durch $C \cdot (1 + z^2)^{-1}$ für ein $C > 0$ gegeben, da

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{C}{1 + z^2} \right| dz = \int_{\mathbb{R}} \frac{C}{1 + z^2} dz = C \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1 + z^2} dz = C\pi < \infty$$

und mit dem selben Argument wie in (1.4) für Schwartz-Funktionen

$$|f(\sqrt{\delta}z)e^{-\pi z^2}| \leq \frac{C}{1 + z^2}$$

gilt. Somit ergibt sich für die linke Seite von (2.15) mit (2.16) und dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{G}_{\delta}(x) dx &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(\sqrt{\delta}z) e^{-\pi z^2} dz = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\delta \rightarrow 0} f(\sqrt{\delta}z) e^{-\pi z^2} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(0) e^{-\pi z^2} dz = f(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi z^2} dz = f(0). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Auch für das rechte Integral in (2.15) wollen wir das Grenzverhalten für $\delta \rightarrow 0$ untersuchen. Da für $f \in S(\mathbb{R})$ nach Lemma 2.2.6 auch $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ ist, sind die $\hat{f}(\xi)G_{\delta}(\xi)$ Schwartz-Funktionen, also stetig und somit messbar. Es gilt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{f}(\xi)G_{\delta}(\xi) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{f}(\xi)e^{-\pi\delta\xi^2} = \hat{f}(\xi)e^{-\pi 0 \xi^2} = \hat{f}(\xi)$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Da die Fourier-Transformierte einer Schwartz-Funktion nach (2.3) durch die L^1 -Norm der Funktion beschränkt ist, gilt

$$|\hat{f}(\xi)G_{\delta}(\xi)| = |\hat{f}(\xi)e^{-\pi\delta\xi^2}| = |\hat{f}(\xi)|e^{-\pi\delta\xi^2} \leq \|f\|_1 e^{-\pi\delta\xi^2},$$

sodass für $f \in S(\mathbb{R})$ aus

$$\int_{\mathbb{R}} \|f\|_1 e^{-\pi\delta\xi^2} d\xi = \|f\|_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi\delta\xi^2} d\xi = \|f\|_1 \frac{1}{\sqrt{\delta}} < \infty$$

folgt, dass durch $\|f\|_1 e^{-\pi\delta\xi^2}$ eine integrierbare Majorante für $\hat{f}G_{\delta}$ gegeben ist. Für die rechte Seite von (2.15) ergibt sich also mit der obigen Grenzwertberechnung und dem Satz von der majorisierten Konvergenz

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)G_{\delta}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{f}(\xi)G_{\delta}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad (2.18)$$

Die Behauptung folgt schließlich aus Grenzwertbildung auf beiden Seiten von (2.15), unter Verwendung der in (2.17) und (2.18) berechneten Grenzwerte

$$f(0) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{G}_{\delta}(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)G_{\delta}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) d\xi. \quad \square$$

Den Nutzen des letzten Lemmas wollen wir an einem Beispiel verdeutlichen und betrachten dafür wieder die normierte Gauß-Funktion.

Beispiel 2.2.9.

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

In den Grundvorlesungen zur Analysis wird dieses Integral unter Verwendung von Polarkoordinaten oder mit Hilfe des Satzes von Fubini berechnet. Nun erlaubt uns Lemma 2.2.8 aber eine schnellere Berechnung des obigen Integrals. Die Funktion $f(x) = e^{-\pi x^2}$ ist nach Beispiel 1.2.4 ii) eine Schwartz-Funktion und nach Beispiel 2.2.5 gilt $\hat{f}(\xi) = f(\xi)$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Somit ergibt sich gemäß Lemma 2.2.8 für das Integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) d\xi = f(0) = e^{-\pi \cdot 0^2} = 1.$$

Bemerkung 2.2.10.

Im Beweis von Lemma 2.2.8 haben wir händisch gezeigt, dass

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{G}_{\delta}(x) dx = f(0)$$

gilt. In [SS03b] wird diese Aussage auch für den Beweis unseres Lemmas verwendet, allerdings folgt sie dort direkt als Spezialfall einer allgemeineren Aussage. Ohne auf die Details einzugehen, wollen wir diese Argumentation aus [SS03b] kurz skizzieren. Dafür werden vorab zwei Definitionen benötigt:

- Für zwei Schwartz-Funktionen f und g ist die *Faltung* definiert als

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t) dt,$$

wobei das Integral existiert, da für festes x der Integrand als Produkt zweier Schwartz-Funktionen selbst eine Schwartz-Funktion und somit integrierbar ist.

- Eine Familie $\{K_{\delta}\}_{\delta>0}$ heißt *Familie guter Kerne*, wenn sie die folgenden drei Eigenschaften erfüllt:

- Es gilt $\int_{\mathbb{R}} K_{\delta}(x) dx = 1$.
- Es gibt ein $M > 0$, sodass $\int_{\mathbb{R}} |K_{\delta}(x)| dx \leq M$ für alle $\delta > 0$ gilt.
- Für alle $\eta > 0$ gilt $\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x|>\eta} |K_{\delta}(x)| dx = 0$.

Es kann gezeigt werden, dass wenn $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ eine Familie guter Kerne ist, diese Kerne, gefaltet mit einer Schwartz-Funktion f , für $\delta \rightarrow 0$ gleichmäßig gegen die Funktion f konvergieren (vgl. [SS03b, Korollar 1.7]). Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt dann also

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} (f * K_\delta)(x) = f(x). \quad (2.19)$$

Man spricht in diesem Fall auch von einer *Approximation der Identität*.

Seien nun $f \in S(\mathbb{R})$ und $G_\delta(x) = \exp(-\pi\delta x^2)$ mit $\widehat{G_\delta}(\xi) = \delta^{-1/2} \exp(-\pi\xi^2/\delta)$ wie im Beweis von Lemma 2.2.8. In [SS03b, S. 139] wird gezeigt, dass $\widehat{G_\delta}$ für $\delta > 0$ ein guter Kern ist. Außerdem ist $\widehat{G_\delta}$ als Fourier-Transformierte einer Schwartz-Funktion selbst eine Schwartz-Funktion, sodass sie mit f gefaltet werden kann. Da $\widehat{G_\delta}$ offensichtlich eine gerade Funktion ist, gilt

$$(f * \widehat{G_\delta})(0) = \int_{\mathbb{R}} f(-t) \widehat{G_\delta}(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(-t) \widehat{G_\delta}(-t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{G_\delta}(x) dx,$$

sodass sich

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{G_\delta}(x) dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} (f * \widehat{G_\delta})(0) = f(0)$$

als Spezialfall von (2.19) für $x = 0$ ergibt.

Abschließen wollen wir diesen Abschnitt damit, dass die Fourier-Transformation bzgl. der L^2 -Norm isometrisch und somit eine Isometrie vom Schwartz-Raum auf sich selbst ist. Diese Eigenschaft geht auf M. Plancherel¹⁹ zurück und wird im folgenden Lemma festgehalten. Da wir für den Beweis des Lemmas Resultate des nächsten Abschnitts benötigen, werden wir diesen auf Bemerkung 2.3.6 verschieben.

Lemma 2.2.11 (Satz von Plancherel).

Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$.

Beweis.

Siehe Bemerkung 2.3.6. □

Bemerkung 2.2.12.

Da $S(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, folgt aus dem Satz von Plancherel (Lemma 2.2.11), dass die Fourier-Transformation zu einer Isometrie auf $L^2(\mathbb{R})$ fortgesetzt werden kann. Nach [Wer18] heißt diese Fortsetzung *Fourier-Plancherel-Transformation*.

¹⁹ Michel Plancherel (1885–1967), Schweizer Mathematiker.

2.3 Die inverse Fourier-Transformation auf $S(\mathbb{R})$

Ein Ziel dieses Abschnitts wird es sein zu zeigen, dass die Fourier-Transformation, wie von uns definiert, umkehrbar ist und damit die Rechtfertigung unserer Einschränkung der Fourier-Transformation auf den Schwartz-Raum abzuschließen. Ausgangspunkt dafür ist folgende Definition.

Definition 2.3.1 (Inverse Fourier-Transformation).

Für $f \in S(\mathbb{R})$ und $\xi \in \mathbb{R}$ sei

$$\check{f}(\xi) := [\mathcal{F}^{-1}f](\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2\pi i \xi x} dx. \quad (2.20)$$

Die Abbildung $\mathcal{F}^{-1}$ heißt *inverse Fourier-Transformation*.

Wieder folgen die Existenz und die Beschränktheit des Integrals in (2.20) daraus, dass jede Schwartz-Funktion eine L^1 -Funktion ist.

Bemerkung 2.3.2.

Je nachdem wie die Fourier-Transformation definiert wird, ergeben sich auch für die inverse Fourier-Transformation unterschiedliche Darstellungen (vgl. Bemerkung 2.1.2). Wieder stammt unsere Version aus [SS03b]. Die Fourier-Transformation gemäß (2.4) aus [Wer18] liefert

$$\check{f}(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{i\xi x} dx$$

und für die gemäß (2.5) aus [Str94] ergibt sich

$$\check{f}(\xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\xi x} dx.$$

Das nächste Lemma zeigt, dass die Abbildung aus Definition 2.3.1 zurecht als *inverse Fourier-Transformation* $\mathcal{F}^{-1}$ bezeichnet wird.

Lemma 2.3.3.

Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt

$$\check{\check{f}}(x) = f(x) = \hat{\hat{f}}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Wir zeigen zuerst, dass $\check{f}(x) = \hat{f}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dies folgt direkt aus den Definitionen, denn nach diesen gilt

$$\begin{aligned}\check{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-2\pi i \xi y} dy e^{2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{2\pi i \eta y} dy e^{-2\pi i x \eta} d\eta = \int_{\mathbb{R}} \check{f}(\eta) e^{-2\pi i x \eta} d\eta \\ &= \hat{f}(x).\end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $\check{f}(x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Dieser Beweisabschnitt wird nach [SS03b] geführt. Dazu verwenden wir die Hilfsaussage aus Lemma 2.2.8, dass

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) d\xi \quad (2.21)$$

für alle $f \in S(\mathbb{R})$ gilt und betrachten die Funktion $F(y) := f(y+x)$ für $y \in \mathbb{R}$. Es gilt $f(x) = F(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und da $F \in S(\mathbb{R})$ aus $f \in S(\mathbb{R})$ folgt, kann (2.21) auf F angewendet werden. Nach Proposition 2.2.1 ii) gilt

$$[\mathcal{F}(f(x-a))](\xi) = e^{-2\pi i a \xi} [\mathcal{F}(f(x))](\xi)$$

für festes $a \in \mathbb{R}$, also

$$\hat{F}(\xi) = [\mathcal{F}(f(y+x))](\xi) = e^{2\pi i x \xi} [\mathcal{F}(f(x))](\xi) = e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi)$$

für festes $x \in \mathbb{R}$. Zusammen mit den Vorüberlegungen folgt daraus

$$f(x) = F(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{F}(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x \xi} \hat{f}(\xi) d\xi = \check{f}(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit die Behauptung. □

Damit haben wir nun gezeigt, dass die Fourier-Transformation den Schwartz-Raum bijektiv auf sich selbst abbildet. Dieses wichtige Resultat wollen wir als Korollar festhalten.

Korollar 2.3.4.

Die Fourier-Transformation ist eine Bijektion von $S(\mathbb{R})$ nach $S(\mathbb{R})$.

Beweis.

Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 2.3.3 und Lemma 2.2.6. □

Bemerkung 2.3.5.

Das letzte Lemma liefert zwei Darstellungen einer Schwartz-Funktion f , nämlich

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi \quad (2.22)$$

und

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \check{f}(\xi) e^{-2\pi i x \xi} d\xi \quad (2.23)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

So lässt sich durch die inverse Fourier-Transformation jede Schwartz-Funktion aus ihrer Fourier-Transformierten zurückgewinnen – und vice versa.

Dies ermöglicht uns nun den Beweis des Satzes von Plancherel (Lemma 2.2.11) nach [Tal13].

Bemerkung 2.3.6 (Beweis von Lemma 2.2.11).

Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \langle \hat{f}, \hat{f} \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx \overline{\hat{f}(\xi)} d\xi. \quad (2.24)$$

Nach dem Satz von Fubini kann die Integrationsreihenfolge in (2.24) vertauscht werden, sodass

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x) \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)} e^{-2\pi i \xi x} d\xi dx \quad (2.25)$$

folgt. Nach (2.22) gilt

$$\begin{aligned} \overline{f(x)} &= \overline{\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi} = \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi}} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)} e^{-2\pi i x \xi} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \overline{\hat{f}(\xi)} e^{-2\pi i x \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} \check{f}(\xi) e^{-2\pi i x \xi} d\xi, \end{aligned}$$

woraus sich mit (2.25) schließlich

$$\|\hat{f}\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{f(x)} dx = \langle f, f \rangle_{L^2} = \|f\|_2^2 \quad (2.26)$$

ergibt. Wurzelziehen beider Seiten von (2.26) liefert die Behauptung.

Kapitel 3

Unschärfe in der Fourier-Analysis

Der Begriff der Unschärfe wird in der Regel mit unscharfem Sehen oder mit unscharfen Bildern assoziiert. In den Naturwissenschaften verbindet man mit ihm auch die auf W. Heisenberg²⁰ zurückgehende Heisenbergsche Unschärferelation. Doch was hat Unschärfe mit der Mathematik, konkret mit der Fourier-Analysis, zu tun?

In diesem Kontext bezeichnet Unschärfe den Tradeoff zwischen Eigenschaften einer Funktion und Eigenschaften ihrer Fourier-Transformierten. Dieser Tradeoff wurde 1932 erstmals von N. Wiener²¹ während einer Vorlesung in Göttingen dargelegt, jedoch nicht schriftlich festgehalten [FS97]. Die Verschriftlichung Wieners Worte erfolgte im Jahre 1933 durch seinen Lehrer und Mentor [Wie64] G. Hardy²²:

„A pair of transforms f and g cannot both be very small.“ [Har33]
– Wiener, 1932 / Hardy, 1933

Aus dem Artikel von Hardy [Har33] geht hervor, dass es sich bei der in obigem Zitat nicht näher spezifizierten Transformation um die Fourier-Transformation handelt. In der Literatur wird dieser Zusammenhang oft als Meta-Theorem der harmonischen Analysis bezeichnet und folgendermaßen formuliert:

„A nonzero function and its Fourier transform cannot both be sharply localized.“ [FS97]

Dabei führen verschiedene Interpretationen des Begriffs *localized* zu einer Vielzahl an Sätzen, die Aussagen über Eigenschaften einer Funktion und Eigenschaften ihrer Fourier-Transformierten treffen – also zu einer Vielzahl an Unschärfeprinzipien. Dieses Kapitel widmet sich zwei dieser Unschärfeprinzipien, wobei jedes eine andere Interpretation des Begriffs *localized* bereithält.

²⁰ Werner Karl Heisenberg (1901–1976), deutscher Physiker.

²¹ Norbert Wiener (1894–1964), US-amerikanischer Mathematiker und Philosoph.

²² Godfrey Harold Hardy (1877–1947), britischer Mathematiker.

3.1 Simultane Kompaktheit der Träger von f und $\hat{f}$

Unser erstes Unschärfeprinzip besagt, dass eine glatte Funktion und ihre Fourier-Transformierte nur dann beide kompakten Träger besitzen können, wenn die Funktion die konstante Null-Funktion ist. Hier wird der Begriff *localized* als Wirkungsbereich einer Funktion interpretiert, da per Definition eine Funktion nur auf ihrem Träger *aktiv* ist. Somit können gemäß des Meta-Theorems aus der Vorbemerkung eine nichttriviale glatte Funktion und ihre Fourier-Transformierte nicht beide nur auf einem kompakten Bereich *aktiv* sein.

Wir wollen unser erstes Unschärfeprinzip in folgendem Satz festhalten, der in [SS03b, S. 167] als Übungsaufgabe gestellt wird.

Satz 3.1.1 (Unschärfe in der Kompaktheit der Träger).

Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Hat $\hat{f}$ kompakten Träger, so gilt $f \equiv 0$.

Beweis.

Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. Nach Beispiel 1.2.4 i) ist f als glatte Funktion mit kompaktem Träger insbesondere eine Schwartz-Funktion, sodass die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ von f existiert.

Sei der Träger von $\hat{f}$ kompakt. Da f eine auf $\mathbb{R}$ glatte Funktion mit kompaktem Träger ist, kann $\hat{f}$ nach Lemma 2.1.3 zu einer ganzen Funktion $\tilde{f}$ fortgesetzt werden. Diese Fortsetzung ist nach Lemma 2.1.5 beschränkt, also nach dem aus der Funktionentheorie bekannten Satz von Liouville²³ als beschränkte ganze Funktion konstant. Da der Träger von $\hat{f}$ kompakt ist, besitzt $\hat{f}$ auf $\mathbb{R}$ Nullstellen, sodass wegen $\tilde{f}|_{\mathbb{R}} = \hat{f}$ auch $\tilde{f}$ Nullstellen besitzt, weshalb für den Funktionswert von $\tilde{f}$ nur 0 in Frage kommt. Daraus folgt $\tilde{f} \equiv 0$ auf $\mathbb{C}$, also insbesondere $\tilde{f} \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$ und somit $\hat{f} \equiv 0$. Da die Fourier-Transformation gemäß Lemma 2.3.3 auf $S(\mathbb{R})$ bijektiv ist, folgt daraus $f \equiv 0$. $\square$

3.2 Punktuelle Konzentration von f und $\hat{f}$

Während es sich bei dem Unschärfeprinzip aus Abschnitt 3.1 um eine qualitative Aussage handelt, wollen wir uns in diesem Abschnitt einem quantitativen Unschärfeprinzip widmen, das in [FS97] als „Heisenberg-Ungleichung“ bezeichnet wird. Heisenbergs ursprüngliche Formulierung in [Hei27] war dabei zunächst von rein qualitativer Natur. Erst mit [Ken27] und [Wey27] erschienen wenige Monate nach Veröffentlichung von [Hei27] zwei Artikel, in denen E. Kennard²⁴

²³ Joseph Liouville (1809–1882), französischer Mathematiker.

²⁴ Earle Hesse Kennard (1885–1968), US-amerikanischer Physiker.

und H. Weyl²⁵ Heisenbergs Aussage unabhängig voneinander mit Hilfe der Fourier-Analyse mathematisch präzisierten und bewiesen. Diese Version nach Kennard und Weyl wollen wir im folgenden Satz als unser zweites Unschärfeprinzip festhalten. Auf die ursprüngliche Formulierung nach Heisenberg werden wir in Kapitel 4 näher eingehen und mit ihrer Hilfe erkennen, dass hier der Begriff *localized* als Konzentration einer Funktion um einen bestimmten Punkt interpretiert wird.

Der Beweis des folgenden Satzes wurde nach [FS97] geführt, wobei dort quadratintegrierbare Funktionen betrachtet werden und wir uns wieder auf Schwartz-Funktionen beschränken wollen.

Satz 3.2.1 (Kennard [Ken27]/Weyl [Wey27], 1927).

Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt

$$\|xf(x)\|_2 \|\xi \hat{f}(\xi)\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2 \quad (3.1)$$

für alle $x, \xi \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Seien $f \in S(\mathbb{R})$ mit Fourier-Transformierter $\hat{f} \in S(\mathbb{R})$ und $x, \xi \in \mathbb{R}$. Dann ist f als Schwartz-Funktion nach Lemma 1.2.10 insbesondere quadratintegrierbar und es gilt

$$\|f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx.$$

Partielle Integration liefert

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} 1 \cdot |f(x)|^2 dx = [x|f(x)|^2]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} x \left(\frac{d}{dx} |f(x)|^2 \right) dx. \quad (3.2)$$

Nach Lemma 1.2.9 ii) verschwindet in (3.2) der linke Summand. Wegen der Identität $|z|^2 = z\bar{z}$ auf $\mathbb{C}$ lässt sich das verbleibende Integral mit der Produktregel für Ableitungen umschreiben zu

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}} x \left(\frac{d}{dx} |f(x)|^2 \right) dx &= - \int_{\mathbb{R}} x \left(\frac{d}{dx} f(x) \overline{f(x)} \right) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} x \left(f(x) \overline{f'(x)} + f'(x) \overline{f(x)} \right) dx, \end{aligned}$$

²⁵ Hermann Klaus Hugo Weyl (1885–1955), deutscher Mathematiker, Physiker und Philosoph.

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass sich Differentiation und komplexe Konjugation vertauschen lassen. Wegen

$$f'(x)\overline{f(x)} = \overline{f(x)}f'(x) = \overline{f(x)\overline{f'(x)}}$$

und da $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$ auf $\mathbb{C}$ gilt, ist

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R}} x \left(f(x)\overline{f'(x)} + f'(x)\overline{f(x)} \right) dx &= - \int_{\mathbb{R}} x \left(2 \operatorname{Re}(f(x)\overline{f'(x)}) \right) dx \\ &= -2 \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x)\overline{f'(x)} dx \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Durch Einsetzen von (3.3) in (3.2) ergibt sich

$$\|f\|_2^2 = \left[x|f(x)|^2 \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} x \left(\frac{d}{dx} |f(x)|^2 \right) dx = -2 \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x)\overline{f'(x)} dx \right).$$

Da $\|f\|_2^2$ nichtnegativ ist, folgt daraus

$$\|f\|_2^2 = 2 \left| \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x)\overline{f'(x)} dx \right) \right| \leq 2 \left| \int_{\mathbb{R}} x f(x)\overline{f'(x)} dx \right|, \quad (3.4)$$

wobei in der letzten Abschätzung $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ für $z \in \mathbb{C}$ verwendet wurde. Da nach Korollar 1.2.7 der Schwartz-Raum abgeschlossen unter Differentiation und Multiplikation mit Polynomen ist, sind mit f auch xf und f' Schwartz-Funktionen, sodass sich mit der Cauchy-Bunyakovskiï-Schwarz-Ungleichung aus Korollar 1.1.4 die Abschätzung

$$2 \left| \int_{\mathbb{R}} x f(x)\overline{f'(x)} dx \right| \leq 2 \|xf(x)\|_2 \|f'(x)\|_2 \quad (3.5)$$

ergibt. Nach dem Satz von Plancherel (Lemma 2.2.11) und Lemma 2.2.2 gilt

$$\|f'(x)\|_2 = \|(\widehat{f'})(\xi)\|_2 = \|2\pi i \xi \hat{f}(\xi)\|_2 = 2\pi \|\xi \hat{f}(\xi)\|_2,$$

was eingesetzt in (3.5) zusammen mit (3.4) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &\leq 2 \|xf(x)\|_2 \|f'(x)\|_2 = 2 \|xf(x)\|_2 \cdot 2\pi \|\xi \hat{f}(\xi)\|_2 \\ &= 4\pi \|xf(x)\|_2 \|\xi \hat{f}(\xi)\|_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

ergibt. Division beider Seiten von (3.6) durch 4π liefert die Behauptung. $\square$

Bemerkung 3.2.2.

Nach [FS97] gilt Satz 3.2.1 nicht nur für Funktionen in $S(\mathbb{R})$, sondern für alle Funktionen in $L^2(\mathbb{R})$ und auch für Funktionen in $L^2(\mathbb{R}^n)$. Der Beweis des mehrdimensionalen Falls kann beispielsweise in [Ben90] nachgelesen werden.

Auch im Kontext von Satz 3.2.1 spielen Gauß-Funktionen eine entscheidende Rolle. In der nächsten Proposition werden wir sehen, dass Gauß-Funktionen die einzigen Funktionen sind, für die in der Heisenberg-Ungleichung aus Satz 3.2.1 Gleichheit gilt. Um dies zu zeigen, werden wir – wie in [FS97] vorgeschlagen, jedoch dort nicht weiter ausgeführt – eine Differentialgleichung lösen. Dafür setzen wir grundlegende Kenntnisse der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen voraus, wie sie im Grundstudium vermittelt werden.

Proposition 3.2.3.

Gleichheit in Satz 3.2.1 gilt genau dann, wenn f von der Form

$$f(x) = A \exp(-Bx^2), \text{ mit } A \in \mathbb{C} \text{ und } B > 0$$

ist, also genau dann, wenn f eine Gauß-Funktion ist.

Beweis.

Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Für den Gleichheitsfall in Satz 3.2.1 muss in den Ungleichungen (3.4) und (3.5) Gleichheit gelten, also

$$\left| \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right) \right| = \left| \int_{\mathbb{R}} x f(x) \overline{f'(x)} dx \right| = \|x f(x)\|_2 \|f'(x)\|_2. \quad (3.7)$$

Fordern wir in (3.7) zunächst die linke Gleichheit. Da auf $S(\mathbb{R})$ für $f, g \in S(\mathbb{R})$ durch $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx \in \mathbb{C}$ ein Skalarprodukt gegeben ist, ist die linke Gleichheit in (3.7) äquivalent zu $|\operatorname{Re} \langle x f, f' \rangle| = |\langle x f, f' \rangle|$. Da für $z \in \mathbb{C}$ aber $|z| = |\operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z)|$ gilt, gilt $|z| = |\operatorname{Re}(z)|$ genau dann, wenn der Imaginärteil von z verschwindet, also genau dann, wenn z reell ist. Somit ist in (3.7) die linke Gleichheit genau dann erfüllt, wenn $\langle x f, f' \rangle \in \mathbb{R}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Fordern wir nun unter dieser Voraussetzung in (3.7) die rechte Gleichheit, die aus der Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwarz-Ungleichung (Korollar 1.1.4) resultierte. Da in der Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwarz-Ungleichung genau dann Gleichheit gilt, wenn die beteiligten Terme linear abhängig sind, gilt in (3.7) genau dann die rechte Gleichheit, wenn f' ein Vielfaches von $x f$ ist, d. h. genau dann, wenn

$$f'(x) = c x f(x) \quad (3.8)$$

für ein $c \in \mathbb{C}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Einsetzen von f' aus (3.8) in $\langle x f, f' \rangle$ ergibt

$$\langle x f(x), f'(x) \rangle = \langle x f(x), c x f(x) \rangle = \bar{c} \cdot \langle x f(x), x f(x) \rangle = \bar{c} \cdot \|x f(x)\|_2^2. \quad (3.9)$$

Da aber nach Voraussetzung $\langle xf, f' \rangle$ reell ist, folgt aus (3.9), dass in (3.8) die Konstante c schon reell gewesen sein muss.

Bei (3.8) handelt es sich um eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten. Wir setzen $y := f(x)$ und lösen für $c \in \mathbb{R}$ die Differentialgleichung $y' = cxy$ durch eine Trennung der Variablen. Es ergibt sich

$$\int \frac{1}{y} dy = \int cx \, dx,$$

also

$$\ln |y| + c_1 = \frac{1}{2}cx^2 + c_2, \quad (3.10)$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. Mit $\tilde{c} := c_2 - c_1 \in \mathbb{C}$ und $\tilde{B} := c/2 \in \mathbb{R}$ ergibt sich nach Anwendung der Exponentialfunktion auf beiden Seiten der Gleichung (3.10)

$$y = \exp(\tilde{B}x^2 + \tilde{c}).$$

Wir setzen $A := \exp(\tilde{c})$ und $B := -\tilde{B}$ und erhalten somit durch

$$f(x) = A \exp(-Bx^2)$$

die Lösung der Differentialgleichung (3.8), wobei $A \in \mathbb{C}$ und $B > 0$, da f als Schwartz-Funktion schnell fallend ist (vgl. Beispiel 1.2.4 ii)). $\square$

Bemerkung 3.2.4.

Wird in Satz 3.2.1 zusätzlich $\|f\|_2^2 = 1$ gefordert, ergibt sich nach [SS03b] für den Gleichheitsfall in Proposition 3.2.3 für $A \in \mathbb{C}$ die stärkere Bedingung $|A|^2 = \sqrt{2B/\pi}$. Denn für $f(x) = A \exp(-Bx^2)$ ist

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |A \exp(-Bx^2)|^2 dx \\ &= |A|^2 \int_{\mathbb{R}} \exp(-2Bx^2) dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2B}}, \end{aligned}$$

sodass $\|f\|_2^2 = 1$ genau dann gilt, wenn $|A|^2 = \sqrt{2B/\pi}$ gilt.

Das Unschärfeprinzip aus Satz 3.2.1 lässt sich auf verschiedene Weisen verallgemeinern. Eine mögliche Verallgemeinerung wollen wir im nächsten Korollar festhalten. Diese und viele weitere Verallgemeinerungen finden sich in [FS97]. Der Beweis des nächsten Korollars nach [FS97] verwendet die Hölder-Ungleichung

aus Lemma 1.1.2 und die Hausdorff²⁶-Young²⁷-Ungleichung, die beispielsweise in [Wer18] nachgelesen werden kann.

Korollar 3.2.5.

Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt

$$\|xf(x)\|_p \|\xi \hat{f}(\xi)\|_p \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2$$

für alle $x, \xi \in \mathbb{R}$ und $1 \leq p \leq 2$.

Beweis.

Seien $f \in S(\mathbb{R})$ und $1 \leq p \leq 2$. Sei q der konjugierte Exponent zu p . Wie im Beweis von Satz 3.2.1 in (3.4) gezeigt, gilt $\|f\|_2^2 \leq 2 \left| \int_{\mathbb{R}} xf(x) \overline{f'(x)} dx \right|$. Nach Korollar 1.2.7 sind mit f auch xf und f' Schwartz-Funktionen. Aus $f' \in S(\mathbb{R})$ folgt leicht, dass auch $\overline{f'}$ eine Schwartz-Funktion ist, sodass auf $xf \in L^p(\mathbb{R})$ und $\overline{f'} \in L^q(\mathbb{R})$ die Hölder-Ungleichung angewendet werden kann. Nach dieser gilt

$$\|xf(x) \overline{f'(x)}\|_1 \leq \|xf(x)\|_p \|\overline{f'(x)}\|_q = \|xf(x)\|_p \|f'(x)\|_q.$$

Unter Verwendung von $[\mathcal{F}\mathcal{F}f](x) = f(-x)$, als direkte Folgerung aus (2.22), liefert die Hausdorff-Young-Ungleichung die Abschätzung

$$\|f(x)\|_q = \|f(-x)\|_q = \|[\mathcal{F}\mathcal{F}f](x)\|_q \leq \|[\mathcal{F}f](\xi)\|_p = \|\hat{f}(\xi)\|_p.$$

Die obigen Vorüberlegungen und Lemma 2.2.2 ergeben zusammen

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &\leq 2 \left| \int_{\mathbb{R}} xf(x) \overline{f'(x)} dx \right| \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |xf(x) \overline{f'(x)}| dx = 2 \|xf(x) \overline{f'(x)}\|_1 \\ &\leq 2 \|xf(x)\|_p \|f'(x)\|_q \leq 2 \|xf(x)\|_p \|(\widehat{f'})(\xi)\|_p = 2 \|xf(x)\|_p \|2\pi i \xi \hat{f}(\xi)\|_p \\ &= 2 \|xf(x)\|_p 2\pi \|\xi \hat{f}(\xi)\|_p = 4\pi \|xf(x)\|_p \|\xi \hat{f}(\xi)\|_p \end{aligned} \quad (3.11)$$

für alle $x, \xi \in \mathbb{R}$. Division beider Seiten von (3.11) durch 4π liefert die Behauptung. $\square$

Abschließen wollen wir dieses Kapitel mit einer zu (3.1) äquivalenten Darstellung aus [SS03b], verzichten aber auf die dort gestellte Voraussetzung $\|f\|_2^2 = 1$.

²⁶ Felix Hausdorff (1868–1942), deutscher Mathematiker.

²⁷ William Henry Young (1863–1942), englischer Mathematiker.

Korollar 3.2.6.

Für $f \in S(\mathbb{R})$ gilt

$$\|(x - x_0)f(x)\|_2 \|(\xi - \xi_0)\hat{f}(\xi)\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2$$

für alle $x, x_0, \xi, \xi_0 \in \mathbb{R}$.

Beweis.

Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Seien $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$ und $g(x) := e^{-2\pi i \xi_0 x} f(x + x_0)$ wie in [SS03b]. Nach Lemma 1.2.8 ist mit f auch g eine Schwartz-Funktion. Für die Fourier-Transformierte von g ergibt sich mit Proposition 2.2.1 ii) und iii)

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \left[\mathcal{F} \left(e^{-2\pi i \xi_0 x} f(x + x_0) \right) \right] (\xi) = [\mathcal{F}(f(x + x_0))] (\xi + \xi_0) \\ &= e^{2\pi i x_0 \xi} [\mathcal{F}(f(x))] (\xi + \xi_0) = e^{2\pi i x_0 \xi} \hat{f}(\xi + \xi_0) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} \|xg(x)\|_2 \|\xi \hat{g}(\xi)\|_2 &= \|x(e^{-2\pi i \xi_0 x} f(x + x_0))\|_2 \|\xi(e^{2\pi i x_0 \xi} \hat{f}(\xi + \xi_0))\|_2 \\ &= \|(x - x_0)(e^{-2\pi i \xi_0(x - x_0)} f(x))\|_2 \|(\xi - \xi_0)(e^{2\pi i x_0(\xi - \xi_0)} \hat{f}(\xi))\|_2 \\ &= |e^{-2\pi i \xi_0(x - x_0)}| |e^{2\pi i x_0(\xi - \xi_0)}| \|(x - x_0)f(x)\|_2 \|(\xi - \xi_0)\hat{f}(\xi)\|_2 \\ &= \|(x - x_0)f(x)\|_2 \|(\xi - \xi_0)\hat{f}(\xi)\|_2. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Außerdem ist

$$\|g\|_2^2 = \|e^{-2\pi i \xi_0 x} f(x + x_0)\|_2^2 = \|e^{-2\pi i \xi_0(x - x_0)} f(x)\|_2^2 = \|f\|_2^2. \tag{3.13}$$

Nach Satz 3.2.1 gilt für $g \in S(\mathbb{R})$ aber

$$\|xg(x)\|_2 \|\xi \hat{g}(\xi)\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|g\|_2^2, \tag{3.14}$$

sodass Einsetzen von (3.12) und (3.13) in (3.14) die Behauptung

$$\|(x - x_0)f(x)\|_2 \|(\xi - \xi_0)\hat{f}(\xi)\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2$$

liefert. □

Kapitel 4

Unschärfe in der Physik

In diesem Kapitel wollen wir Korollar 3.2.6 mit Hilfe von [SS03b] und [Gri12] aus quantenmechanischer Sicht betrachten und erinnern uns, dass [FS97] den dem Korollar zugrundeliegenden Satz 3.2.1 als „Heisenberg-Ungleichung“ bezeichnet. Im nächsten Abschnitt wird sich herausstellen, dass Korollar 3.2.6 Auskunft darüber gibt, inwieweit Ort und Impuls eines Teilchens gleichzeitig bestimmt werden können, wodurch sich der Zusammenhang zwischen Satz 3.2.1 und der Heisenbergschen Unschärferelation erkennen lässt. Darüber hinaus werden wir die Quantenmechanik im Rahmen der Theorie selbstadjungierter Operatoren betrachten, durch die sich messbare Größen eines physikalischen Systems beschreiben lassen – ein Zugang, der auf die Arbeiten von J. von Neumann²⁸ [Von18] zurückgeht.

Da es sich bei der vorliegenden Arbeit um keine physikalische Arbeit handelt, sondern primär das Aufzeigen der Fourier-Analysis in der Physik im Fokus steht, werden die physikalischen Inhalte dieses Kapitels nur oberflächlich behandelt.

4.1 Von der Fourier-Analysis zu Heisenberg

Betrachten wir ein Teilchen, das sich entlang der reellen Achse bewegt. Der Zustand dieses Teilchens zu einer bestimmten Zeit wird durch eine komplexwertige Wellenfunktion ψ beschrieben, deren Betragsquadrat $|\psi|^2$ als die „Wahrscheinlichkeitsdichte für den zeitlich veränderlichen Aufenthaltsort des Teilchens“ [Nol13] interpretiert wird, d. h. die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt am Ort x zu finden, ist durch $|\psi(x)|^2$ gegeben.

Diese statistische Interpretation der Wellenfunktion geht nach [Gri12] auf M. Born²⁹ zurück und ist möglich, da ψ zwar komplexwertig, aber durch $|\psi|^2$ eine

²⁸ John von Neumann (1903–1957), ungarischer Mathematiker.

²⁹ Max Born (1882–1970), deutscher Mathematiker und Physiker.

reellwertige, nichtnegative Funktion gegeben ist. Als Wahrscheinlichkeitsdichte ist $|\psi|^2$ normiert, d.h. es gilt $\int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = 1$. Da die Wahrscheinlichkeit dafür, ein Teilchen zu einem bestimmten Zeitpunkt in einer Menge $A \subset \mathbb{R}$ zu finden, durch $\int_A |\psi(x)|^2 dx$ gegeben ist, garantiert die Normiertheit von $|\psi|^2$, dass das Teilchen sich zu jedem Zeitpunkt irgendwo auf der reellen Achse befindet. Außerdem folgt aus ihr die Notwendigkeit, dass $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ sein muss, wobei wir auch hier wieder von $\psi \in S(\mathbb{R})$ ausgehen.

Für die erwartete Position x_0 des Teilchens gilt $x_0 = \int_{\mathbb{R}} x |\psi(x)|^2 dx$. Die durchschnittliche Abweichung der Position des Teilchens von x_0 ist gegeben durch die Varianz, die in [SS03b] als „die mit unserer Erwartung verbundene Unsicherheit“ bezeichnet wird und die gegeben ist durch

$$\sigma_P^2 := \int_{\mathbb{R}} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx.$$

Die Wellenfunktion des Impulses entspricht der Fourier-Transformierten der Wellenfunktion des Ortes des Teilchens, ist also durch $\hat{\psi}$ gegeben. Analog zu den Überlegungen bzgl. der Position des Teilchens ergibt sich bzgl. seines Impulses

$$\sigma_I^2 := \int_{\mathbb{R}} (\xi - \xi_0)^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Die Tatsache, dass die Wellenfunktion des Impulses der Fourier-Transformierten der Wellenfunktion des Ortes entspricht, erlaubt es, dass wenn Aussagen über eine Funktion und ihre Fourier-Transformierte möglich sind, diese Aussagen auf den Ort und den Impuls eines Teilchens übertragen werden können. Somit kann Korollar 3.2.6 auf die hier vorliegende Situation angewendet werden. Laut diesem gilt

$$\|(x - x_0)f(x)\|_2 \|(\xi - \xi_0)\hat{f}(\xi)\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2,$$

woraus sich durch Quadrieren beider Seiten

$$\|(x - x_0)f(x)\|_2^2 \|(\xi - \xi_0)\hat{f}(\xi)\|_2^2 \geq \frac{1}{16\pi^2} \|f\|_2^4$$

ergibt. Ausschreiben der Normen und Einsetzen der Wellenfunktionen liefert

$$\int_{\mathbb{R}} |x - x_0|^2 |\psi(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} |\xi - \xi_0|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{1}{16\pi^2} \|\psi\|_2^4.$$

Mit der Normiertheit von ψ folgt daraus

$$\int_{\mathbb{R}} |x - x_0|^2 |\psi(x)|^2 dx \int_{\mathbb{R}} |\xi - \xi_0|^2 |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \geq \frac{1}{16\pi^2} \cdot 1,$$

also gemäß der obigen Definitionen der Varianzen

$$\sigma_P^2 \cdot \sigma_I^2 \geq \frac{1}{16\pi^2} . \quad (4.1)$$

Das Produkt der Varianzen von Ort und Impuls eines Teilchens ist also durch die Konstante $1/16\pi^2$ nach unten beschränkt.

Eine aus der Literatur besser bekannte untere Schranke ist durch $\hbar^2/4$ gegeben, wobei $\hbar := h/2\pi$ und $h = 6,62607015 \cdot 10^{-34} \text{Js}$ das auf M. Planck³⁰ zurückgehende *Plancksche Wirkungsquantum* bezeichnet. Ignoriert man die Einheiten, so gilt

$$\frac{\hbar^2}{4} = \frac{h^2}{4 \cdot 4\pi^2} = \frac{h^2}{16\pi^2} < \frac{1}{16\pi^2} ,$$

woraus sich mit (4.1) direkt

$$\sigma_P^2 \cdot \sigma_I^2 \geq \frac{1}{16\pi^2} > \frac{\hbar^2}{4}$$

und somit die aus der Literatur bekannte, quantitative Formulierung

$$\sigma_P^2 \cdot \sigma_I^2 \geq \frac{\hbar^2}{4} \quad (4.2)$$

ergibt. Es herrscht also ein Tradeoff zwischen den Varianzen von Ort und Impuls eines Teilchens. Je kleiner die eine ist, desto größer muss die andere sein, damit ihr Produkt die untere Schranke nicht unterschreitet. Sehen wir die Varianz als Maß für die Konzentration um den Erwartungswert, also als *Unsicherheit* an, folgt aus dem Tradeoff, dass je sicherer wir uns bzgl. des Ortes eines Teilchens sind, desto weniger sicher können wir uns bzgl. seines Impulses sein – und vice versa.

Diese Aussage geht auf W. Heisenberg zurück und wurde von ihm qualitativ als

$$\sigma_P^2 \cdot \sigma_I^2 \sim h^2 \quad (4.3)$$

in [Hei27] festgehalten, wobei wir seine ursprüngliche Notation an unsere Notation aus (4.2) angepasst haben. Die Relation in (4.3) ist als *Heisenbergsche Unschärferelation* bekannt und sagt, dass „kanonisch konjugierte Größen [z. B. Ort und Impuls] simultan nur mit einer charakteristischen Ungenauigkeit bestimmt werden können“ [Hei27].

³⁰ Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858–1947), deutscher Physiker.

4.2 Unschärfe und Nichtkommutativität: Der Zugang über Operatoren

„Die Quantenmechanik basiert auf zwei Konstruktionen: Den Wellenfunktionen und den Operatoren“ [Gri12]. Nachdem wir im letzten Abschnitt Wellenfunktionen betrachtet und mit diesen Fourier-Analyse betrieben haben, wollen wir uns in diesem Abschnitt mit selbstadjungierten Operatoren auf Hilberträumen beschäftigen, durch die nach [Lew24] sogenannte *Observablen* dargestellt werden. Bei Observablen handelt es sich um experimentell messbare Größen eines Systems, wie beispielsweise Energie, Ort und Impuls.

Die meisten in der Praxis wichtigen physikalischen Größen basieren auf unbeschränkten Operatoren. Während für beschränkte Operatoren Selbstadjungiertheit und Symmetrie äquivalent sind, ist die Selbstadjungiertheit eines unbeschränkten Operators zusätzlich von seinem Definitionsbereich abhängig. Paare von Observablen lassen sich anhand des Kommutators ihrer Operatoren klassifizieren. Dabei ist der *Kommutator* $[A, B]$ zweier Operatoren A und B durch

$$[A, B] := AB - BA$$

definiert. Sind $\mathcal{D}(A)$ und $\mathcal{D}(B)$ die Definitionsbereiche von A und B , so ist der Definitionsbereich ihres Kommutators per Definition gegeben durch

$$\mathcal{D}([A, B]) = \mathcal{D}(AB) \cap \mathcal{D}(BA),$$

wobei

$$\mathcal{D}(AB) = \{u \in \mathcal{D}(B) : Bu \in \mathcal{D}(A)\}$$

und

$$\mathcal{D}(BA) = \{u \in \mathcal{D}(A) : Au \in \mathcal{D}(B)\}.$$

Insbesondere gilt also

$$\mathcal{D}([A, B]) \subset \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B).$$

Zwei Observablen heißen *inkompatibel*, wenn ihre Operatoren A und B nicht kommutieren, d. h. wenn $[A, B] \neq 0$ gilt. Die Messergebnisse solcher Observablen hängen von der Messreihenfolge ab – ein typisches Phänomen der nichtkommutativen *Quantenwelt*, im Gegensatz zur kommutativen *klassischen Welt*. Einen Spezialfall inkompatibler Observablen stellen Observablen dar, für deren Operatoren $[A, B] = i\hbar$ gilt, wobei in diesem Fall A und B unbeschränkt sind [Win47]. Solche Paare von Observablen werden *kanonisch konjugiert* genannt [Mor13]. Von kanonisch konjugierten Größen war bereits im letzten Abschnitt im Zusammenhang mit der Heisenbergschen Unschärferelation die Rede.

Nach [Gri12] gibt es für jedes Paar inkompatibler Observablen eine Unschärfere-
lation, aber nach [Mor13] erfüllt nicht jedes Paar inkompatibler Observablen die
Heisenbergsche Unschärfere-lation. Daraus ergeben sich zwei Fragen: Kann eine
einheitliche Unschärfere-lation für alle Paare inkompatibler Größen formuliert
werden? Erfüllt jedes Paar kanonisch konjugierter Größen die Heisenbergsche
Unschärfere-lation? Beide Fragen können mit *Ja* beantwortet werden.

Um in diesem Kontext über Unschärfe bzw. über Unsicherheiten sprechen zu
können, definieren wir gemäß [Str94] den Erwartungswert einer Observablen
eines Teilchens im Zustand ψ durch

$$\langle A \rangle_\psi := \langle A\psi, \psi \rangle$$

und ihre Varianz durch

$$\text{Var}_\psi(A) := \langle (A - \langle A \rangle_\psi)\psi, (A - \langle A \rangle_\psi)\psi \rangle = \|(A - \langle A \rangle_\psi)\psi\|^2,$$

wobei A der selbstadjungierte Operator der Observablen ist.

Nach [FS97] gibt es für jedes Paar inkompatibler Observablen im Zustand ψ eine
nichttriviale, echt positive untere Schranke für das Produkt ihrer Unsicherheiten.
Diese Aussage geht auf H. Robertson³¹ zurück und beantwortet unsere erste
Frage, weshalb wir sie in einem Satz festhalten wollen.

Satz 4.2.1 (Robertson [Rob29], 1929).

Für selbstadjungierte Operatoren A, B und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt

$$\|(A - \alpha)\psi\| \|(B - \beta)\psi\| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B]\psi, \psi \rangle| \quad (4.4)$$

für alle $\psi \in \mathcal{D}([A, B])$.

Beweis.

Seien A, B selbstadjungierte Operatoren und sei $\psi \in \mathcal{D}([A, B])$. Wie in [FS97]
gehen wir wegen $[(A - \alpha), (B - \beta)] = [A, B]$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ von $\alpha = \beta = 0$
aus. Es gilt

$$\begin{aligned} |\langle [A, B]\psi, \psi \rangle| &= |\langle AB\psi - BA\psi, \psi \rangle| = |\langle AB\psi, \psi \rangle - \langle BA\psi, \psi \rangle| \\ &= |\langle B\psi, A\psi \rangle - \langle A\psi, B\psi \rangle| = |\langle A\psi, B\psi \rangle - \overline{\langle A\psi, B\psi \rangle}| \\ &= |2i \text{Im} \langle A\psi, B\psi \rangle| = 2 |\text{Im} \langle A\psi, B\psi \rangle| \leq 2 |\langle A\psi, B\psi \rangle| \\ &\leq 2 \|A\psi\| \|B\psi\|, \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei im letzten Schritt die Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwarz-Ungleichung (Korol-
lar 1.1.4) verwendet wurde. Division beider Seiten von (4.5) durch 2 liefert die
Behauptung. $\square$

³¹ Howard Percy Robertson (1903–1961), US-amerikanischer Mathematiker und Physiker.

Für kompatible Observablen-Paare ist die untere Schranke in Satz 4.2.1 trivial, da für die Operatoren solcher Paare $[A, B] = 0$ gilt³².

Um unsere zweite Frage zu beantworten, ziehen wir aus dem letzten Satz ein Korollar. Dieses Korollar zeigt die bereits in Abschnitt 4.1 zitierte Aussage von W. Heisenberg, dass „kanonisch konjugierte Größen simultan nur mit einer charakteristischen Ungenauigkeit bestimmt werden können“ [Hei27].

Korollar 4.2.2 (Heisenberg [Hei27], 1927).

Für selbstadjungierte Operatoren A und B eines kanonisch konjugierten Observablen-Paars gilt

$$\mathrm{Var}_\psi(A) \mathrm{Var}_\psi(B) \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

für alle Wellenfunktionen $\psi \in \mathcal{D}([A, B])$.

Beweis.

Für selbstadjungierte Operatoren A, B und Wellenfunktionen $\psi \in \mathcal{D}([A, B])$ gilt

$$\|(A - \langle A \rangle_\psi)\psi\| \|(B - \langle B \rangle_\psi)\psi\| \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B]\psi, \psi \rangle|$$

nach Satz 4.2.1. Da das durch A und B beschriebene Observablen-Paar kanonisch konjugiert ist, gilt $[A, B] = i\hbar$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\psi(A) \mathrm{Var}_\psi(B) &= \|(A - \langle A \rangle_\psi)\psi\|^2 \|(B - \langle B \rangle_\psi)\psi\|^2 \geq \frac{1}{4} |\langle [A, B]\psi, \psi \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{4} |i\hbar \langle \psi, \psi \rangle|^2 = \frac{\hbar^2}{4} \|\psi\|^4 \end{aligned}$$

und die Normiertheit der Wellenfunktion liefert

$$\mathrm{Var}_\psi(A) \mathrm{Var}_\psi(B) \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

□

Abschließend wollen wir nun ein konkretes Observablen-Paar betrachten. Dazu definieren wir gemäß [Hal13] für $x \in \mathbb{R}$ den Orts-Operator P als

$$P: \mathcal{D}(P) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (P\psi)(x) = x\psi(x)$$

auf

$$\mathcal{D}(P) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid x\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})\}$$

³² Wir werden in Abschnitt 5.3 sehen, dass die (zustandsabhängige) untere Schranke in Satz 4.2.1 nicht nur in diesem Fall trivial ist.

und den Impuls-Operator T als

$$T: \mathcal{D}(T) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), \quad (T\psi)(\xi) = -i\hbar\psi'(\xi)$$

auf

$$\mathcal{D}(T) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \xi\hat{\psi}(\xi) \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Nach [Hal13] sind P und T selbstadjungiert.

Für $\psi \in \mathcal{D}([P, T]) \subset \mathcal{D}(P) \cap \mathcal{D}(T)$ gilt

$$\begin{aligned} [P, T]\psi(x) &= (P(T\psi))(x) - (T(P\psi))(x) = (P(-i\hbar\psi'))(x) - (T(x\psi))(x) \\ &= -i\hbar x\psi'(x) - (-i\hbar(\psi(x) + x\psi'(x))) \\ &= -i\hbar x\psi'(x) + i\hbar\psi(x) + i\hbar x\psi'(x) \\ &= i\hbar\psi(x), \end{aligned}$$

woraus sich für den Kommutator $[P, T] = i\hbar$ ergibt. Bei Ort und Impuls handelt es sich also um kanonisch konjugierte Observablen.

Demnach sind Orts- und Impuls-Operator selbstadjungierte Operatoren eines kanonisch konjugierten Observablen-Paars, sodass aus Korollar 4.2.2 insbesondere die aus der Literatur bekannte Heisenbergsche Unschärferelation

$$\text{Var}_\psi(P) \text{Var}_\psi(T) \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

für alle Wellenfunktionen $\psi \in \mathcal{D}([P, T])$ folgt.

Um den Bogen zur Fourier-Analyse zu schlagen, wollen wir zum Schluss diese Aussage unter Verwendung unseres Unschärfeprinzips aus Satz 3.2.1 beweisen, wobei wir wieder von dessen Darstellung aus Korollar 3.2.6 ausgehen. Das Korollar besagt, dass für eine Schwartz-Funktion $f \in S(\mathbb{R})$ die Ungleichung

$$\|(x - x_0)f(x)\|_2 \|(\xi - \xi_0)\hat{f}(\xi)\|_2 \geq \frac{1}{4\pi} \|f\|_2^2$$

für alle $x, x_0, \xi, \xi_0 \in \mathbb{R}$ gilt. Betrachten wir $\psi \in S(\mathbb{R})$ als Wellenfunktion mit $\|\psi\|_2 = 1$, so gilt für diese also

$$\|(x - x_0)\psi(x)\|_2 \|(\xi - \xi_0)\hat{\psi}(\xi)\|_2 \geq \frac{1}{4\pi}. \quad (4.6)$$

Aus der Abgeschlossenheit von $S(\mathbb{R})$ unter Multiplikation mit Polynomen und seiner Invarianz unter der Fourier-Transformation folgt $S(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}(P) \cap \mathcal{D}(T)$. Um nun die linke Seite von (4.6) mit Hilfe des Orts-Operators P und des Impuls-Operators T auszudrücken, bemerken wir zunächst, dass

$$\|(x - x_0)\psi(x)\|_2 = \|((P - x_0)\psi)(x)\|_2 \quad (4.7)$$

gilt. Aus Lemma 2.2.2 folgt

$$\xi \widehat{\psi}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \widehat{(\psi')}(\xi)$$

und aus der Definition von T folgt

$$\psi'(x) = \frac{1}{-i\hbar} (T\psi)(x).$$

Zusammen mit dem Satz von Plancherel (Lemma 2.2.11) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \|(\xi - \xi_0) \widehat{\psi}(\xi)\|_2 &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \widehat{(\psi')}(\xi) - \xi_0 \widehat{\psi}(\xi) \right\|_2 = \frac{1}{2\pi} \|\widehat{(\psi')}(\xi) - 2\pi i \xi_0 \widehat{\psi}(\xi)\|_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \|\mathcal{F}(\psi' - 2\pi i \xi_0 \psi)\|_2 = \frac{1}{2\pi} \|\psi'(x) - 2\pi i \xi_0 \psi(x)\|_2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\| \frac{1}{-i\hbar} (T\psi)(x) - 2\pi i \xi_0 \psi(x) \right\|_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \|((T - 2\hbar\pi\xi_0)\psi)(x)\|_2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Einsetzen von (4.7) mit $p_0 := x_0$ und (4.8) mit $t_0 := 2\hbar\pi\xi_0$ in (4.6) liefert

$$\|((P - p_0)\psi)(x)\|_2 \frac{1}{2\pi\hbar} \|((T - t_0)\psi)(x)\|_2 \geq \frac{1}{4\pi}$$

und somit

$$\|((P - p_0)\psi)(x)\|_2 \|((T - t_0)\psi)(x)\|_2 \geq \frac{2\pi\hbar}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \quad (4.9)$$

für alle $p_0, t_0 \in \mathbb{R}$. Da für selbstadjungierte Operatoren

$$\langle A\psi, \psi \rangle = \langle \psi, A\psi \rangle \in \mathbb{R}$$

gilt, besitzen Ort und Impuls reelle Erwartungswerte $\langle P \rangle_\psi$ und $\langle T \rangle_\psi$, die wir in (4.9) für p_0 und t_0 einsetzen können. Anschließendes Quadrieren beider Seiten ergibt

$$\|((P - \langle P \rangle_\psi)\psi)(x)\|_2^2 \|((T - \langle T \rangle_\psi)\psi)(x)\|_2^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

und somit schließlich

$$\text{Var}_\psi(P) \text{Var}_\psi(T) \geq \frac{\hbar^2}{4}.$$

Kapitel 5

Ausblick

In diesem Kapitel wollen wir einen Ausblick über weitere Unschärfeprinzipien geben, die teilweise an die Prinzipien aus den letzten Kapiteln anknüpfen werden. Des Weiteren stellen wir die zentrale Aussage einer Arbeit von A. Wigderson und Y. Wigderson und die Ergebnisse einer vor wenigen Tagen veröffentlichten Arbeit vor, die sowohl eine Verbesserung des Unschärfeprinzips nach Robertson, als auch eine Lösung eines bis dahin ungelösten Problems der Quanteninformationstheorie präsentiert.

5.1 Weitere Unschärfeprinzipien

In diesem Abschnitt wollen wir darauf aufmerksam machen, wie weitreichend das Konzept der Unschärfe innerhalb der Mathematik ist. Je nach Interpretation des Begriffs *localized* lassen sich Unschärfeprinzipien in verschiedene Klassen einteilen, von denen wir bisher nur zwei gesehen haben. Eine davon werden wir in diesem Abschnitt um zusätzliche Aussagen erweitern und im Anschluss eine neue Klasse kennenlernen. Dadurch, dass sich die Fourier-Analyse nicht auf unser Setting beschränkt, sondern auch auf anderen Strukturen, beispielsweise auf Lie-Gruppen betrieben werden kann, ergeben sich weitere Unschärfeprinzipien [Tha04]. Unschärfe wiederum beschränkt sich aber keineswegs nur auf die Fourier-Analyse – Ein weiteres großes Feld stellen entropiebasierte Unschärfereaktionen dar. Da deren Behandlung jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde, verweisen wir stattdessen auf [Hir57], [Deu83] und [MU88].

Darüber hinaus empfehlen wir für einen vertiefenden Einblick in die mathematische Vielfalt der Unschärfe einen Blick in [FS97] und [HJ94].

5.1.1 Unschärfe in der Größe der Träger

Das Unschärfeprinzip aus Abschnitt 3.1 stellt einen Spezialfall eines allgemeineren Zusammenhangs zwischen der Größe des Trägers einer Funktion und der Größe des Trägers ihrer Fourier-Transformierten dar, der auf M. Benedicks zurückgeht. Demzufolge können eine Funktion und ihre Fourier-Transformierte nur dann beide endlichen Träger besitzen, wenn die Funktion die konstante Nullfunktion ist. Nach [FS97] formulierte Benedicks diesen Zusammenhang bereits 1974 in einem Vorabdruck seiner Arbeit [Ben85], die offizielle Veröffentlichung erfolgte jedoch erst 1985. Da sich W. Amrein und A. Berthier 1977 ebenfalls diesem Zusammenhang widmeten [AB77], wird Benedicks' Unschärfeprinzip in der Literatur oft auch mit diesen beiden Namen in Verbindung gebracht.

Proposition 5.1.1 (Benedicks [Ben85], 1974).

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ für $p \geq 1$ und seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ mit endlichem (Lebesgue-)Maß. Gelten $\text{supp}(f) \subset A$ und $\text{supp}(\hat{f}) \subset B$, so gilt $f \equiv 0$ fast überall.

Werden in Proposition 5.1.1 Schwartz-Funktionen statt L^p -Funktionen betrachtet, erhält man die *überall*-Version der angeführten *fast-überall*-Aussage. Da kompakte Mengen insbesondere (Lebesgue-)endlich sind, folgt daraus direkt das Unschärfeprinzip aus Satz 3.1.1.

Eine quantitative Verallgemeinerung des Unschärfeprinzips nach Benedicks wurde von F. Nazarov für den eindimensionalen Fall formuliert.

Proposition 5.1.2 (Nazarov [Naz93], 1993).

Seien $f \in L^2(\mathbb{R})$ und $E, \Sigma \subset \mathbb{R}$ mit endlichem (Lebesgue-)Maß. Dann gilt

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq Ae^{A|E||\Sigma|} \left(\|f\|_{L^2(E^c)}^2 + \|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma^c)}^2 \right) \quad (5.1)$$

für ein $A > 0$, wobei wir mit $|M|$ das Lebesgue-Maß einer Menge $M \subset \mathbb{R}$ und mit M^c ihr relatives Komplement in $\mathbb{R}$ bezeichnen.

Für $p = 2$ und $n = 1$ ist Benedicks' Unschärfeprinzip eine direkte Folgerung aus Nazarovs Unschärfeprinzip. Denn betrachten wir für zwei (Lebesgue-)endliche Mengen $E, \Sigma \subset \mathbb{R}$ eine Funktion $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit $\text{supp}(f) \subset E$ und $\text{supp}(\hat{f}) \subset \Sigma$, so gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in E^c$ und $\hat{f}(\xi) = 0$ für alle $\xi \in \Sigma^c$, also

$$\|f\|_{L^2(E^c)}^2 = \int_{E^c} |f(x)|^2 dx = 0 = \int_{\Sigma^c} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma^c)}^2.$$

Mit Proposition 5.1.2 folgt daraus

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \leq Ae^{A|E||\Sigma|} \left(\|f\|_{L^2(E^c)}^2 + \|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma^c)}^2 \right) = Ae^{A|E||\Sigma|} (0 + 0) = 0,$$

also $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$ und somit $f \equiv 0$ fast überall. Dies zeigt Proposition 5.1.1.

Die von E und Σ abhängige Konstante $Ae^{A|E||\Sigma|}$ in (5.1) ist nach [Naz93] optimal. Aufgrund der zunehmend komplexen Geometrie im Höherdimensionalen stellt sich die Frage, welche Auswirkung die Dimension auf diese Konstante hat. Dieser Frage wird bis heute nachgegangen. Eine Erweiterung des Unschärfepinzips nach Nazarov auf den $L^2(\mathbb{R}^d)$ für $d \geq 1$ erfolgte durch P. Jaming.

Proposition 5.1.3 (Jaming [Jam07], 2007).

Sei $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ für $d \geq 1$ und seien $E, \Sigma \subset \mathbb{R}^d$ mit endlichem (Lebesgue-)Maß. Dann gilt

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq Ae^{A \cdot \min\{|E||\Sigma|, |E|^{1/d}\omega(\Sigma), |\Sigma|^{1/d}\omega(E)\}} \left(\|f\|_{L^2(E^c)}^2 + \|\hat{f}\|_{L^2(\Sigma^c)}^2 \right) \quad (5.2)$$

für ein $A > 0$, wobei wir mit $\omega(M)$ die mittlere Breite (engl. „mean width“) einer Menge $M \subset \mathbb{R}^d$ bezeichnen.

Die Konstante in (5.2) wird als optimal vermutet, falls mindestens eine der Mengen E und Σ eine Geometrie aufweist, die einer Kugel nahek kommt [Jam07].

5.1.2 Unschärfe im Abklingverhalten im Unendlichen

Neben den beiden in Kapitel 3 bereits angesprochenen Interpretationen des Begriffs *localized* – als Wirkungsbereich und als punktuelle Konzentration einer Funktion – kann *localized* auch als das Abklingverhalten einer Funktion im Unendlichen verstanden werden. Dem Meta-Theorem der harmonischen Analysis zufolge gibt es somit eine Limitierung des simultanen Abklingverhaltens einer Funktion und ihrer Fourier-Transformierten im Unendlichen. In Abschnitt 3.2 haben wir gesehen, dass Gauß-Funktionen die Funktionen sind, für die in der Heisenberg-Ungleichung Gleichheit gilt. Es stellt sich die Frage, ob Gauß-Funktionen auch in anderen Unschärfe-Bereichen den Grenzfall bilden. Mit dieser Frage und mit dem generellen Tradeoff des Abklingverhaltens einer Funktion und ihrer Fourier-Transformierten im Unendlichen beschäftigen sich viele Autoren (z. B. in [Tha04], [Esc+10] und [FM21]), wodurch eine Vielzahl an Aussagen resultierte und wahrscheinlich weiterhin resultieren wird. Den Prototyp dieser Aussagen stellt das Unschärfepinzip nach Hardy dar. Dieses besagt, dass eine Funktion und ihre Fourier-Transformierte im Unendlichen nur dann beide schneller als eine Gauß-Funktion abfallen können, wenn die Funktion die konstante Null-Funktion ist. Während in [Har33] Bedingungen für das asymptotische Verhalten von f und $\hat{f}$ gefordert werden, halten wir die in der Literatur üblichere Formulierung des Prinzips fest, wie sie beispielsweise in [FS97] zu finden ist.

Proposition 5.1.4 (Hardy [Har33], 1933).

Seien $a, b > 0$ mit $ab \geq 1$ und sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare Funktion, die

$$|f(x)| \leq Ae^{-a\pi x^2} \text{ und } |\hat{f}(\xi)| \leq Be^{-b\pi \xi^2}$$

für alle $x, \xi \in \mathbb{R}$ und Konstanten $A, B > 0$ erfüllt. Ist $ab = 1$, so gibt es ein $C \in \mathbb{C}$, sodass $f(x) = Ce^{-a\pi x^2}$ gilt und ist $ab > 1$, so gilt $f \equiv 0$.

Aufgrund der uneinheitlichen Definition der Fourier-Transformation (vgl. Bemerkung 2.1.2) ergeben sich in Proposition 5.1.4 für ab unterschiedliche untere Schranken. Während unsere Definition der Fourier-Transformation, die der aus [FS97] entspricht, zu $ab \geq 1$ führt, findet sich $ab \geq 1/4$ in [Har33].

Mit Hilfe der Radon-Transformation lässt sich Proposition 5.1.4 unverändert auf höhere Dimensionen übertragen. Dieses Vorgehen kann in [SST95] nachgelesen werden. Während in Hardys Unschärfeprinzip, so wie auch in vielen mit ihm verwandten Sätzen, punktweise Beschränktheit gefordert wird, wollen wir abschließend zwei Aussagen anführen, die stattdessen eine gewisse Integrierbarkeit voraussetzen. Die erste dieser Aussagen geht auf A. Beurling zurück und wurde nach seinem Tod zusammen mit weiteren seiner bis dahin unveröffentlichten Werken veröffentlicht. Sie kann gemäß der Aufzeichnungen in [Beu89] auf 1942 zurückdatiert werden.

Proposition 5.1.5 (Beurling [Beu89], 1942).

Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$. Gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |f(x) \hat{f}(\xi)| e^{|x\xi|} dx d\xi < \infty,$$

so folgt $f \equiv 0$.

M. Cowling und J. Price stellten eine L^p -Version von Hardys Unschärfeprinzip auf..

Proposition 5.1.6 (Cowling-Price [CP83], 1983).

Seien $a, b > 0$ mit $ab \geq 1$ und $p, q \in [1, \infty]$ mit $\min\{p, q\} < \infty$. Gilt

$$\|e^{a\pi x^2} f(x)\|_p + \|e^{b\pi \xi^2} \hat{f}(\xi)\|_q < \infty,$$

so folgt $f \equiv 0$.

5.2 Der Ansatz von Wigderson und Wigderson

Eine in der neueren Literatur häufig zitierte Arbeit ist [WW21] von A. Wigderson und Y. Wigderson, die das Konzept der Unschärfe in der Fourier-Analyse aus einem neuen Blickwinkel betrachten. Ausgangspunkt ist hierbei die Beobachtung, dass alle Unschärfeprinzipien im Kern dasselbe aussagen, aber ihre Beweise von einer Vielzahl an speziellen Eigenschaften der Fourier-Transformation und Techniken aus diversen mathematischen Bereichen Gebrauch machen – von der einfachen Anwendung des Satzes von Liouville (vgl. Satz 3.1.1) und der Cauchy-Bunyakovskiĭ-Schwarz-Ungleichung [Rob29], über Verwendung des Satzes von Phragmén–Lindelöf [Har33], der Poisson-Summationsformel [Ben85] und Argumentationen mit Hilbert-Schmidt-Operatoren [AB77], bis hin zur Betrachtung der Fourier-Transformation auf zyklischen Gruppen als Vandermondematrix [DS89]. Wigderson und Wigderson zeigen in ihrer Arbeit einen Weg, wie zwar nicht alle, aber viele Unschärfeprinzipien einheitlich bewiesen werden können. Dies motivieren sie damit, dass viele der Unschärfeprinzipien nur wenig mit der Fourier-Transformation an sich zu tun haben, sondern lediglich darauf beruhen, dass $\mathcal{F}: L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ ein beschränkter, unitärer Operator ist. Da die Fourier-Transformation nicht der einzige Operator ist auf den dies zutrifft, ermöglicht diese Erkenntnis neue Beweisansätze für bestehende Unschärfeprinzipien, deren Ausweitung auf andere Operatoren und die Formulierung neuer Unschärfeprinzipien.

Dazu werden in [WW21] für $k > 0$ solche Matrizen $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ als *k-Hadamard* bezeichnet, deren Einträge alle betragsmäßig maximal 1 sind und die

$$\|A^*Av\|_\infty \geq k\|v\|_\infty$$

für alle $v \in \mathbb{C}^n$ erfüllen. Für eine *k-Hadamard* Matrix A gilt

$$\|v\|_1\|Av\|_1 \geq k\|v\|_\infty\|Av\|_\infty \quad (5.3)$$

für alle $v \in \mathbb{C}^n$. Analog dazu werden solche Operatoren $A \in \mathcal{B}(L^1(\mathbb{R}), L^\infty(\mathbb{R}))$ als *k-Hadamard* bezeichnet, für die $\|A\| \leq 1$ gilt und die

$$\|A^*Af\|_\infty \geq k\|f\|_\infty$$

für alle f mit $f, Af \in L^1(\mathbb{R})$ erfüllen. Für einen *k-Hadamard* Operator A und f mit $f, Af \in L^1(\mathbb{R})$ gilt

$$\|f\|_1\|Af\|_1 \geq k\|f\|_\infty\|Af\|_\infty. \quad (5.4)$$

In [WW21] wird (5.3) für *k-Hadamard* Matrizen und (5.4) für *k-Hadamard* Operatoren als *primäres Unschärfeprinzip* bezeichnet. Aus ihnen folgen alle in [WW21] behandelten Unschärfeprinzipien.

5.3 Aktuelle Forschung

In diesem letzten Abschnitt wollen wir auf einen kürzlich erschienene Artikel von September 2025 und damit gleichzeitig auf einen weiteren Bereich verweisen, in dem uns Unschärfe begegnet – der Quanteninformationstheorie.

In [Xin25] stellt Q. Xingze zwei AURs (engl. *asymmetry-bounded uncertainty relations*) vor, wovon eine eine Verbesserung der unteren Schranke in Robertsons Unschärfeprinzip (Satz 4.2.1) und die andere eine Lösung eines bis dahin offenen Problems der Quanteninformationstheorie bereitstellt. Die Idee des Artikels besteht darin, die (algebraische) Inkompatibilität zweier Operatoren durch eine Größe zu quantifizieren, die unabhängig vom Zustand des quantenmechanischen Systems ist. Dies soll dem Problem der Robertson-Schranke entgegenwirken, die aufgrund ihrer Zustandsabhängigkeit für bestimmte Zustände verschwinden kann, selbst wenn die Operatoren nicht kommutieren. Dass ein allgemeines Unschärfeprinzip sich nicht einfach durch Kommutativität oder Nichtkommutativität der Operatoren formuliert lässt, äußerte E. Condon bereits 1929 in [Con29].

Wir bezeichnen für einen Operator A mit $\mathcal{C}(A)$ die Menge aller Operatoren, die mit A kommutieren und nennen $\mathcal{C}(A)$ die *Kommutante* von A . Zur besseren Lesbarkeit werden wir nicht weiter zwischen Operatoren und den durch diese dargestellten Observablen (vgl. Abschnitt 4.2) unterscheiden. In diesem Sinne ist $\mathcal{C}(A)$ die Menge aller Operatoren, die mit A kompatibel sind. In [Xin25] wird nun die *Asymmetrie-Norm von B bzgl. A* definiert als

$$\mathcal{N}_p(B|A) := \min_{A_d \in \mathcal{C}(A)} \|B - A_d\|_p, \quad (5.5)$$

wobei $\|\cdot\|_p$ die Schatten p -Norm bezeichnet. Unter allen mit A kommutierenden Operatoren wird in (5.5) derjenige gesucht, der bzgl. der Schatten p -Norm zu B den kleinsten Abstand hat. Somit misst $\mathcal{N}_p(B|A)$ den minimalen Abstand von B zu $\mathcal{C}(A)$, liefert also ein Maß dafür, wie stark A und B (nicht) kommutieren. Dabei hängt $\mathcal{N}_p(B|A)$ ausschließlich von den Operatoren A und B und nicht von dem Zustand ab, in dem sie sich befinden. Mit Hilfe dieses zustandsunabhängigen Maßes und $C := -i[A, B]$ lässt sich für Robertsons Unschärfeprinzip

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle \psi | C | \psi \rangle| \quad (5.6)$$

ein Verfeinerungsfaktor

$$\mathcal{R}_{q,s}(\psi) := 2^{1-(1/q+1/s)} \frac{|\langle \psi | C | \psi \rangle|}{\mathcal{N}_p(B|A) \cdot \mathcal{N}_r(A|B)}$$

definieren, sodass

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle \psi | C | \psi \rangle \right| \cdot \mathcal{R}_{q,s}(\psi) \quad (5.7)$$

für jedes Paar konjugierter Exponenten (p, q) und (r, s) gilt. Die rechte Seite von (5.7) stellt für jedes $\mathcal{R}_{q,s}(\psi) > 1$ eine stärkere Schranke als die rechte Seite von (5.6) dar, sodass die hier vorgestellte AUR insbesondere für *nahezu kompatible* Observablen eine Verbesserung zur Robertson-Schranke darstellt. In [Xin25] kann ein konkretes Anwendungsbeispiel, in dem die ursprüngliche Schranke nach Robertson und die verfeinerte Schranke nach Xingze miteinander verglichen werden, nachgelesen werden.

Die zweite in [Xin25] vorgestellte AUR stellt die erste universelle Unschärferelation in Produktform für die WYSI (engl. *Wigner-Yanase skew information*) dar. Für die genaue Formulierung verweisen wir auf [Xin25]. Dort wird außerdem die Gültigkeit von Xingzes AUR an einem Beispiel demonstriert, an dem bisherige Versuche eine solche AUR zu formulieren gescheitert sind.

Dem Autor zufolge bietet seine Arbeit „ein vielseitiges Instrument zur Erforschung der Quantenwelt“, die seit nunmehr einem Jahrhundert die Wissenschaft beschäftigt – ganz im Sinne von W. Heisenberg.

Literaturverzeichnis

- [AB77] W. O. Amrein und A. M. Berthier. „On support properties of L_p -functions and their Fourier transforms“. In: *Journal of Functional Analysis* 24.3 (1977), S. 258–267.
- [Ben90] J. J. Benedetto. „Uncertainty Principle Inequalities and Spectrum Estimation“. In: *Recent Advances in Fourier Analysis and Its Applications*. Hrsg. von J. S. Byrnes und J. L. Byrnes. Dordrecht: Springer Netherlands, 1990, S. 143–182. ISBN: 978-94-009-0665-5.
- [Ben85] M. Benedicks. „On Fourier transforms of functions supported on sets of finite Lebesgue measure“. In: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 106.1 (1985), S. 180–183.
- [Beu89] A. Beurling. *The Collected Works of Arne Beurling. Harmonic Analysis*. Boston: Birkhäuser, 1989. ISBN: 0-8176-3412-6.
- [But15] T. Butz. *Fouriertransformation für Fußgänger*. Vieweg+Teubner Verlag, 2015. ISBN: 9783663100867.
- [Con29] E. U. Condon. „Remarks on Uncertainty Principles“. In: *Science* 69.1796 (1929), S. 573–574.
- [CP83] M. Cowling und J. F. Price. „Generalisations of Heisenberg’s inequality“. In: *Harmonic Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1983, S. 443–449. ISBN: 978-3-540-39885-1.
- [Deu83] D. Deutsch. „Uncertainty in Quantum Measurements“. In: *Physical Review Letter* 50.9 (1983).

- [DS89] D. L. Donoho und P. B. Stark. „Uncertainty Principles and Signal Recovery“. In: *SIAM Journal on Applied Mathematics* 49.3 (1989), S. 906–931.
- [Els18] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2018. ISBN: 978-3-662-57939-8.
- [Esc+10] L. Escauriaza u. a. „The sharp Hardy Uncertainty Principle for Schrödinger evolutions“. In: *Duke Mathematical Journal* 155 (2010), S. 163–187.
- [FM21] A. Fernández-Bertolin und E. Malinnikova. „Dynamical versions of Hardy’s uncertainty principle: A survey“. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 58.3 (2021), S. 357–375.
- [FS97] G. B. Folland und A. Sitaram. „The Uncertainty Principle: A Mathematical Survey.“ In: *The journal of Fourier analysis and applications* 3.3 (1997), S. 207–238.
- [For17] O. Forster. *Analysis 3*. Wiesbaden: Springer Fachmedien Wiesbaden, 2017. ISBN: 978-3-658-16746-2.
- [Fou78] J. B. J. Fourier. *The Analytical Theory of Heat*. Übers. von Alexander Freeman. Cambridge: Cambridge University Press, 1878.
- [Gri12] D. J. Griffiths. *Quantenmechanik*. Übers. der 2. Amerikan. Aufl. München: Pearson Studium, 2012. ISBN: 978-3-86894-114-2.
- [Hal13] Brian C. Hall. *Quantum Theory for Mathematicians*. Bd. 267. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY: Springer New York, 2013. ISBN: 978-1-4614-7116-5.
- [Har33] G. H. Hardy. „A Theorem Concerning Fourier Transforms“. In: *Journal of the London Mathematical Society* s1–8.3 (1933), S. 227–231.
- [HJ94] V. Havin und B. Jöricke. *The Uncertainty Principle in Harmonic Analysis*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1994. ISBN: 978-3-642-78377-7.

- [Haz95] M. Hazewinkel, Hrsg. *Encyclopaedia of Mathematics*. Bd. 1. Boston, MA: Springer US, 1995. ISBN: 978-1-4899-3797-1.
- [Hei27] W. Heisenberg. „Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik“. In: *Zeitschrift für Physik* 43.3 (1927), S. 172–198.
- [Hir57] I. I. Hirschman. „A Note on Entropy“. In: *American Journal of Mathematics* 79.1 (1957), S. 152–156.
- [Jam07] P. Jaming. „Nazarov’s uncertainty principles in higher dimension“. In: *Journal of Approximation Theory* 149.1 (2007), S. 30–41.
- [Ken27] E. H. Kennard. „Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen“. In: *Zeitschrift für Physik* 44.4 (1927), S. 326–352.
- [Lew24] M. Lewin. *Spectral Theory and Quantum Mechanics*. Universitext. Springer, 2024. ISBN: 978-3-031-66878-4.
- [MU88] H. Maassen und J. B. M. Uffink. „Generalized entropic uncertainty relations“. In: *Physical Review Letters* 60.12 (1988), S. 1103–1106.
- [Mar09] R. J. Marks. *Handbook of Fourier Analysis & Its Applications*. Oxford: Oxford University Press, 2009. ISBN: 978-0-19-533592-7.
- [Mor13] V. Moretti. *Spectral Theory and Quantum Mechanics: Mathematical Foundations of Quantum Theories, Symmetries and Introduction to the Algebraic Formulation*. 2. Aufl. Bd. 110. UNITEXT: La Matematica per il 3+2. Springer, 2013. ISBN: 978-3-319-70706-8.
- [Naz93] F. L. Nazarov. „Local estimates for exponential polynomials and their applications to inequalities of the uncertainty principle type“. ru. In: *Algebra i Analiz* 5.4 (1993), S. 3–66.
- [Nol13] W. Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 5/1: Quantenmechanik - Grundlagen*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2013. ISBN: 978-3-642-25403-1.
- [Rob29] H. P. Robertson. „The Uncertainty Principle“. In: *Physical Review* 34.1 (1929), S. 163–164.

- [SST95] A. Sitaram, M. Sundari und S. Thangavelu. „Uncertainty principles on certain Lie groups“. In: *Proceedings Mathematical Sciences* 105.2 (1995), S. 135–151.
- [SS03a] E. M. Stein und R. Shakarchi. *Complex Analysis*. Princeton Lectures in Analysis 2. Princeton University Press, 2003. ISBN: 978-0-691-11385-2.
- [SS03b] E. M. Stein und R. Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton Lectures in Analysis 1. Princeton University Press, 2003. ISBN: 978-0-691-11384-5.
- [Str94] R. S. Strichartz. *A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*. Studies in Advanced Mathematics. CRC-Press, 1994. ISBN: 0-8493-8273-4.
- [Tal13] B. Talbut. „A short tour of harmonic Analysis“. In: *Summer Program for Undergraduates*. University of Chicago, 2013. URL: <https://math.uchicago.edu/~may/REU2013/REUPapers/Talbut.pdf> (besucht am 06.07.2025).
- [Tha04] S. Thangavelu. *An introduction to the uncertainty principle : Hardy’s theorem on Lie groups*. Bd. 217. Progress in Mathematics. Boston, MA: Birkhäuser, 2004. ISBN: 978-0-8176-8164-7.
- [Von18] J.S Von Neumann. *Mathematical foundations of quantum mechanics*. New edition. Princeton: Princeton University Press, 2018. ISBN: 978-0-691-17856-1.
- [Wei22] E. Weitz. *Gesichter der Mathematik: 111 Porträts und biographische Miniaturen*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2022. ISBN: 978-3-662-66349-3.
- [Wer09] D. Werner. *Einführung in die höhere Analysis*. Springer-Lehrbuch. Springer Berlin Heidelberg, 2009. ISBN: 978-3-540-79599-5.
- [Wer18] D. Werner. *Funktionalanalysis*. Springer Berlin Heidelberg, 2018. ISBN: 978-3-662-55406-7.

- [Wey27] H. Weyl. „Quantenmechanik und Gruppentheorie“. In: *Zeitschrift für Physik* 46.1-2 (1927), S. 1–46.
- [Wie64] N. Wiener. *I Am a Mathematician*. Cambridge: MIT Press, 1964.
- [WW21] A. Wigderson und Y. Wigderson. „The uncertainty principle: Variations on a theme“. In: *Bulletin of the American Mathematical Society* 58.2 (2021), S. 225–261.
- [Win47] A. Wintner. „The Unboundedness of Quantum-Mechanical Matrices“. In: *Physical Review* 71.10 (1947), S. 738–739.
- [Xin25] Q. Xingze. *Uncertainty Principle from Operator Asymmetry*. 2025. DOI: 10.48550/arXiv.2509.06760. (Besucht am 12.09.2025).
- [Yos95] K. Yosida. *Functional Analysis*. Classics in Mathematics. Springer Berlin Heidelberg, 1995. ISBN: 978-3-540-58654-8.

Verzeichnis der Unschärfeprinzipien

1	Unschärfe in der Kompaktheit der Träger	36
2	Nach Kennard/Weyl (1927)	37
3	Nach Robertson (1929)	47
4	Nach Heisenberg (1927)	48
5	Nach Benedicks (1974)	52
6	Nach Nazarov (1993)	52
7	Nach Jaming (2007)	53
8	Nach Hardy (1933)	54
9	Nach Beurling (1942)	54
10	Nach Cowling und Price (1983)	54