

Reguläre Flächen und riemannsche Mannigfaltigkeiten

Bachelorarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science
im Studiengang Mathematik
der Fakultät Mathematik und Informatik
der Universität des Saarlandes

Name: Sophie Margardt
Matrikelnummer: 2573301
Erstgutachter: Moritz Weber
Zweitgutachter: Michael Hartz

Saarbrücken, 28. Juni 2022

Eidesstaatliche Erklärung

Ich erkläre hiermit eidesstaatlich, dass ich die Arbeit selbstständig angefertigt habe. Es wurden keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt.

Saarbücken, 28. Juni 2022

Sophie Margardt

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	6
2	Grundlagen der Kurventheorie.....	8
3	Flächen im \mathbb{R}^3	12
3.1	Reguläre Flächen.....	12
3.2	Tangentialebene	18
4.	Innere Geometrie.....	23
4.1	Erste Fundamentalform	23
4.2	Isometrie	25
4.3	Größen der inneren Geometrie.....	28
5	Mannigfaltigkeiten.....	32
5.1	Differenzierbare Mannigfaltigkeiten.....	32
5.2	Differenzierbare Untermannigfaltigkeit.....	35
5.3	Riemannsche Mannigfaltigkeit	38
5.4	Riemannsche Untermannigfaltigkeit	40
6	Vergleich Reguläre Flächen und Riemannsche Mannigfaltigkeiten	43
6.1	Reguläre Flächen als differenzierbare Mannigfaltigkeit	43
6.2	Reguläre Flächen als riemannsche Mannigfaltigkeiten	44
6.3	Untermannigfaltigkeiten von regulären Flächen	45
6.4	Innere Geometrie	46
7	Literaturverzeichnis	49
8	Abbildungsverzeichnis	50

1 Einleitung

„There is no royal road to geometry“ [7], auf Deutsch: „Es gibt keinen Königsweg zur Geometrie“, ist eines der bekanntesten Zitate von Euklid von Alexandria. Es war seine Antwort auf die Frage, ob es einen kürzeren Weg zur Geometrie gibt als über die Elemente. Dabei handelt es sich um die 13 Bücher von Euklid aus dem Jahr 300 vor Christus, welche alle Themen angefangen bei der Flächengeometrie bis zur Raumgeometrie darlegen. In ihrem Kern beruht die Euklidische Geometrie auf dem Studium der Ebenen und Geraden im \mathbb{R}^3 und bildet den Grundstein der Geometrie.

Rund 2000 Jahre später erkannte der Mathematiker Carl Friedrich Gauß, dass es neben der Euklidischen Geometrie noch eine Nichteuklidische Geometrie geben muss. Er veröffentlichte seine Erkenntnisse jedoch nie, da er Angst hatte, dass seine Arbeit auf Unverständnis stoßen würde.

Es war schließlich Bernhard Riemann, der in seinem Habilitationsvortrag von 1854 seine Idee zur riemannschen Geometrie veröffentlichte, welche die Grundlage der heutigen Differentialgeometrie bildete. Er betrachtet in seinem Ansatz nicht mehr nur den \mathbb{R}^3 , sondern den \mathbb{R}^n .

Heutzutage umfasst die Differentialgeometrie nicht mehr nur die Zweiteilung zwischen Euklidischer und Nichteuklidischer Geometrie. Die Differentialgeometrie hat sich zu ihrem eigenen Gebiet entwickelt, welche darüber hinaus geht.

Thema dieser Bachelorarbeit sind reguläre Flächen und riemannsche Mannigfaltigkeiten, welche man beide dem Gebiet der Differentialgeometrie zuordnen kann. Es geht um eine Einführung in die Themen der Flächentheorie und der Mannigfaltigkeiten, sowie um einen Vergleich von regulären Flächen mit riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Die Bachelorarbeit orientiert sich hauptsächlich an den Quellen [1], [2] und [3] und ist wie folgt aufgebaut.

Das zweite Kapitel befasst sich mit den Grundlagen der Kurventheorie. Es wird der Begriff Parametrisierung eingeführt, welcher in den darauffolgenden Kapiteln noch vermehrt vorkommen wird.

Im dritten Kapitel werden reguläre Flächen eingeführt, bei denen es sich ausschließlich um zweidimensionale Objekte im dreidimensionalen Raum handelt. Ein besonderes Augenmerk wird dabei auf die graphische Darstellung der einzelnen Größen gelegt, wofür insbesondere selbsterstellte Bilder verwendet werden. Als Ausgleich findet man in diesem Kapitel weniger Beweise, was sich in den nachfolgenden Kapiteln jedoch nochmal ändert.

Im vierten Kapitel wird die Sichtweise auf reguläre Flächen geändert. Man betrachtet die Flächen nicht mehr von außen, sondern von innen, was man dann auch unter dem Begriff der inneren Geometrie versteht.

Im Gegensatz zu den vorherigen Kapiteln wird im fünften Kapitel nicht mehr der \mathbb{R}^3 sondern viel allgemeiner der \mathbb{R}^n betrachtet. Das Kapitel widmet sich jeglichen Formen von Mannigfaltigkeiten, angefangen bei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten über Untermannigfaltigkeiten bis hin zu riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Das Ziel des sechsten Kapitels besteht darin, zu zeigen, inwieweit reguläre Flächen und riemannsche Mannigfaltigkeiten zusammenhängen. Dafür werden die beiden Objekte verglichen und es wird sich überlegt, inwieweit sich das auf die Größen der inneren Geometrie übertragen lässt.

2 Grundlagen der Kurventheorie

In diesem Kapitel werden die grundlegenden Begriffe der Kurventheorie definiert und erklärt. Dabei wird sich an dem Buch „Elementare Differentialgeometrie“ von Christian Bär orientiert [1].

Eine Kurve ist bildlich eine verbogenes Geradenstück im Raum. Das führt zu folgender Definition:

Definition 2.1 Es sei $I \in \mathbb{R}$ ein Intervall. Unter einer **parametrisierten Kurve** versteht man eine glatte Abbildung $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, das heißt, dass sie beliebig oft differenzierbar ist. Man nennt eine parametrisierte Kurve **regulär**, falls für alle $t \in I$ die Ableitung $\dot{c}(t) \neq 0$ ist.

Das Intervall kann dabei abgeschlossen, halbabgeschlossen oder offen sein und sowohl beschränkt als auch unbeschränkt.

Bemerkung 2.2 Die Bedingung $\dot{c}(t) \neq 0$ stellt sicher, dass sich der Wert der Abbildung ändert, und nicht konstant bleibt. Dadurch werden auch konstante Abbildungen ausgeschlossen.

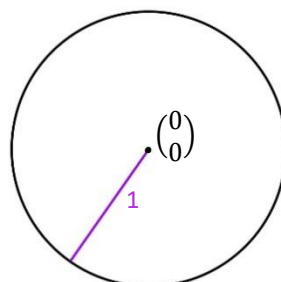
Beispiel 2.3 Ein Beispiel für eine parametrisierte Kurve bildet die Einheitssphäre im \mathbb{R}^2 um den Punkt $(0, 0)$ mit dem Radius $r = 1$. Die Kurve wird dabei durch folgende Abbildung definiert:

$$c: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, t \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Für die Ableitung von c gilt:

$$\dot{c}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

Das ist offensichtlich für alle $t \in [0, 2\pi]$ ungleich 0 und somit handelt es sich bei der Kreislinie um eine reguläre parametrisierte Kurve. Graphisch sieht die Abbildung folgendermaßen aus:



[Abbildung1]

Eine parametrisierte Kurve liefert einem mehr als nur das Bild, das Intervall gibt auch an in welcher Richtung und Geschwindigkeit das Bild durchlaufen werden muss. Möchte man das Bild in einer anderen Richtung oder Geschwindigkeit durchlaufen, so muss das Intervall entsprechend geändert werden, was folgende Definition motiviert:

Definition 2.4 Es sei $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine parametrisierte Kurve. Bei einer **Parametertransformation** von c handelt es sich um eine bijektive Abbildung $\varphi: I \rightarrow J$, wobei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein weiteres Intervall ist, so dass sowohl φ als auch φ^{-1} glatt sind. Die parametrisierte Kurve $\tilde{c} = c \circ \varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Umparametrisierung** von c .

Eine Parametertransformation kann also entweder die Richtung erhalten, in der das Bild durchlaufen wird, oder aber die Richtung umkehren. Wenn die Richtung erhalten bleibt, wird das Intervall in aufsteigender Reihenfolge durchlaufen, das heißt die Ableitung der Transformation ist positiv. Wird das Bild jedoch in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen, so folgt man dem Intervall in absteigender Reihenfolge und die Ableitung ist negativ. Dadurch ergibt sich die folgende Definition:

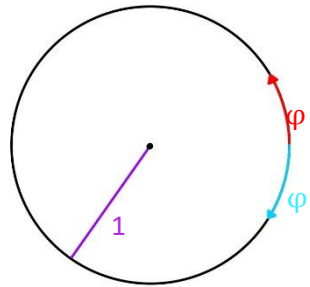
Definition 2.5 Eine Parametertransformation φ heißt **orientierungserhaltend**, falls $\dot{\varphi}(t) > 0$ für alle $t \in I$ und **orientierungsumkehrend**, falls $\dot{\varphi}(t) < 0$ für alle $t \in I$.

Bemerkung 2.6 Für die Geschwindigkeit gilt, falls die Steigung der Parametertransformation größer Eins ist, so wird sie beschleunigt und falls die Steigung kleiner Eins ist, so wird sie verlangsamt.

Beispiel 2.7 In diesem Beispiel werden zwei Parametertransformationen zum Beispiel 2.3 näher betrachtet. Als erstes wird die Parametertransformation $\varphi = id: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ betrachtet. Diese ist offensichtlich orientierungserhaltend mit $\dot{\varphi}(t) = 1 > 0$.

Als zweites wird die Parametertransformation $\varphi' = -id: [0, 2\pi] \rightarrow [-2\pi, 0]$ betrachtet, welche mit $\dot{\varphi}'(t) = -1$ orientierungsumkehrend ist.

Graphisch gesehen wird das Bild also einmal im Uhrzeigersinn und einmal gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen, wie die folgende Abbildung zeigt:



[Abbildung 2]

Proposition 2.8 Jede Parametertransformation ist entweder orientierungserhaltend oder orientierungsumkehrend.

Beweis: Die Ableitung der Parametertransformation kann an keiner Stelle Null sein, da nach der Kettenregel gilt:

$$(\varphi^{-1})'(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = (\varphi^{-1} \circ \varphi)'(t) = 1$$

Gäbe es ein $t_1 \in I$ mit $\dot{\varphi}(t_1) < 0$ und ein $t_2 \in I$ mit $\dot{\varphi}(t_2) > 0$, dann gäbe es nach dem Zwischenwertsatz auch ein $t_3 \in I$ mit $\dot{\varphi}(t_3) = 0$. Das führt jedoch zu einem Widerspruch.¹

□

Die letzte zu betrachtende Größe ist die Länge einer Kurve. Die Überlegung dahinter ist, dass man eine Kurve in mehrere lineare Stücke aufteilt und deren Länge addiert. Diese Idee wird bereits bei der Integralrechnung verwendet, wodurch sich folgende Definition ergibt:

Definition 2.9 Es sei $c: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $I = [a, b]$ eine parametrisierte Kurve, dann nennt man

$$L[c] := \int_a^b \|\dot{c}(t)\| dt$$

die **Länge** von c .

Beispiel 2.10 Es sei c die in Beispiel 2.3 definierte Kurve, dann gilt für die Länge von c :

$$\begin{aligned} L[c] &= \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right\| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2(t) + \cos^2(t) dt \end{aligned}$$

¹ Der Beweis findet sich in Quelle [1] auf Seite 30 f.

2 Grundlagen der Kurventheorie

$$\begin{aligned} &= \int_0^{2\pi} 1 \, dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

Man kommt also genau auf den erwarteten Kreisumfang nach der Formel $U = 2\pi r$, was nochmal zeigt, dass die Definition 2.9 sinnvoll ist.

3 Flächen im \mathbb{R}^3

In diesem Kapitel sollen die Grundbegriffe der klassischen Flächentheorie eingeführt und anhand von Beispielen veranschaulicht werden. Dabei wird sich an dem Buch „Elementare Differentialgeometrie“ von Christian Bär orientiert [1].

3.1 Reguläre Flächen

Das Ziel für dieses Kapitel ist zu definieren, was eine reguläre Fläche ist und wann Funktionen mit Werte- oder Definitionsbereich auf regulären Flächen differenzierbar sind.

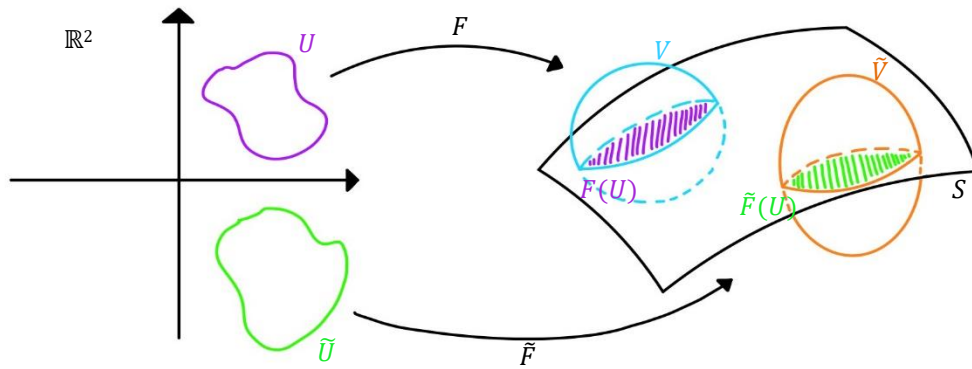
Allgemein betrachtet, sind Flächen zweidimensionale Objekte in einem dreidimensionalen Raum. Daraus folgt, dass jeder Punkt auf der Fläche eindeutig durch zwei unabhängige Parameter bestimmt werden kann. Somit ergibt sich folgende lokale Definition für reguläre Flächen:

Definition 3.1.1 Es sei S eine Teilmenge des \mathbb{R}^3 . Man nennt S eine **reguläre Fläche**, falls für jeden Punkt $p \in S$ eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^3$ existiert, ebenso wie eine offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^2$ und eine glatte Abbildung $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass gilt

- (i) $F(U) = S \cap V$ und F ist ein Homöomorphismus zwischen U und $S \cap V$,
- (ii) die Jacobimatrix $D_u F$ hat für jeden Punkt $u \in U$ den Rang 2.

Die erste Bedingung besagt, dass alle Punkte auf S , welche in der Umgebung V von p liegen, über F durch zwei Parameter bestimmt werden können. Diese Parameter sind die Koordinaten der Punkte in U . Die zweite Bedingung sorgt dafür, dass die Koordinaten unabhängig voneinander sind.

Anschaulich besagt die Definition also, dass eine reguläre Fläche aus Stücken des \mathbb{R}^2 besteht, welche so verformt und aneinandergeheftet wurden, dass keine Ecken und Kanten entstehen, egal wie oft differenziert wird.



[Abbildung 3]

Definition 3.1.2 Die in Definition 3.1.1 verwendete Abbildung F oder auch das Tripel (U, F, V) nennt man **lokale Parametrisierung** von S um p . Die Schnittmenge $S \cap V$ wird **Koordinatenumgebung** von p genannt und die Komponenten u^1 und u^2 vom Punkt $u = (u^1, u^2)$ heißen **Koordinaten** des Punktes $F(u)$ bezüglich der Parametrisierung F .

Beispiel 3.1.3 Die einfachsten regulären Flächen sind die affinen Ebenen. Sie lassen sich dadurch charakterisieren, dass sie allein durch einen Punkt und zwei linear unabhängige Vektoren aufgespannt werden können. Es sei S die durch den Punkt $p \in \mathbb{R}^3$ und durch die linearen unabhängigen Vektoren $X, Y \in \mathbb{R}^3$ aufgespannte affine Ebene. Dann gilt:

$$S = \{p + u^1 \cdot X + u^2 \cdot Y \mid u^1, u^2 \in \mathbb{R}\}$$

Für die Parametrisierung setzt man $V := \mathbb{R}^3, U := \mathbb{R}^2$ und $F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $F(u^1, u^2) := p + u^1 \cdot X + u^2 \cdot Y$.

Offensichtlich erfüllt die Parametrisierung die erste Bedingung der Definition 3.1.1. Es muss also nur noch die zweite Bedingung überprüft werden. Für die Jacobimatrix gilt:

$$D_u F = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix}$$

Da X und Y linear unabhängig sind, hat die Jacobimatrix vollen Rang, also den Rang 2, wodurch die zweite Bedingung erfüllt ist.

Bei dem vorherigen Beispiel war es sehr einfach eine Parametrisierung zu finden, da die Ebene über einen Funktionsgraphen definiert wurde. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht immer der Fall und es kann mitunter sehr mühsam sein, eine geeignete Parametrisierung zu finden.

Das folgende Kriterium bietet eine Möglichkeit dieses Problem zu umgehen, falls die Menge S durch eine Gleichung definiert ist.

Proposition 3.1.4 Es sei $V_0 \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Teilmenge und $f: V_0 \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Eine Menge $S := \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$ ist eine reguläre Fläche, falls für alle $p \in S$ für den Gradient gilt:

$$\text{grad } f(p) \neq (0,0,0)^\top$$

Beweis: Es sei $p := (x_0, y_0, z_0)^\top \in S$. Da nach Voraussetzung gilt

$$\text{grad } f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right)^\top \neq (0, 0, 0)^\top$$

kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, dass

$$\frac{\partial f}{\partial z}(p) \neq 0$$

ist. Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es eine offene Umgebung $V \subseteq V_0$ von p , eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von (x_0, y_0) und eine glatte Funktion $g: U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$S \cap V = \{(x, y, g(x, y))^\top \mid (x, y)^\top \in U\}$$

gilt. Man setze $F: U \rightarrow V, F(x, y) := (x, y, g(x, y))^\top$ und überprüfe die beiden Bedingungen aus Definition 3.1.1.

Die erste Bedingung ist offensichtlich erfüllt. Somit bleibt nur noch die zweite Bedingung. Für die Jacobimatrix gilt:

$$D_{(x,y)}F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

Die Jacobimatrix hat somit für jedes $(x, y) \in U$ vollen Rang und erfüllt dementsprechend die zweite Bedingung. Folglich handelt es sich bei S um eine reguläre Fläche.²

□

² Der Beweis findet sich in Quelle [1] auf Seite 96.

Bemerkung 3.1.5 Es muss jedoch beachtet werden, dass es sich hierbei nur um eine hinreichende Bedingung handelt und nicht um eine notwendige, wie im nachfolgenden Beispiel deutlich wird.

Beispiel 3.1.6 Man betrachte die Sphäre

$$S^2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

als Nullstellenmenge der Funktion $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2$, somit kann man die Menge schreiben als

$$S^2 = \{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid (x^2 + y^2 + z^2 - 1)^2 = 0\}.$$

Für den Gradienten gilt somit:

$$\text{grad } f(x, y, z) = 2(x^2 + y^2 + z^2 - 1) \cdot (2x, 2y, 2z)^T$$

Daraus folgt also, dass der Gradient für alle Punkte $p \in S^2$ verschwindet und trotzdem ist die Sphäre eine reguläre Fläche, die Funktion f wurde lediglich ungünstig gewählt.

Eine alternative für die Funktion f , wäre die Funktion

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

Für den Gradienten gilt dann:

$$\text{grad } g(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$$

Der Gradient verschwindet offensichtlich nur für den Punkt $(0,0,0)^T$, der ist jedoch nicht in der Fläche enthalten. Somit verschwindet der Gradient für keinen Punkt $p \in S^2$, womit gezeigt wurde, dass die Fläche regulär ist.

Der nächste Schritt besteht darin, zu überlegen, wie man Aussagen über eine Fläche in der Nähe eines Punktes treffen kann. Die Idee ist, das Konzept der Differentialrechnung auf regulären Flächen anzuwenden.

Für Flächen, welche über Funktionengraphen definiert sind, ist bereits bekannt, wie partielle Ableitungen gebildet werden. In den meisten Fällen sind reguläre Flächen jedoch nicht über Funktionsgraphen gegeben, daher werden im Folgenden drei Fälle betrachtet, welche in dieser Hinsicht noch nützlich sein werden.

Der Grundgedanke besteht darin, dass man kleine Umgebungen von regulären Flächen auf den \mathbb{R}^2 zurückführen möchte. Daher ist es sinnvoll sich anzusehen, wann Funktionen mit Werte- oder Definitionsbereich auf regulären Flächen glatt sind.

Proposition 3.1.7 Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und (U, F, V) eine zugehörige lokale Parametrisierung. Für eine Abbildung $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $W \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge sei $\varphi(W) \subseteq S \cap V$. Dann ist φ eine glatte Abbildung genau dann, wenn $F^{-1} \circ \varphi: W \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$ glatt ist.

Beweis: Der Beweis kann im Buch „Elementare Differentialgeometrie“ von Christian Bär auf Seite 100 nachgelesen werden [1].

Die Proposition besagt folglich, dass es für eine Abbildung mit Wertebereich auf einer regulären Fläche nicht von Bedeutung ist, ob man sie als eine Abbildung mit Werten im \mathbb{R}^2 oder als eine Abbildung mit Werten im \mathbb{R}^3 betrachtet.

Des Weiteren kann aus der Proposition noch folgendes Korollar abgeleitet werden.

Korollar 3.1.8 Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und (U_1, F_1, V_1) und (U_2, F_2, V_2) zwei lokale Parametrisierungen, dann ist die Funktion

$$F_2^{-1} \circ F_1: F_1^{-1}(V_1 \cap V_2) \rightarrow F_2^{-1}(V_1 \cap V_2)$$

glatt.

Beweis: Man wende die Proposition 3.1.7 an auf

$$W = F_1^{-1}(V_1 \cap V_2), \varphi = F_1 \text{ und } (U, F, V) = (U_2, F_2, V_2).^3$$

□

Proposition 3.1.9 Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$ und $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Es gibt eine offene Umgebung V von p in \mathbb{R}^3 und eine Fortsetzung $\tilde{\varphi}$ von $\varphi|_{S \cap V}$ auf V , die um p glatt ist.
- (ii) Es gibt eine lokale Parametrisierung (U, F, V) mit $p \in V$, so dass $\varphi \circ F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um $F^{-1}(p)$ glatt ist.

³ Der Beweis findet sich in Quelle [1] auf Seite 101.

- (iii) Für alle lokalen Parametrisierungen (U, F, V) mit $p \in V$ ist $\varphi \circ F: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt um $F^{-1}(p)$.

Beweis: Der Beweis kann im Buch „Elementare Differentialgeometrie“ von Christian Bär auf Seite 103 nachgelesen werden [1].

Definition 3.1.10 Eine solche Abbildung nennt man **glatt nahe p** .

Definition 3.1.11 Es seien S_1 und S_2 zwei reguläre Flächen im \mathbb{R}^3 . Man nennt eine Abbildung $\varphi: S_1 \rightarrow S_2$ **glatt nahe p** , falls eine lokale Parametrisierung von S_1 um p und von S_2 um $\varphi(p)$ existiert, so dass $F_2^{-1} \circ \varphi \circ F_1: F_1^{-1}(\varphi^{-1}(V_2) \cap V_1) \rightarrow U_2$ nahe p glatt ist.

Folglich nennt man eine Abbildung zwischen regulären Flächen glatt, wenn sie dargestellt in Koordinaten glatt ist. Dabei ist es egal, welche Parametertransformation man verwendet. Die Differenzierbarkeit einer Abbildung kann somit leichter überprüft werden, wenn man möglichst geschickte Koordinaten wählt.

Definition 3.1.12 Eine Abbildung φ zwischen regulären Flächen nennt man **Diffeomorphismus**, wenn φ bijektiv ist und sowohl φ als auch φ^{-1} glatt sind. Zwei Flächen zwischen denen ein solcher Diffeomorphismus existiert, nennt man dann auch **diffeomorph**.

Bemerkung 3.1.13 Wenn zwei Flächen diffeomorph sind, bedeutet das also, dass man eine Fläche glatt auf der anderen abbilden kann. Graphisch gesehen sind zwei Flächen somit diffeomorph, wenn man eine Fläche so verformen kann, dass man die andere erhält. Aus der Sicht der Differentialgeometrie sind sie somit gleich.

Beispiel 3.1.14 Es sei $S_1 = \{(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ mit $a, b, c > 0$ ein Ellipsoid und S_2 die S^2 Sphäre aus Beispiel 3.1.6. Definiere die Funktion

$$\varphi: S_1 \rightarrow S_2, \varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}, \frac{z}{c}\right)^\top$$

mit Umkehrfunktion

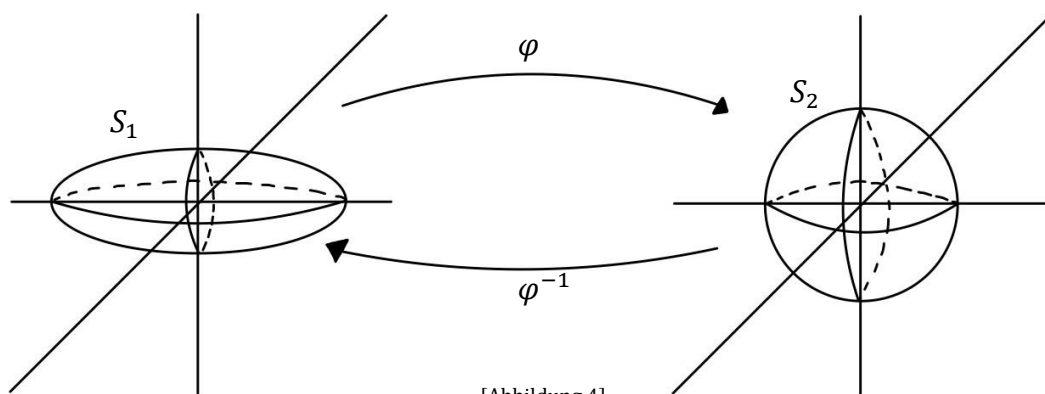
$$\varphi^{-1}: S_2 \rightarrow S_1, \varphi(x, y, z) = (ax, by, cz)^\top$$

Es handelt sich bei φ somit um eine bijektive Funktion, welche S_1 auf S_2 abbildet. Es bleibt somit nur noch die Glattheit der Funktionen zu prüfen. Für die Jacobimatrizen gilt:

$$D_{(x,y,z)}\varphi = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix} \text{ und } D_{(x,y,z)}\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Daraus folgt, dass die Funktionen glatt sind, da alle partiellen Ableitungen unendlich oft differenzierbar sind.

Es handelt sich somit bei φ um einen Diffeomorphismus und S_1 und S_2 sind diffeomorph.



3.2 Tangentialebene

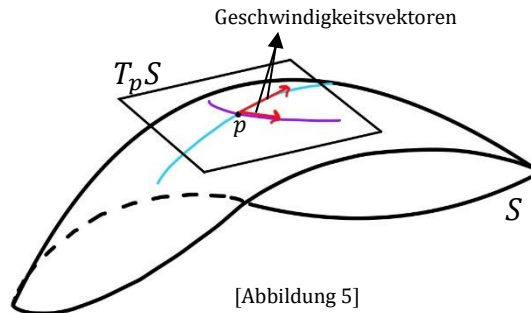
Im Folgenden Kapitel wird das Konzept der Tangentialebene eingeführt und ihre Bedeutung als Differential näher erläutert.

So wie man Kurven durch Geraden approximieren kann, möchte man nun auch einen Weg finden, um Flächen approximieren zu können. Für diese Annäherung verwendet man die einfachsten regulären Flächen, nämlich die Ebenen. Diese Idee motiviert folgende Definition:

Definition 3.2.1 Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $p \in S$. Man nennt die Menge

$$T_p S = \{X \in \mathbb{R}^3 \mid \text{es gibt ein } \varepsilon > 0 \text{ und eine glatte parametrisierte Kurve } c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S \text{ mit } c(0) = p \text{ und } \dot{c}(0) = X\}$$

die **Tangentialebene** von S in p . Die Elemente der Tangentialebene nennt man **Tangentialvektoren**.



Die Definition besagt somit, dass die Tangentialebene der Menge der Geschwindigkeitsvektoren von Kurven im Punkt p entspricht, welche durch den Punkt verlaufen.

Beispiel 3.2.2 Man betrachte die Fläche

$$S = \{u^1 \cdot (1,0)^T + u^2 \cdot (0,1)^T \mid u^1, u^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2,$$

dann entspricht die Tangentialebene für den Punkt $p = (0,0)^T$ dem \mathbb{R}^2 , denn für jeden Vektor $X \in \mathbb{R}^2$ wird durch $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S, i \rightarrow i \cdot X$ eine glatte parametrisierte Kurve definiert mit $\varepsilon > 0, c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$.

Es ist allerdings noch nicht klar, ob es sich bei der Tangentialebene auch tatsächlich um eine Ebene handelt. Dies gilt noch zu beweisen, was die folgende Proposition motiviert.

Proposition 3.2.3 Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$ und (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von S um p . Man setze $u_0 = F^{-1}(p)$, dann gilt:

$$T_p S = \text{Bild}(D_{u_0} F) = D_{u_0} F(\mathbb{R}^2).$$

Beweis: Als erstes wird die Inklusion „ \supseteq “ gezeigt.

Es sei $X \in \text{Bild}(D_{u_0} F)$, dann existiert ein $Y \in \mathbb{R}^2$ mit $X = D_{u_0} F(Y)$.

Man setze $c(t) := F(u_0 + tY)$. Für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ mit $|t| < \varepsilon$ sind alle $u_0 + tY \in U$. Daraus folgt

$$c(0) = F(u_0) = p$$

und

$$\dot{c}(0) = \frac{d}{dt} F(u_0 + tY)|_{t=0} = D_{u_0} F(Y) = X.$$

Somit gilt $X \in T_p S$.

Als nächstes wird die Inklusion „ \subseteq “ gezeigt.

Es sei $X \in T_p S$, d.h. es existiert eine Kurve $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$. Für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ kann angenommen werden, dass c ganz in V verläuft. Nach Proposition 3.1.7 ist

$$u := F^{-1} \circ c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$$

eine glatte parametrisierte Kurve. Man setze $Y := \dot{u}(0) \in \mathbb{R}^2$, dann gilt

$$D_{u_0} F(Y) = \frac{d}{dt} (F \circ u)|_{t=0} = \frac{d}{dt} c|_{t=0} = X.$$

Somit gilt $X \in \text{Bild}(D_{u_0} F)$.⁴

□

Bemerkung 3.2.4 Die Tangentialebene entspricht somit dem Bild des Differentials von F an der Stelle u_0 , was laut Definition 3.1.1 vollen Rang hat. Demzufolge bildet $T_p S$ einen zweidimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^3 und ist somit eine Ebene.

Wie bereits erwähnt, werden reguläre Flächen häufig als Nullstellengebilde einer Funktion definiert, weshalb es sinnvoll ist, speziell für solche Flächen einen Weg zu finden, Tangentialebenen zu bestimmen. Dazu wird, wie auch schon im vorherigen Kapitel, der Gradient verwendet, wie die folgende Proposition zeigt.

Proposition 3.2.5 Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion und $S = f^{-1}(0) \subseteq \mathbb{R}^3$. Für alle $p \in S$ gelte $\text{grad}f(p) \neq 0$, dann gilt:

$$T_p S = \text{grad}f(p)^\perp$$

Für $p \in S$ steht der Gradient von f somit senkrecht auf der Tangentialebene $T_p S$.

⁴ Der Beweis findet sich in Quelle [1] auf Seite 107.

Beweis: Es sei $X \in T_p S$ und $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ eine glatte parametrisierte Kurve mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$. Da c in S verläuft, gilt $(f \circ c)(t) = 0$ für alle $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Durch differenzieren erhält man:

$$0 = \frac{d}{dt} f \circ c|_{t=0} = \langle \text{grad } f(c(0)), \dot{c}(0) \rangle = \langle \text{grad } f(p), X \rangle$$

Somit steht X senkrecht auf $\text{grad } f(p)$ und es gilt $T_p S \subseteq \text{grad } f(p)^\perp$. Da beide Untervektorräume die Dimension zwei haben folgt $T_p S = \text{grad } f(p)^\perp$.⁵

□

Um mit Hilfe dieser Information die Tangentialebene zu bilden, muss man nur zwei linear unabhängige Vektoren berechnen, welche senkrecht zum Gradienten stehen. Diese beiden Vektoren bilden dann die Tangentialebene.

Beispiel 3.2.6 Es seien S und g die in Beispiel 3.1.6 definierte Sphäre und die dazugehörige Funktion, dann ist $S = g^{-1}(0)$. Für den Punkt $p = (1,0,0)^\top \in S$ entspricht der Gradient $\text{grad } g(p) = (2,0,0)^\top$.

Laut Proposition 3.2.5 steht der Gradient senkrecht auf der Tangentialebene, somit müssen nur zwei linear unabhängige und zum Gradienten orthogonale Vektoren gefunden werden, welche dann die Tangentialebene aufspannen. In dem Fall wären die beiden Vektoren $(0,1,0)^\top$ und $(0,0,1)^\top$ ein Beispiel für zwei solche Vektoren und daraus ergibt sich für die Tangentialebene:

$$T_p S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

Man kennt nun das Konzept der linearen Approximation von glatten Abbildungen und regulären Flächen. Kombiniert man beides, erhält man das Konzept der linearen Approximation von glatten Abbildungen, welche auf regulären Flächen definiert sind.

Definition 3.2.7 Es seien S_1 und S_2 reguläre Flächen und $f: S_1 \rightarrow S_2$ eine glatte Abbildung mit $p \in S_1$. Man nennt die Abbildung

$$d_p f : T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

⁵ Der Beweis findet sich in Quelle [1] auf Seite 108.

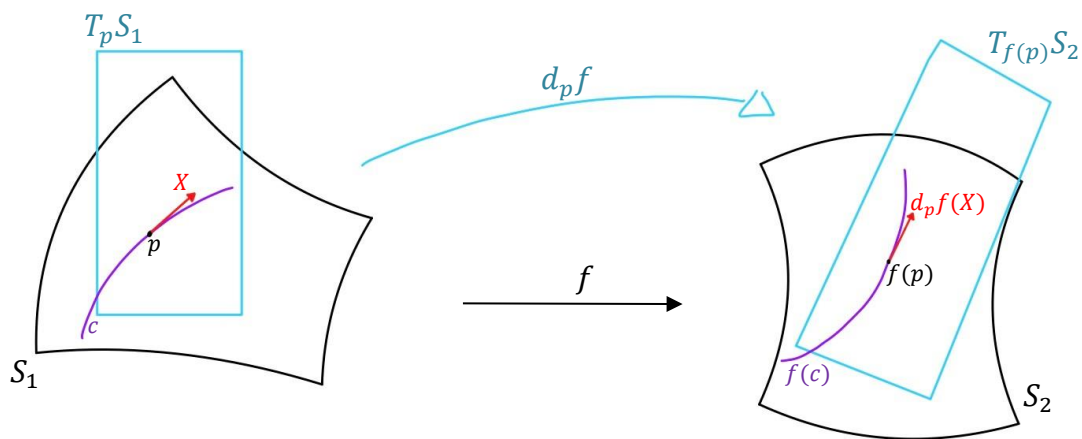
das **Differential** von f in p . Definiert wird die Abbildung durch folgende Vorschrift: Zu $X \in T_p S_1$ wähle eine glatte parametrisierte Kurve $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S_1$ mit $c(0) = p$ und $\dot{c}(0) = X$ und setze

$$d_p f(X) := \frac{d}{dt} (f \circ c)|_{t=0} \in T_{f(p)} S_2.$$

Proposition 3.2.8 Das Differential aus der Definition 3.2.7 ist wohldefiniert, d.h. es hängt nur von X ab, nicht von der Wahl der Kurve c .

Beweis: Der Beweis kann im Buch „Elementare Differentialgeometrie“ von Christian Bär auf Seite 109 nachgelesen werden [1].

Zusammenfassend ist das Differential folglich eine Abbildung, welche Vektoren aus der einen Tangentialebene auf Vektoren aus der anderen Tangentialebene abbildet, wie in der nachfolgenden Darstellung zu sehen ist.



4. Innere Geometrie

Die folgenden Kapitel befassen sich mit der Theorie der inneren Geometrie von regulären Flächen. Die Flächen werden somit nicht mehr nur außen sondern auch von innen betrachtet. Es wird sich dabei wieder an dem Buch „Elementare Differentialgeometrie“ von Christian Bär orientiert [1].

4.1 Erste Fundamentalform

In diesem Kapitel wird die erste Fundamentalform eingeführt und ihre Bedeutung für reguläre Flächen erläutert.

Bisher wurden Flächen immer von außen betrachtet, das heißt es wurde nur darauf geachtet, wie die Fläche im Raum liegt. Jetzt möchte man aber versuchen die Flächen so zu betrachten, als wäre man ein zweidimensionaler Bewohner der Fläche und überlegen, welche Eigenschaften man Flächen von diesem Blickwinkel aus zuschreiben kann.

Dafür muss man nun einen Weg finden, um auf einer regulären Fläche Geometrie betreiben zu können. Darunter fällt zum Beispiel das Messen von Längen einer Kurve oder der Winkel zwischen zwei Vektoren.

Da es sich bei der Tangentialebene um einen zweidimensionalen Unterraum des \mathbb{R}^3 handelt, bietet es sich an, das bereits bekannte Standardskalarprodukt des \mathbb{R}^3 zu verwenden. Dafür schränkt man das Standardskalarprodukt auf $T_p S$ ein, was zu folgender Definition führt:

Definition 4.1.1 Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $p \in S$, dann definiert

$$\langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_p S \times T_p S}$$

ein euklidisches Skalarprodukt auf $T_p S$. Die Zuordnung

$$g_p := \langle \cdot, \cdot \rangle|_{T_p S \times T_p S},$$

die jedem Punkt p die Einschränkung zuordnet, nennt man **erste Fundamentalform**.

Bemerkung 4.1.2 Da es sich bei der ersten Fundamentalform um ein euklidisches Skalarprodukt handelt, bietet sich noch die Möglichkeit g_p durch eine positiv-definite symmetrische Matrix darzustellen. Dafür

braucht man eine Basis des Vektorraums $T_p S$, welche man sich durch eine lokale Parametrisierung beschaffen kann.

Lemma 4.1.3 Die erste Fundamentalform lässt sich durch eine positiv definite Matrix darstellen.

Beweis: Es sei (U, F, V) eine lokale Parametrisierung von einer regulären Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$, $p \in S$ und e_1, e_2 die Standardbasisvektoren von \mathbb{R}^2 . Für $u = F^{-1}(p)$ bilden $D_u F(e_1) = \frac{\partial F}{\partial u^1}(u)$ und $D_u F(e_2) = \frac{\partial F}{\partial u^2}(u)$ eine Basis von $T_p S$. Die Matrix für g_p ist dann gegeben durch:

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &:= g_p(D_u F(e_i), D_u F(e_j)) \\ &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle \end{aligned}$$

Dabei sind offensichtlich alle Matrixeinträge $g_{ij} : U \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen.⁶

□

Beispiel 4.1.4 Es sei S die in Beispiel 3.1.3 aufgeführte affine Ebene mit entsprechender Parametrisierung, wobei X und Y zwei orthonormierte Vektoren sind. Für die Basisvektoren gilt:

$$\begin{aligned} D_u F(e_1) &= \frac{\partial F}{\partial u^1}(u) = X & \forall u \in U \\ D_u F(e_2) &= \frac{\partial F}{\partial u^2}(u) = Y & \forall u \in U \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für die Matrix der Fundamentalform:

$$(g_{ij}(u))_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Bemerkung 4.1.5 Im obigen Beispiel ist die Matrix konstant, was aber im Allgemeinen nicht der Fall ist. Im Buch „Elementare Differentialgeometrie“ von Christian Bär [1] wird gezeigt, dass unter Verwendung der Polarkoordinaten die entsprechende Parametrisierung eine andere Matrix für die Fundamentalform liefert, welche nicht konstant ist. Wie kompliziert die Matrix am Ende ist, hängt somit ganz davon ab, wie geschickt man die Parametrisierung wählt.

⁶ Der Beweis findet sich auf Seite 111 in Quelle [1].

Nun stellt sich nur noch die Frage was passiert, wenn man die lokale Parametrisierung ändert.

Proposition 4.1.6 Es seien (U, F, V) und $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ zwei lokale Parametrisierungen einer Fläche und $(\tilde{g}_{ij})_{ij}$ die zu $(\tilde{U}, \tilde{F}, \tilde{V})$ zugehörige Matrix der ersten Fundamentalform. Dann gilt für die Matrix der erste Fundamentalform:

$$(g_{ij}(u))_{ij} = (D_u \varphi)^\top \cdot (\tilde{g}_{kl}(\varphi(u)))_{kl} \cdot D_u \varphi$$

Beweis: Es bezeichne $\varphi := \tilde{F}^{-1} \circ F$ die Parametertransformation, dann gilt:

$$\begin{aligned} g_{ij}(u) &= \left\langle \frac{\partial F}{\partial u^i}(u), \frac{\partial F}{\partial u^j}(u) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial(\tilde{F} \circ \varphi)}{\partial u^i}(u), \frac{\partial(\tilde{F} \circ \varphi)}{\partial u^j}(u) \right\rangle \\ &= \left\langle \sum_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^k}(\varphi(u)) \cdot \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^i}(u), \sum_l \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^l}(\varphi(u)) \cdot \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j}(u) \right\rangle \\ &= \sum_{kl} \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^i}(u) \cdot \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j}(u) \cdot \left\langle \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^k}(\varphi(u)), \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}^l}(\varphi(u)) \right\rangle \\ &= \sum_{kl} \frac{\partial \varphi^k}{\partial u^i}(u) \cdot \frac{\partial \varphi^l}{\partial u^j}(u) \cdot \tilde{g}_{kl}(\varphi(u)) \end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung.⁷

□

Diese Formel bietet somit eine einfache Möglichkeit die erste Fundamentalform einer Fläche zu berechnen, falls eine andere erste Fundamentalform zu einer anderen lokalen Parametrisierung vorhanden ist.

4.2 Isometrie

Im Folgenden werden die Begriffe Isometrie und lokale Isometrie eingeführt und die Unterschiede erklärt.

⁷ Der Beweis findet sich auf Seite 114 in Quelle [1].

Man kann also eine Fläche aus zwei Perspektiven betrachten, einmal von außen und einmal von innen.

Somit kann es sein, dass von außen betrachtet zwei Flächen sehr unterschiedlich aussehen, von innen betrachtet jedoch kaum zu unterscheiden sind.

Mathematisch gesehen muss es also eine Funktion zwischen derartigen Flächen geben, unter der die von innen betrachteten Eigenschaften gleichbleiben. Demnach ergibt sich folgende Definition:

Definition 4.2.1 Es seien $S_1, S_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ zwei reguläre Flächen. Man nennt eine glatte Abbildung $f: S_1 \rightarrow S_2$ **lokale Isometrie**, falls für jeden Punkt $p \in S_1$ das Differential

$$d_p f: T_p S_1 \rightarrow T_{f(p)} S_2$$

die Gleichung

$$\langle d_p f(X), d_p f(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$$

für alle $X, Y \in T_p S_1$ erfüllt.

Eine lokale Isometrie liefert uns eine genau solche Abbildung, da alles was man innerhalb der Fläche messen kann von der ersten Fundamentalform abhängt und diese bei einer lokalen Isometrie gleichbleibt. Diese Größen nennt man die Größen der inneren Geometrie. Ein paar dieser Größen werden in Kapitel 4.3 näher betrachtet werden.

Beispiel 4.2.2 Es sei S_1 die x - y -Ebene und $S_2 = S^1 \times \mathbb{R}$ die Zylinderfläche, wobei S^1 die Einheitssphäre in \mathbb{R}^2 beschreibt, wie in Beispiel 2.3 mit $r = 1$. Es definiere $f: S_1 \rightarrow S_2$ eine Funktion mit

$$f(x, y, 0) = (\cos(x), \sin(x), y)^\top.$$

Für jeden Punkt $p \in S_1$ bilden e_1 und e_2 eine Orthonormalbasis von $T_p S_1$, und somit gilt für e_1 :

$$\begin{aligned} d_p f(e_1) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(p + te_1) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(x + t, y, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, 0) \\
&= (-\sin(x), \cos(x), 0)^\top
\end{aligned}$$

und für e_2 :

$$d_p f(e_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, 0) = (0, 0, 1)^\top$$

Da $d_p f(e_1)$ und $d_p f(e_2)$ wieder orthonormal sind gilt:

$$\langle e_1, e_2 \rangle = 0 = \langle d_p f(e_1), d_p f(e_2) \rangle$$

Somit ist f eine lokale Isometrie.

Definition 4.2.3 Man nennt eine lokale Isometrie $f: S_1 \rightarrow S_2$, welche zudem bijektiv ist, eine **Isometrie** und die beiden Flächen, zwischen denen eine solche Isometrie existiert, **isometrisch**.

Definition 4.2.4 Falls für jeden Punkt $p \in S_1$ eine offene Umgebung $U_1 \subseteq S_1$, eine offene Teilmenge $U_2 \subseteq S_2$ und eine Isometrie $f: U_1 \rightarrow U_2$ existieren und andersherum für jeden Punkt $q \in S_2$ eine offene Umgebung $U'_2 \subseteq S_2$, eine offene Teilmenge $U'_1 \subseteq S_1$ und eine Isometrie $f: U'_2 \rightarrow U'_1$, so nennt man S_1 und S_2 **lokal isometrisch**.

Bemerkung 4.2.5 Wenn zwei Flächen isometrisch sind, bedeutet das also, dass man sie längentreu aufeinander abbilden kann. Im Gegensatz dazu bezieht sich lokale Isometrie nur auf einen Teil der Fläche. Demnach bedeutet lokal isometrisch, dass zu jedem Punkt eine Umgebung existiert, welche man längentreu auf einer offenen Teilmenge der anderen Fläche abbilden kann. Es folgt also, dass jede Isometrie automatisch lokal isometrisch ist.

Beispiel 4.2.6 Es seien E_1 und E_2 zwei affine Ebenen wie in Beispiel 3.1.3 mit

$$p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es definiere $f: E_1 \rightarrow E_2$ eine Funktion mit

$$f(x) = id(x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Somit gilt für das Differential $d_p f = d_p id$ und daraus folgt, dass für alle $x, y \in T_p E_1$ gilt:

$$\langle d_p f(x), d_p f(y) \rangle = \langle d_p id(x), d_p id(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Da f offensichtlich auch bijektiv ist, handelt es sich bei f somit um eine Isometrie und die Flächen E_1 und E_2 sind isometrisch.

4.3 Größen der inneren Geometrie

Wie bereits bekannt ist, handelt es sich bei den Größen der inneren Geometrie um Größen, welche sich unter lokalen Isometrien nicht ändern. In diesem Kapitel soll ein kleiner Überblick über ein paar der Größen der inneren Geometrie geschaffen werden.

Die Größen, die sich unter lokalen Isometrien nicht ändern, sind genau die Größen, die von der ersten Fundamentalform abhängen. Die erste Fundamentalform ist jedoch auf die Tangentialräume eingeschränkt, weshalb man nun einen Weg finden muss, um reguläre Flächen mit Tangentialräumen zu verbinden, was folgende Definition motiviert:

Definition 4.3.1 Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $p \in S$. Man nennt eine Abbildung $v: S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein **Vektorfeld**, falls für alle Punkte p gilt, dass $v(p) \in T_p S$ ist. Man kann jeden Vektor $v(p) \in T_p S$ eindeutig darstellen durch:

$$v(p) = \sum_{i=1}^3 v^i(p) \cdot e_i(p) \text{ mit } v^i(p) \in \mathbb{R}$$

Dann nennt man das Vektorfeld **differenzierbar**, falls die Koeffizientenfunktionen v^i differenzierbar sind.⁸

⁸ Ein Teil der Definition wurde aus Quelle [11] Seite 1 paraphrasiert.

Ein Vektorfeld ordnet also jedem Punkt einen Tangentialvektor aus seiner Tangentialebene zu.

Möchte man das Vektorfeld jedoch nur entlang einer Kurve betrachten, braucht man ein anderes Konzept, welches in der folgenden Definition beschrieben wird.

Definition 4.3.2 Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und $c: I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve. Man nennt eine Abbildung $v: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein **Vektorfeld an S längs c** , falls für alle $t \in I$ gilt $v(t) \in T_{c(t)}S$.

Beispiel 4.3.3 Ein Beispiel für Vektorfeld längs einer Kurve ist das Geschwindigkeitsfeld $v(t) = \dot{c}(t)$.

Da es sich bei einem Vektorfeld um eine Abbildung handelt, ist es auch interessant sich zu überlegen, wie eine Ableitung für ein Vektorfeld aussehen könnte. Man kann die Funktion einfach ableiten, jedoch liegt die Ableitung dann unter Umständen nicht mehr tangential zur Fläche. Dieses Problem kann man umgehen, indem man die gewünschte Eigenschaft erzwingt, was zu folgender Definition führt.

Definition 4.3.4 Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $c: I \rightarrow S$ eine parametrisierte Kurve, $v: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld an S längs c und $\Pi_p: \mathbb{R}^3 \rightarrow T_pS$ die Orthogonalprojektion im Punkt p mit

$$\Pi_p(X) = X - \langle X, N(p) \rangle \cdot N(p)$$

wobei $N(p)$ der Einheitsnormalenvektor von p an S ist. Dann heißt

$$\frac{\nabla}{dt} v(t) := \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t))$$

mit $t \in I$ die **kovariante Ableitung von v längs c** .

Da die kovariante Ableitung von der ersten Fundamentalform abhängt gehört sie zur inneren Geometrie.

Beispiel 4.3.5 Es sei S die x - y -Ebene und c eine parametrisierte Ebene Kurve mit $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)^\top$. Ein Vektorfeld v an S längs c hat dann die Form $v(t) = (v_1(t), v_2(t), 0)^\top$. Somit gilt:

$$\frac{\nabla}{dt} v(t) = \Pi_{c(t)}(\dot{v}(t))$$

$$\begin{aligned}
&= \Pi_{c(t)}((\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), 0)^\top) \\
&= (\dot{v}_1(t), \dot{v}_2(t), 0)^\top \\
&= \dot{v}(t)
\end{aligned}$$

Folglich stimmen für Ebenen kovariante Ableitungen mit gewöhnlichen Ableitungen überein.

Diese Definition funktioniert jedoch nur für Vektorfelder, welche längs einer Kurve definiert sind. Man möchte nun aber auch noch einen Weg finden, um alle Vektorfelder ableiten zu können.

Definition 4.3.6 Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $v: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein differenzierbares Vektorfeld auf S und $w_p \in T_p S$ ein Tangentialvektor. Für die **kovariante Ableitung** $\nabla_{w_p} v \in T_p S$ von v in Richtung w_p gilt

$$\nabla_{w_p} v := \frac{\nabla}{dt} (v \circ c)(0)$$

mit einer parametrisierten Kurve $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$ und $\dot{c}(0) = w_p$ und für ein differenzierbares Vektorfeld w nennt man die Abbildung $\nabla_w v$ mit

$$(\nabla_w v)(p) := \nabla_{w(p)} v$$

die **kovariante Ableitung von v in Richtung w** .

Die Idee besteht also darin, das gleiche Prinzip wie aus der vorherigen Definition anzuwenden und selbst eine parametrisierte Kurve zu wählen, welche durch die Fläche verläuft.

Bemerkung 4.3.7 Sind v und w zwei Vektorfelder auf S , so wird durch

$$(\nabla_w v)(p) := \nabla_{w(p)} v$$

ein neues Vektorfeld definiert.

Die nächste Größe der inneren Geometrie, welche eingeführt werden soll ist der riemannsche Krümmungstensor, welcher die Krümmung einer Fläche beschreibt. Dafür muss jedoch zuerst noch eine andere Größe eingeführt werden, nämlich die zweite kovariante Ableitung.

Definition 4.3.8 Die **zweite kovariante Ableitung** von z nach w und v wird definiert durch:

$$\nabla_{v,w}^2 z := \nabla_v(\nabla_w z) - \nabla_{\nabla_v w} z$$

Bemerkung 4.3.9 Es ist dabei wichtig auf die Reihenfolge zu achten, da beim Vertauschen ein anderer Wert rauskommen kann.

Definition 4.3.10 Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $p \in S$ ein Punkt, v_p und $w_p \in T_p S$ Tangentialvektoren und z ein Vektorfeld auf S . Der **riemannsche Krümmungstensor** wird definiert durch:

$$R(v_p, w_p)z := \nabla_{v_p, w_p}^2 z - \nabla_{w_p, v_p}^2 z$$

Bemerkung 4.3.11 Der Krümmungstensor berechnet die Differenz zwischen der zweiten kovarianten Ableitung, wenn man die Reihenfolge vertauscht. Das Ergebnis entspricht genau der Krümmung der Fläche im Punkt p .

5 Mannigfaltigkeiten

In den nächsten Kapiteln werden die Begriffe differenzierbare Mannigfaltigkeit und differenzierbare Untermannigfaltigkeit definiert und anhand von Beispielen erklärt. Es wird sich dabei an den Büchern „Riemannsche Geometrie im Großen“ von Detlef Gromoll, Wilhelm Klingenberg und Wolfgang Meyer [2] und „Differentialgeometrie“ von Wolfgang Kühnel [3] orientiert.

5.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Im Folgenden werden topologische Mannigfaltigkeiten definierte sowie differenzierbare Strukturen und differenzierbare Mannigfaltigkeiten.

Definition 5.1.1 Eine n -dimensionale **topologische Mannigfaltigkeit** ist ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis, welcher lokal homöomorph zum \mathbb{R}^n ist, d.h. es existiert ein Homöomorphismus zwischen einer Teilmenge des Hausdorffraums und dem \mathbb{R}^n .

Bei einer topologischen Mannigfaltigkeit handelt es sich also um einen Hausdorffraum, welcher lokal gesehen dem \mathbb{R}^n ähnelt.

Definition 5.1.2 Es sei M eine n -dimensionale topologische Mannigfaltigkeit. Man nennt ein Homöomorphismus, welcher eine offene Teilmenge von M auf eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^n abbildet, **Karte** von M . Man bezeichnet die Menge $\mathcal{A} = \{\varphi_i \mid \varphi_i \text{ ist eine Karte von } M\}$ als **differenzierbarer Atlas** von M , falls gilt:

- (i) Für jeden Punkt p von M existiert eine Karte $\varphi \in \mathcal{A}$, für die p im Definitionsbereich liegt.
- (ii) Die Verkettung $\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ von zwei Karten $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{A}$ ist differenzierbar.

Die erste Bedingung sorgt dafür, dass sich jeder Punkt homöomorph in den \mathbb{R}^n abbilden lässt und die zweite Bedingung, dass die Karten untereinander verträglich sind bezüglich der Differenzierbarkeit.

Definition 5.1.3 Es sei \mathcal{A} ein differenzierbarer Atlas. Man sagt eine Karte φ von M ist mit \mathcal{A} **verträglich**, falls $\mathcal{A} \cup \varphi$ ein differenzierbarer Atlas von M

ist. Falls jede mit \mathcal{A} verträgliche Karte bereits zu \mathcal{A} gehört, nennt man \mathcal{A} auch **differenzierbare Struktur**.

Bei einer differenzierbaren Struktur handelt es sich somit um den größtmöglichen differenzierbaren Atlas einer Mannigfaltigkeit.

Bemerkung 5.1.4 Falls für eine topologische Mannigfaltigkeit eine globale Karte existiert, so bestimmt diese Karte automatisch eine differenzierbare Struktur.⁹

Definition 5.1.5 Eine topologische Mannigfaltigkeit zusammen mit einer differenzierbaren Struktur heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**.

Proposition 5.1.6 Jede abzählbare Punktmenge ist eine nulldimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Beweis: Es sei M eine abzählbare Punktmenge und damit ein Hausdorffraum. Für jeden Punkt $p \in M$ ist die Menge $\{p\}$ die einzige zu \mathbb{R}^0 homöomorphe Umgebung mit dem Homöomorphismus $\varphi_p: \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^0, p \rightarrow 0$ als Karte. Die Menge $\mathcal{A} = \{\varphi_p | p \in M\}$ bildet dann eine differenzierbare Struktur und somit ist M zusammen mit \mathcal{A} eine nulldimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit.¹⁰

□

Bemerkung 5.1.7 Es ist recht einfach zu sehen, dass es sich bei dem Vektorraum \mathbb{R}^n zusammen mit dem Atlas $\mathcal{A} = \{id\}$ um eine differenzierbare Mannigfaltigkeit handelt.

Beispiel 5.1.8 Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die Menge $M := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n | x \in U\}$ bildet zusammen mit der von \mathbb{R}^{n+1} induzierten Topologie einen Hausdorffraum mit abzählbarer Basis. Als Karte verwendet man die Funktion

$$\varphi: M \rightarrow U, (x, y) \rightarrow x.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass es sich bei φ um einen Homöomorphismus handelt. Es sei $V \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge, dann gilt:

⁹ Die Bemerkung wurde aus der Quelle [9] Seite 11 paraphrasiert.

¹⁰ Der Beweis wurde angelehnt an ein Beispiel aus Quelle [9] Seite 12.

$$\varphi^{-1}(V) = \{M \cap (x, y) | x \in V\}$$

Also ist $\varphi^{-1}(V)$ offen bezüglich der Relativtopologie und somit ist φ stetig. Es ist leicht zu zeigen, dass φ injektiv ist:

Es sei (x, y) und $(x', y') \in M$, falls $\varphi((x, y)) = \varphi((x', y'))$ gilt:

$$\begin{aligned} \varphi((x, y)) &= \varphi((x', y')) \\ \Rightarrow x &= x' \\ \Leftrightarrow f(x) &= f(x') \\ \Leftrightarrow y &= y' \end{aligned}$$

Somit gilt für $\varphi((x, y)) = \varphi((x', y'))$, dass $(x, y) = (x', y')$ ist. Nach Konstruktion ist φ bereits surjektiv. Die Umkehrabbildung wird definiert durch

$$\varphi^{-1}(x) = (x, f(x))$$

und ist somit ebenfalls stetig. Damit ist gezeigt, dass es sich bei φ um einen Homöomorphismus handelt.

Die Abbildung φ stellt die einzige Karte für M da, daher bleibt nur noch zu zeigen, dass es sich bei der Menge $\mathcal{A} = \{\varphi\}$ um eine differenzierbare Struktur für M handelt. Offensichtlich liegt jeder Punkt von M im Definitionsbereich von φ , somit ist die erste Bedingung von Definition 5.1.2 erfüllt. Für die zweite Bedingung muss gezeigt werden, dass $\varphi \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar ist. Da φ verkettet mit seiner Umkehrabbildung die Identität ergibt, ist die Verkettung unendlich oft differenzierbar und erfüllt die zweite Bedingung.

Damit wurde gezeigt, dass M zusammen mit der differenzierbaren Struktur \mathcal{A} eine differenzierbare Mannigfaltigkeit bildet.¹¹

Man möchte nun einen Weg finden, um differenzierbare Mannigfaltigkeiten linear approximieren zu können wie in Definition 3.2.1, was folgende Definition motiviert:

Definition 5.1.9 Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit und $p \in M$, dann ist ein **Tangentialvektor** in p eine Äquivalenzklasse von differenzierbaren Kurven $c: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ mit $c(0) = p$, wobei

¹¹ Das Beispiel wurde an ein Beispiel aus Quelle [9] Seite 4 angelehnt.

$$c \sim \tilde{c} \Leftrightarrow (\varphi \circ c)'(0) = (\varphi \circ \tilde{c})'(0)$$

für jede Karte φ von M , die p enthält. Die Menge aller Tangentialvektoren im Punkt p nennt man den **Tangentialraum** $T_p M$.

Wie auch bei den regulären Flächen möchte man nun dazu übergehen eine Ableitung auf Mannigfaltigkeiten zu definieren.

Definition 5.1.10 Es seien M und N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung mit $p \in M$ und $x \in T_p M$ mit $x = [c]_p$. Dann wird die Ableitung von f in p definiert als

$$d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N, x = [c]_p \rightarrow [f \circ c]_{f(p)}.$$

Diese Abbildung nennt man dann auch das **Differential** und $x(f) := d_p f(x) = (f \circ c)'(0)$ die **Richtungsableitung** von f in Richtung x .

Diese Definition stellt eine Verallgemeinerung der Definition 3.2.7 dar.

Beispiel 5.1.11 Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, $p \in M$ ein Punkt und $x \in T_p M$ ein Tangentialvektor. Für das Differential von der Identität in p gilt dann:

$$d_p id: T_p M \rightarrow T_p M, [x] \rightarrow [id \circ x] = [x]$$

Somit folgt für die Richtungsableitung der Identität in Richtung x :

$$d_p id(x) = x(id) = x$$

5.2 Differenzierbare Untermannigfaltigkeit

Im nächsten Kapitel wird der Begriff differenzierbare Untermannigfaltigkeit eingeführt und anhand von Beispielen verdeutlicht. Außerdem wird der Satz vom regulären Wert erklärt und bewiesen.

Definition 5.2.1 Es seien M und N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Man nennt eine differenzierbare Abbildung $f: M \rightarrow N$ **Immersion**, falls für alle Punkte $p \in M$ die induzierte Abbildung $d_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ injektiv ist.

Eine Funktion f kann somit nur dann eine Immersion zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N sein, wenn die Dimension von M kleiner gleich der Dimension von N ist.

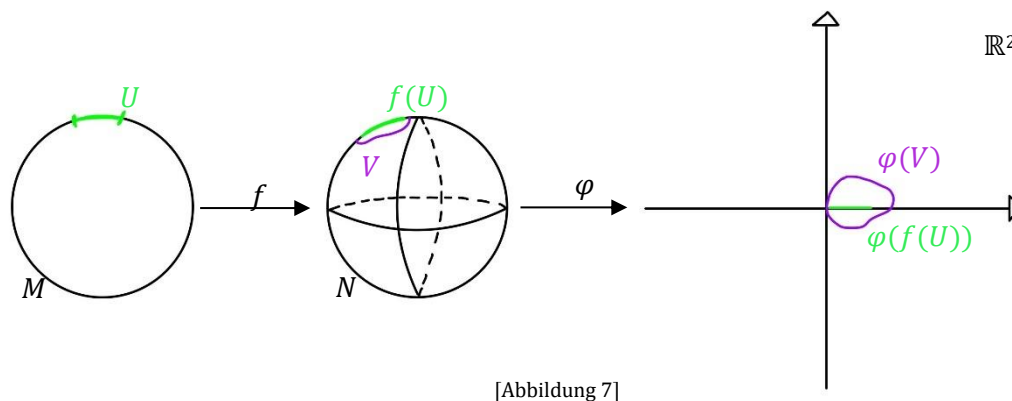
Lemma 5.2.2 Es seien M und N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit der Dimension k und n , $p \in M$ und $f: M \rightarrow N$ eine Immersion, dann existiert eine Umgebung U von p und eine Karte φ von N mit Definitionsbereich V und $f(p) \in V$, so dass

- (i) $\varphi^{k+1}(q) = \dots = \varphi^n(q) = 0$ für alle $q \in V \cap f(U)$
- (ii) Die Abbildung f eingeschränkt auf U ist eine differenzierbare Einbettung, d.h. $f|_U$ ist eine Immersion, welche U homöomorph auf einen Teilraum von N abbildet

Beweis: Den Beweis findet man auf Seite 13 in dem Buch „Riemannsche Geometrie im Großen“ [2].

Aus Lemma 5.2.2 folgt somit, dass eine Immersion lokal eine differenzierbare Einbettung ist.

Beispiel 5.2.3 Die folgende Abbildung veranschaulicht die obige Definition anhand der Einheitsphären des \mathbb{R}^2 und des \mathbb{R}^3 .



Definition 5.2.4 Es seien M, N und f definiert, wie in Lemma 5.2.2. Man nennt M eine **differenzierbare Untermannigfaltigkeit** von N , falls M in N enthalten ist und die Inklusion $i: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Einbettung ist.

Beispiel 5.2.5 Offensichtlich handelt es sich bei der Einheitsphäre $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ und dem \mathbb{R}^2 um differenzierbare Mannigfaltigkeiten. Es soll nun gezeigt werden, dass S eine eindimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 ist.

Es sei $f: S \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2)$ und $U_{ij} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid (-1)^j x^i > 0\}$ mit $i, j \in \{1, 2\}$. Dann ist f eine Immersion und für jeden Punkt $p \in S$ existieren $i, j \in \{1, 2\}$, so dass U_{ij} eine Umgebung von p ist. Die Abbildungen

$$\varphi_{1j}: U_{1j} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \rightarrow (x_2, 0)$$

$$\varphi_{2j}: U_{2j} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \rightarrow (x_1, 0)$$

bilden passende Karten für die Umgebungen, so dass die Bedingungen (i) und (ii) aus Lemma 5.2.2 erfüllt werden. Somit ist gezeigt, dass es sich bei S um eine differenzierbare Untermannigfaltigkeit handelt.

Bisher konnte man nur prüfen, ob es sich bei einer Mannigfaltigkeit um eine Untermannigfaltigkeit handelt. Der folgende Satz liefert nun eine Methode, mit der man eine Untermannigfaltigkeit für eine differenzierbare Mannigfaltigkeit finden kann.

Satz 5.2.6 (Der Satz vom regulären Wert) Es seien M und N zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n und $n - d$, $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung und s ein regulärer Wert von f , d.h. für jedes $m \in f^{-1}(s)$ ist das Differential $D_m f$ surjektiv. Dann gilt

$$U := f^{-1}(s) = \{m \in M \mid f(m) = s\}$$

ist eine abgeschlossene, differenzierbare d -dimensionale Untermannigfaltigkeit von M .

Beweis: Es kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $n = 0$ angenommen werden, sonst wähle $f - n$. Es sei $p \in U$, nach Voraussetzung hat die Matrix $A := df(p)$ vollen Rang, d.h. es gibt $n - d$ linear unabhängige Spalten. Es kann angenommen werden, dass es sich dabei um die letzten $n - d$ Spalten handelt, ansonsten kann man einfach umsortieren. Nach Aufteilung von $z \in M$ zu $z = (x, y)$ mit $x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^{n-d}$ kann $\frac{\partial f}{\partial y}$ als invertierbar angenommen werden und der Satz über implizite Funktionen liefert eine Umgebung $V_0 \times W_0$ von $p = (x_0, y_0)$ mit

$$U \cap (V_0 \times W_0) = \{(x, \varphi(x)) \mid x \in V_0\}$$

und einer C^1 -Abbildung $\varphi: V_0 \rightarrow W_0$, wodurch folgende Abbildung definiert werden kann:

$$F: V_0 \times W_0 \rightarrow \mathbb{R}^n, (x, y) \rightarrow (x, y - \varphi(x))$$

Diese Abbildung erfüllt die Bedingung (i) aus Lemma 5.2.2 und zusammen mit der Inklusion bildet U somit eine Untermannigfaltigkeit für M .¹²

□

5.3 Riemannsche Mannigfaltigkeit

In diesem Kapitel wird die riemannsche Metrik und die riemannsche Mannigfaltigkeit eingeführt.

Definition 5.3.1 Es sei M eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, dann nennt man die Zuordnung

$$g: M \rightarrow L^2(T_p M, R), p \rightarrow g_p$$

riemannsche Metrik, falls sie die folgenden drei Bedingungen erfüllt

- (i) $g_p(X, Y) = g_p(Y, X)$
- (ii) $g_p(X, X) > 0$ für alle $X \neq 0$
- (iii) Die Koeffizienten $g_{ij}(u) := g_{\varphi(u)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}(u)\right)$ sind für alle Karten φ von M und Punkte $u \in U$ differenzierbar.

Das Paar (M, g) nennt man dann **riemannsche Mannigfaltigkeit**.

Beispiel 5.3.2 Eines der wohl einfachsten Beispiele für eine riemannsche Mannigfaltigkeit ist der Vektorraum \mathbb{R}^n zusammen mit dem Standardskalarprodukt.

Aus Kapitel 5.1 ist bereits bekannt, dass es sich bei dem \mathbb{R}^n um eine differenzierbare Mannigfaltigkeit handelt, es bleibt somit nur noch zu prüfen, dass es sich bei dem Standardskalarprodukt um eine riemannsche Metrik handelt.

Die Bedingungen (i) und (ii) sind offensichtlich erfüllt. Für Bedingung (iii) gilt:

$$g_{ij}(u) = g_{\varphi(u)}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}(u)\right)$$

¹² Der Beweis wurde angelehnt an den Beweis aus Quelle [10] Seite 7.

$$\begin{aligned}
&= \left\langle \frac{\partial id}{\partial u^i}(u), \frac{\partial id}{\partial u^j}(u) \right\rangle \\
&= \langle e_i, e_j \rangle
\end{aligned}$$

Die Koeffizienten sind folglich differenzierbar und die Bedingung (iii) ist erfüllt. Also ist \mathbb{R}^n zusammen mit dem Standardskalarprodukt eine riemannsche Mannigfaltigkeit.

Es gibt auch noch eine andere Möglichkeit für die Konstruktion einer riemannschen Metrik, wie die folgende Proposition zeigt:

Proposition 5.3.3 Es sei M eine differenzierbare und (N, g) eine riemannsche Mannigfaltigkeit und $f: M \rightarrow N$ eine Immersion. Dann wird durch

$$(f * g)_p(X, Y) := g_{f(p)}(d_p f(X), d_p f(Y))$$

eine riemannsche Metrik auf M definiert, für alle $p \in M$ und $X, Y \in T_p M$.

Beweis: Um zu zeigen, dass $f * g$ eine riemannsche Metrik auf M definiert, müssen die drei Bedingungen aus Definition 5.3.1 überprüft werden.

Es seien X und $Y \in T_p M$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
(f * g)_p(X, Y) &= g_{f(p)}(d_p f(X), d_p f(Y)) \\
&= g_{f(p)}(d_p f(Y), d_p f(X)) \\
&= (f * g)_p(Y, X)
\end{aligned}$$

Damit ist die erste Bedingung gezeigt. Für die zweite Bedingung gilt:

$$(f * g)_p(X, X) = g_{f(p)}(d_p f(X), d_p f(X)) > 0$$

Somit ist auch die zweite Bedingung erfüllt. Es bleibt nur noch die dritte Bedingung.

$$\begin{aligned}
(f * g)_{ij} &= f * g_{\varphi(u)} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u), \frac{\partial \varphi}{\partial u^j}(u) \right) \\
&= g_{f(\varphi(u))} \left(d_{\varphi(u)} f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^i}(u) \right), d_{\varphi(u)} f \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u^j}(u) \right) \right) \\
&= g_{f(\varphi(u))} \left(\frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u^i}(u), \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u^j}(u) \right)
\end{aligned}$$

$$= g_{ij}$$

Da g_{ij} gemäß Voraussetzung differenzierbar ist, ist somit auch $(f * g)_{ij}$ differenzierbar und die dritte Bedingung ist erfüllt.

Damit ist bewiesen, dass es sich bei $f * g$ um eine riemannsche Metrik auf M handelt.¹³

□

Definition 5.3.4 Die Metrik aus der Proposition 5.3.3 nennt man **zurückgezogene riemannsche Metrik**.

Proposition 5.3.5 Auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit existiert eine riemannsche Metrik

Beweis: Den Beweis findet man auf Seite 72 in dem Buch „Riemannsche Geometrie im Großen“ [2]

Das bedeutet also, dass die riemannsche Mannigfaltigkeit eine Erweiterung der differenzierbaren Mannigfaltigkeit darstellt.

5.4 Riemannsche Untermannigfaltigkeit

In diesem Kapitel werden die Begriffe Isometrie und riemannsche Untermannigfaltigkeit definiert und anhand von Beispielen erklärt.

Definition 5.4.1 Es seien M und N riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ eine differenzierbare Abbildung. Man nennt f eine **lokale Isometrie**, falls für alle Punkte $p \in M$ und $v, w \in T_p M$ gilt:

$$g_p(v, w) = \tilde{g}_{f(p)}(d_p f(v), d_p f(w))$$

Falls f zusätzlich bijektiv ist und sowohl f als auch f^{-1} stetig differenzierbar sind, so nennt man f eine **Isometrie**.

Die lokalen Isometrien sind dabei eine Verallgemeinerung der Definition 4.2.1 und die Isometrien der Definition 4.2.3.

Proposition 5.4.2 Jede isometrische Abbildung ist eine Immersion.

¹³ Der Beweis wurde angelehnt an Seite 186 f. aus Quelle [1].

Beweis: Es seien M und N zwei riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ eine isometrische Abbildung. Um zu zeigen, dass $d_p f$ für alle Punkte $p \in M$ injektiv ist und somit eine Immersion, wird gezeigt, dass der Kern von $d_p f$ die Nullmenge ist.

$$\begin{aligned} d_p f(X) = 0 &\Leftrightarrow \tilde{g}_{f(p)}(d_p f(X), d_p f(X)) = 0 \\ &\Leftrightarrow g_p(X, X) = 0 \\ &\Leftrightarrow X = 0 \end{aligned}$$

Der Kern besteht somit nur aus der Null und somit folgt, dass es sich $d_p f$ um eine injektive Funktion handelt.

□

Definition 5.4.3 Es seien M und N riemannsche Mannigfaltigkeiten und $f: M \rightarrow N$ eine isometrische differenzierbare Abbildung, dann nennt man M eine **riemannsche Untermannigfaltigkeit** von N , falls die Inklusion eine isometrische Einbettung ist.

Beispiel 5.4.4 Man betrachtet die Einheitssphäre und den \mathbb{R}^2 wie in Beispiel 5.2.5 zusammen mit der dort definierten Funktion f . Aus Beispiel 5.3.2 ist bereits bekannt, dass es sich bei dem \mathbb{R}^2 zusammen mit dem Standardskalarprodukt um eine riemannsche Mannigfaltigkeit handelt, dadurch kann man für S eine zurückgezogene riemannsche Metrik definieren.

Um zu zeigen, dass S zusammen mit der zurückgezogenen riemannschen Metrik eine riemannsche Untermannigfaltigkeit ist, muss somit nur noch gezeigt werden, dass f eine isometrische Abbildung ist. Es sei $p \in S$ und $v, w \in T_p S$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \langle d_p f(v), d_p f(w) \rangle &= \langle v(f), w(f) \rangle \\ &= \langle v, w \rangle \end{aligned}$$

Somit ist f eine isometrische Abbildung und S eine riemannsche Untermannigfaltigkeit vom \mathbb{R}^2 .

Bemerkung 5.4.5 Das vorherige Beispiel hat gezeigt, dass man für jede differenzierbare Untermannigfaltigkeit einer riemannschen

Mannigfaltigkeit mit Hilfe der zurückgezogenen riemannschen Metrik eine riemannsche Metrik finden kann.

6 Vergleich Reguläre Flächen und Riemannsche Mannigfaltigkeiten

Bei der Betrachtung von regulären Flächen und riemannschen Mannigfaltigkeiten fällt auf, dass diese ein paar Ähnlichkeiten aufweisen. Daher soll in diesem Kapitel Schritt für Schritt der Zusammenhang zwischen regulären Flächen und riemannschen Mannigfaltigkeiten dargelegt werden. Dieses Kapitel wurde im Wesentlichen selbst erstellt und orientiert sich nur an ein paar Stellen an anderen Quellen, auf welche dann verwiesen wird.

6.1 Reguläre Flächen als differenzierbare Mannigfaltigkeit

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, dass es sich bei regulären Flächen um differenzierbare Mannigfaltigkeiten handelt.

Wie in Kapitel 3.1 bereits erklärt wurde, bestehen reguläre Flächen aus aneinander gehefteten Stücken des \mathbb{R}^2 , was gleichbedeutend damit ist, dass egal wo man die Fläche betrachtet sie dem \mathbb{R}^2 ähnelt. Diese Betrachtungsweise erinnert an die Definition von topologischen Mannigfaltigkeiten, weshalb sich die Frage stellt, ob es sich bei regulären Flächen um zweidimensionale topologische oder sogar differenzierbare Mannigfaltigkeiten handelt.

Um dieser Theorie nachzugehen, werden im Folgenden die Definitionen aus Kapitel 5.1 für reguläre Flächen überprüft, angefangen mit Definition 5.1.1.

Proposition 6.1.1 Reguläre Flächen sind zweidimensionale topologische Mannigfaltigkeiten.

Beweis: Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, dann ist S als Teilmenge eines Hausdorffraum mit abzählbarer Basis wieder ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis zusammen mit der Unterraumtopologie. Die Funktion F^{-1} aus Definition 3.1.1 bildet einen Homöomorphismus zwischen S und \mathbb{R}^2 . Somit ist die Behauptung gezeigt.

□

Proposition 6.1.2 Die Menge aller lokalen Parametrisierungen auf einer regulären Fläche bilden eine differenzierbare Struktur.

Beweis: Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und \mathcal{A} die Menge aller lokalen Parametrisierungen auf S . Aus Definition 3.1.1 und Definition 3.1.2 folgt direkt, dass es sich bei lokalen Parametrisierungen um Karten handelt.

Als nächstes soll gezeigt werden, dass es sich bei \mathcal{A} um einen Atlas handelt. Dafür muss gezeigt werden, dass \mathcal{A} die Bedingungen (i) und (ii) aus Definition 5.1.2 erfüllen. Die erste Bedingung folgt sofort aus der Definition 3.1.1 und die zweite Bedingung aus Korollar 3.1.8.

Es bleibt somit nur noch zu zeigen, dass \mathcal{A} eine differenzierbare Struktur ist. Es sei φ eine Karte von S , dann gilt, dass φ eine Teilmenge von S auf eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^2 abbildet. Es existiert also eine Menge $V \subseteq S$ und eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^2$, sodass gilt:

$$\varphi: V \rightarrow U, \varphi(V) = U$$

ist ein Homöomorphismus. Dann ist aber auch φ^{-1} ein Homöomorphismus mit

$$\varphi^{-1}: U \rightarrow V, \varphi^{-1}(U) = V.$$

Da V das gleiche ist wie $V \cap S$ entspricht das genau der Definition von lokalen Parametrisierungen und somit ist jede Karte von S bereits in \mathcal{A} enthalten. Somit gilt die Behauptung. □

6.2 Reguläre Flächen als riemannsche Mannigfaltigkeiten

Im vorherigen Kapitel wurde gezeigt, dass es sich bei regulären Flächen um differenzierbare Mannigfaltigkeiten handelt. Jetzt will man noch einen Schritt weiter gehen und zeigen, dass reguläre Flächen zusammen mit der ersten Fundamentalform eine riemannsche Mannigfaltigkeit bilden.

Aus Proposition 5.3.5 ist bereits bekannt, dass auf jeder differenzierbaren Mannigfaltigkeit eine riemannsche Metrik existiert. Daher stellt sich die Frage, ob für reguläre Flächen eine neue riemannsche Metrik definiert

werden muss oder ob die erste Fundamentalform bereits alle Anforderungen erfüllt. Diese Überlegung führt zu folgendem Lemma:

Proposition 6.2.1 Die erste Fundamentalform ist eine riemannsche Metrik.¹⁴

Beweis: Um zu beweisen, dass es sich bei der ersten Fundamentalform um eine riemannsche Metrik handelt, müssen die Bedingungen (i), (ii) und (iii) aus Definition 5.3.1 geprüft werden.

Es sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche und g_p die erste Fundamentalform mit $p \in S$. Die Bedingungen (i) und (ii) folgen aus der Definition des Standardskalarprodukts (Definition 4.1.1). Die Bedingung (iii) folgt direkt aus der Lemma 4.1.3. Damit wurde gezeigt, dass die erste Fundamentalform eine riemannsche Metrik ist. □

Korollar 6.2.2 Da es sich bei der ersten Fundamentalform um eine riemannsche Metrik handelt und jede reguläre Fläche eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, wie in Kapitel 6.1 gezeigt wurde, folgt direkt, dass es sich bei einer regulären Fläche zusammen mit der ersten Fundamentalform um eine riemannsche Mannigfaltigkeit handelt.

6.3 Untermannigfaltigkeiten von regulären Flächen

In den vorherigen Kapiteln wurde gezeigt, dass eine reguläre Fläche eine differenzierbare Mannigfaltigkeit ist, somit stellt sich die Frage ob auf regulären Flächen Untermannigfaltigkeiten existieren und wenn ja, wie diese aussehen.

Bemerkung 6.3.1 Eine reguläre Fläche ist ein zweidimensionales Objekt, daher können nur Untermannigfaltigkeiten mit der Dimension Eins oder Null existieren.

Im Folgenden werden anhand von Beispielen ein paar Untermannigfaltigkeiten von regulären Flächen betrachtet werden.

Beispiel 6.3.2 Man betrachte \mathbb{R}^2 als reguläre Fläche und die differenzierbare Funktion

¹⁴ Die Proposition wurde aus Quelle [1] von Seite 184 sinngemäß übernommen.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ mit } x \rightarrow x_1^2 + x_2^2,$$

dann entspricht $f^{-1}(1) = S^1$ der Einheitssphäre aus Beispiel 2.3 mit $r = 1$. Nach dem Satz vom regulären Wert ist dann S^1 eine Untermannigfaltigkeit vom \mathbb{R}^2 , falls es sich bei 1 um einen regulären Wert handelt. Für das Differential gilt:

$$Df(x) = 2x$$

Dieser Term wird nur Null für $x = 0$, für alle anderen Werte hat er den Rang 1 und somit ist das Differential surjektiv. Somit ist S^1 eine Untermannigfaltigkeit vom \mathbb{R}^2 .¹⁵

Da es sich bei S^1 um eine reguläre parametrisierte Kurve handelt, zeigt das Beispiel, dass reguläre parametrisierte Kurven Untermannigfaltigkeiten für reguläre Flächen sein können.

Beispiel 6.3.3 Es sei E eine affine Ebene mit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid u^1, u^2 \in \mathbb{R} \right\}$$

und $a = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine nulldimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit. Da

a eine Teilmenge von E ist, bildet die Inklusion eine Immersion zwischen a und E und erfüllt die Bedingung (ii) aus Lemma 5.2.2. Außerdem erfüllt offensichtlich jede Karte von E die Bedingung (i). Somit ist a eine nulldimensionale differenzierbare Untermannigfaltigkeit von E .

Neben regulären parametrisierten Kurven können somit auch Ein-Punkt Mengen eine Untermannigfaltigkeit für reguläre Flächen darstellen.

6.4 Innere Geometrie

Anstatt reguläre Flächen als Mannigfaltigkeiten zu betrachten, kann man auch Mannigfaltigkeiten als eine Verallgemeinerung von regulären Flächen betrachten und somit die riemannsche Metrik als eine Verallgemeinerung der ersten Fundamentalform. Dadurch stellt sich die Frage, ob sich die Größen der inneren Geometrie auch auf riemannschen Mannigfaltigkeiten

¹⁵ Das Beispiel wurde an ein Beispiel aus Quelle [10] Seite 6 angelehnt.

definieren lassen. Dieser Frage soll im Folgenden anhand der kovarianten Ableitung nachgegangen werden.

Da das Vektorfeld nicht über die erste Fundamentalform definiert wurde, kann es für Mannigfaltigkeiten genauso wie für reguläre Flächen definiert werden.

Definition 6.4.1 Ein **Vektorfeld** auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Funktion $X: M \rightarrow \bigcup_{p \in M} T_p M$ mit $X(p) \in T_p M$. Man nennt das Vektorfeld **differenzierbar**, falls für alle Karten φ von M und für jeden Punkt $p \in M$ die Richtungsableitungen $d_{\varphi(p)}f(X(p))$ differenzierbar sind.¹⁶

Im Buch „Differentialgeometrie“ von Wolfgang Kühnel [3] wird die kovariante Ableitung auf Mannigfaltigkeiten wie folgt definiert:

Definition 6.4.2 Eine **kovariante Ableitung** auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) ist eine Zuordnung

$$X, Y \rightarrow \nabla_X Y$$

die je zwei differenzierbaren Vektorfeldern X, Y ein weiteres differenzierbares Vektorfeld $\nabla_X Y$ zuordnet, so dass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind, wobei $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion bezeichnet:

- (i) $\nabla_{X_1+X_2} Y = \nabla_{X_1} Y + \nabla_{X_2} Y$
- (ii) $\nabla_{fX} Y = f \cdot \nabla_X Y$
- (iii) $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$
- (iv) $\nabla_X (fY) = f \cdot \nabla_X Y + (X(f)) \cdot Y$

Proposition 6.4.3 Die kovariante Ableitung auf reguläre Flächen erfüllt alle Eigenschaften für die kovariante Ableitung auf riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Beweis: Es seien X_1, X_2, X, Y_1, Y_2, Y differenzierbare Vektorfelder auf S und $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Für jedes $p \in S$ gilt dann:

(i)

$$\nabla_{X_1+X_2} Y(p) = \frac{\nabla}{dt} (Y \circ (c_1 + c_2))(0)$$

¹⁶ Die Definition wurde aus Quelle [2] Seite 21 f. sinngemäß übernommen.

$$\begin{aligned}
&= \frac{\nabla}{dt} (Y \circ c_1)(0) + \frac{\nabla}{dt} (Y \circ c_2)(0) \\
&= \nabla_{X_1} Y(p) + \nabla_{X_2} Y(p)
\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\nabla_{fX} Y(p) &= \frac{\nabla}{dt} (Y \circ (f(p) \cdot c))(0) \\
&= f(p) \frac{\nabla}{dt} (Y \circ c)(0) \\
&= f(p) \cdot \nabla_X Y(p)
\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}
\nabla_X (Y_1 + Y_2)(p) &= \frac{\nabla}{dt} ((Y_1 + Y_2) \circ c)(0) \\
&= \frac{\nabla}{dt} (Y_1 \circ c)(0) + \frac{\nabla}{dt} (Y_2 \circ c)(0) \\
&= \nabla_X Y_1(p) + \nabla_X Y_2(p)
\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}
\nabla_X (f \cdot Y) &= \frac{\nabla}{dt} ((f \cdot Y) \circ c)(0) \\
&= f \cdot \frac{\nabla}{dt} (Y \circ c)(0) + Y \cdot \frac{\nabla}{dt} (f \circ c)(0) \\
&= f \cdot \nabla_X Y(p) + Y \cdot X_p(f)
\end{aligned}$$

Da dies für jeden Punkt $p \in S$ gilt, folgt die Behauptung.¹⁷

□

Die vorherige Proposition hat somit bewiesen, dass man die Größen der inneren Geometrie auch auf riemannschen Mannigfaltigkeiten definieren kann und insbesondere, dass die in Definition 6.4.2 definierte kovariante Ableitung eine Verallgemeinerung für die in Definition 4.3.6 definierte kovariante Ableitung darstellt.

¹⁷ Der Beweis wurde angelehnt an einen Beweis aus Quelle [1] Seite 175.

7 Literaturverzeichnis

- [1] Christian Bär (2010): Elementare Differentialgeometrie, 2.Auflage, Walter de Gruyter
- [2] Detlef Gromoll, Wilhelm Klingenberg, Wolfgang Meyer (1975): Riemannsche Geometrie im Großen, 2.Auflage, Springer-Verlag
- [3] Wolfgang Kühnel (2013): Differentialgeometrie, 6.Auflage, Springer Spektrum
- [4] <https://www.deutsche-biographie.de/sfz69883.html>
- [5] https://www.uni-hannover.de/fileadmin/luh/content/alumni/unimagazin/2008_zahlen_glo_balisierung/08_1_2_18_21_smoczyk.pdf
- [6] <https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf>
- [7] <https://en.wikiquote.org/wiki/Euclid>
- [8] https://www.biancahoegel.de/geometrie/geometrie_euklid.htm
- [9] <https://www.dmg.tuwien.ac.at/schuster/SkriptAnaMannig.pdf>
- [10] https://math.uni-paderborn.de/fileadmin/mathematik/ag/rg/Job_Kuit/Analysis_2/Ablatt8.pdf
- [11] http://www.math.uni-bremen.de/~michaelh/Lehrveranstaltungen/mathphysIV_SS05/Einfuehrung_Lie-Gruppen_und_Lie-Algebren.pdf

8 **Abbildungsverzeichnis**

[Abbildung 1] Eigene Darstellung angelehnt an Abb. 28 aus Quelle [1]

[Abbildung 2] Eigene Darstellung angelehnt an Abb. 28 aus Quelle [1]

[Abbildung 3] Eigene Darstellung

[Abbildung 4] Eigene Darstellung

[Abbildung 5] Eigene Darstellung

[Abbildung 6] Eigene Darstellung

[Abbildung 7] Eigene Darstellung