Universität des Saarlandes

Fakultät für Mathematik und Informatik
Fachrichtung Mathematik

Arbeit zur Erlangung des akademischen Grades
Bachelor of Science

Hilbertsudokus

vorgelegt von: Martin Michajlow
betreut von: Prof. Dr. Moritz Weber

Eidesstattliche Selbstständigkeitserklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich die vorliegende Arbeit eigenständig und nur unter Verwendung der angegeben Literatur und Hilfsmittel, sowie der Hilfestellung durch meinen Betreuer Prof. Dr. Moritz Weber, verfasst habe, und das übernommene Ergebnisse aus anderen Arbeiten eindeutig als solche ausgezeichnet sind.

Saarbrücken, 9. Mai 2018, ...

Martin Michajlow

Danksagung

Ich möchte mich bei Prof. Dr. Moritz Weber, der mich beim Schreiben dieser Arbeit betreut hat, herzlich bedanken für die Zeit, Mühe und Aufmerksamkeit, die Inspiration und die Freundlichkeit, die er mir entgegengebracht hat, und die Freiheit die er mir gelassen hat. Außerdem möchte ich mich bei meinen Freunden und Verwandten, von denen mich jeder auf seine eigene Weise beim Prozess des Schreibens begleitet hat, durch Ermutigung, Ermunterung oder Ablenkung, und durch jede Art von besonderer Unterstützung, von Herzen bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

1.1 Einführung

Die folgende Arbeit beschäftigt sich mit dem mathematischen Konzept des *Hilbertsudokus*. Ein Hilbertsudoku ist eine $N \times N$-Matrix $H := (p_{ij})$, deren Einträge Projektionen auf einem Hilbertraum $\mathscr{H}$ sind und für alle $i \in [N]$ erfüllen:

$$\sum_{k=1}^{N} p_{ki} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik} = \mathbb{1}_{\mathscr{H}}. \tag{1}$$

Hilbertsudokus wurden von meinem Bachelorbetreuer Prof. Dr. Moritz Weber eingeführt und in Anlehnung an Hilberträume und Sudokus so benannt. Zentrales Objekt der Arbeit sind N-Konfigurationen auf Hilberträumen. Eine N-Konfiguration $((p_{ij}), \mathcal{A})$ auf $\mathscr{H}$ ist eine $N \times N$-Matrix, die an der (i,j)-ten Stelle für $(i,j) \in \mathcal{A}$ die Projektion p_{ij} auf $\mathscr{H}$ als Eintrag, und für $(i,j) \in \{1,\ldots,N\}^2 \backslash \mathcal{A}$ keinen Eintrag hat, wobei $\mathcal{A} \subset \{1,\ldots,N\}^2$ gilt. Dabei müssen vollaufgefüllte Zeilen und Spalten obige Summenbedingung erfüllen, und ansonsten Einträge aus der gleichen Zeile oder Spalte orthogonal zueinander stehen. Die Frage nach der Lösbarkeit einer N-Konfiguration durch ein Hilbertsudoku (das heißt eine Auffüllung der leeren Einträge, sodass ein Hilbertsudoku entsteht) ist zentrales Thema der Arbeit und inspiriert durch die Frage nach Modellen der symmetrischen Quantengruppe S_n^+ (s. [6]).

1.2 Zentrale Ergebnisse

Hilbertsudokus, N-Konfigurationen und das Konzept der Lösbarkeit werden definiert (s. 3.1). Genauer werden *gewöhnliche* Hilbertsudokus (3.2.1) und N-Konfigurationen (3.2.10) untersucht, das heißt solche, in denen jeder Eintrag eine Projektion auf das lineare Erzeugnis einer Teilmenge einer festen Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}^d$ (also einer Basis aus paarweise orthogonalen Vektoren) ist. Es wird gezeigt, dass die Menge der bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnlichen N-Hilbertsudokus eine Gruppenstruktur trägt und isomorph ist zu $(S_N)^d$. Die Lösbarkeit einer bezüglich der Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ gewöhnlichen N-Konfiguration durch ein bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliches N-Hilbertsudoku wird vollständig charakterisiert (3.2.12). In [6] wird die Frage gestellt, wann eine N-Konfiguration lösbar ist, deren nicht-leere Einträge genau die der ersten r Zeilen sind, für ein $r \in \{2,\ldots,N-2\}$. Es wird gezeigt, dass eine solche N-Konfiguration, wenn sie gewöhnlich bezüglich $\mathcal{B}$ ist, immer durch ein bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliches N-Hilbertsudoku gelöst wird (3.5.6). Außerdem wird gezeigt, wie man aus einem gewöhnlichen Hilbertsudoku, das eine bestimmte Form hat, immer ein nicht-kommutatives N-Hilbertsudoku (also eines, in dem zwei Einträge existieren, die nicht kommutieren) gewinnen kann (3.2.13).
Desweiteren wird eine formale Grundlage für die natürliche Ähnlichkeitsbeziehung von Hilbertsudokus gegeben, die wir *Isotopie* nennen (4.2.7), und es werden Isotopieinvarianten aufgezeigt (4.3). Es werden (N,d)-*Dimensionssudokus* eingeführt (4.4), $N \times N$-Matrizen mit Einträgen aus $\{0,\ldots,d\}$, die sich pro Zeile und Spalte zu d aufsummieren. Ersetzt man in einem N-Hilbertsudoku auf $\mathbb{C}^d$ jede Projektion durch ihren Rang, so erhält man ein (N,d)-

Dimensionssudoku (4.4.2), wie beispielsweise für $(N, d) = (4, 5)$:

$$\begin{pmatrix} \langle e_2 + i \cdot e_3, e_5 \rangle & \{0\} & \langle e_1, e_2 - i \cdot e_3 \rangle & \langle e_4 \rangle \\ \langle e_1 \rangle & \langle e_2, e_3, e_4 \rangle & \langle e_5 \rangle & \langle 0 \rangle \\ \langle e_2 - i \cdot e_3, e_5 \rangle & \langle e_1 + e_5 \rangle & \langle e_2 + i \cdot e_3 \rangle & \langle e_1 - e_5 \rangle \\ \{0\} & \langle e_1 - e_5 \rangle & \langle e_4 \rangle & \langle e_2, e_3, e_1 + e_5 \rangle \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Auf der Menge der (N, d)-Dimensionssudokus wird eine natürliche Äquivalenzrelation definiert (4.5.2), die erfüllt, dass isotope N-Hilbertsudokus auf $\mathbb{C}^d$ durch obige Transformation in äquivalente Dimensionssudokus überführt werden (4.5.5). Sinn der Einführung von Dimensionssudokus liegt besonders darin, dass dies eine weitere Isotopieinvariante liefert, und dass die Berechnung der Isotopieklassen von N-Hilbertsudokus auf $\mathbb{C}^d$ so vereinfacht wird, da sich die Äquivalenzklassen von (N, d)-Hilbertsudokus leicht mit dem Computer berechnen lassen. Für die Fälle $(N, d) = (4, 3), (N, d) = (4, 4)$ wurde dies mit dem Computeralgebrasystem GAP getan (4.5.6, 4.5.8). Eine *NK-Wurzel* W auf einem N-Hilbertsudoku H (5.2.10) ist eine maximale Menge von Paaren ungleicher Elemente aus $\{1, \dots, N\}^2$, sodass die Nicht-Kommutativität von jeweils zwei Paaren von Einträgen aus H mit Indizes aus W unter den Summengleichungen (1) äquivalent ist. Beispielsweise ist für

$$H := \begin{pmatrix} p & \mathbb{1}_{\mathscr{H}} - p & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_{\mathscr{H}} - p & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & \mathbb{1}_{\mathscr{H}} - q \\ 0 & 0 & \mathbb{1}_{\mathscr{H}} - q & q \end{pmatrix}$$

die Nicht-Kommutativität aller Paare von Einträgen von H, bei denen der erste einen Index in $\{1, 2\}^2$ und der zweite in $\{3, 4\}^2$ hat, äquivalent. NK-Wurzeln auf Hilbertsudokus liefern Isotopieinvarianten nicht-kommutativer Hilbertsudokus (5.4.5) und können hilfreich sein, die Frage nach der Existenz von nicht-kommutativen Hilbertsudokus bestimmten Typs zu verneinen. Ähnlich werden NK-Wurzeln auf Dimensionssudokus so definiert (5.5.8), dass eine NK-Wurzel auf einem N-Hilbertsudoku auf $\mathbb{C}^d$ auch NK-Wurzel auf dem zugehörigen Dimensionssudoku (s. obige Transformation) ist (5.5.10). Da sich die NK-Wurzeln auf Dimensionssudokus leicht berechnen lassen, wird so die Berechnung der Isotopieklassen nicht-kommutativer N-Hilbertsudokus auf $\mathbb{C}^d$ vereinfacht. Zuletzt werden noch mit *Rechteckstransformationen* (6) eine bestimmte Art von Abbildungen auf Hilbert- und Dimensionssudokus eingeführt, mit denen sich unter Vorraussetzung der Gültigkeit von Vermutung 6.2.16 die nicht-triviale Aussage zeigen lässt, dass zu jedem Dimensionssudoku ein gewöhnliches Hilbertsudoku existiert, dass sich durch obige Transformation in dieses überführen lässt (6.2.18).

1.3 Bezug zu anderen Theorien

Ein N-latin square ist eine $N \times N$-Matrix mit Einträgen aus $\{1, \dots, N\}$, sodass jede Zahl aus $\{1, \dots, N\}$ pro Zeile und pro Spalte genau einmal vorkommt. Die Angabe eines N-latin square ist äquivalent zur Angabe eines *klassischen* N-Hilbertsudokus H auf $\mathbb{C}^N$ (s. 3.3.1), d.h. dass jede Projektion aus H auf $\mathrm{Span}(e_i)$ projiziert, für ein $i \in \{1, \dots, N\}$. Somit gelten alle Aussagen über N-latin squares analog für klassische Hilbertsudokus. Insbesondere können Sudokus, die einen Spezialfall von N-latin squares darstellen (s. [2]), als Speziallfall von klassischen N-Hilbertsudokus betrachtet werden. N-Hilbertsudokus erweitern N-latin squares in dem Sinne, dass es N-partial latin squares (s.3.3.5) gibt, die nicht durch ein N-latin square vervollständigt werden können, als klassisches N-Hilbertsudoku jedoch lösbar sind (s.3.3.8). In der Theorie der *Quantengruppen* werden Hilbertsudokus auch als *magic unitaries* (s. [9]) und *projective permutation matrix* (s. [10]) studiert. Benjamin Musto und Jamie Vicary führten 2016 *quantum latin squares* (der Dimension N) ein (s. [5]), $N \times N$-Matrizen deren Einträge Einheitsvektoren auf $\mathbb{C}^N$ sind, sodass die Einträge jeder Zeile und jeder Spalte jeweils zusammengenommen eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^N$ bilden. Die Angabe eines quantum latin square der Dimension N ist äquivalent zur Angabe eines N-Hilbertsudokus auf $\mathbb{C}^N$, in dem jede Projektion Rang 1 hat. Die meisten Ergebnisse der Arbeit sind nicht im Bezug auf andere Quellen entstanden.

1.4 Aufbau der Arbeit

In Section 2 werden Hilfsaussagen zu Hilberträumen, Operatoren und Projektionen auf Hilberträumen gesammelt. In Section 3 werden Hilbertsudokus und N-Konfigurationen eingeführt. Es werden die Speziallfälle von *gewöhnlichen*, *klassischen* und N^2-*Block*- Hilbertsudokus, (r, N)-*Zeilenkonfigurationen*, (r, s, N)- *Rechteckskonfigurationen* und *direkten Summen* von Hilbertsudokus diskutiert. In Section 4 wird das Konzept der Isotopie von Hilbertsudokus vermöge der Gruppen G_N (4.1) und $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ (4.2) eingeführt und Isotopieinvarianten aufgezeigt (s.4.3). In Section 4.4 werden Dimensionssudokus eingeführt und die natürliche Gruppenoperation von G_N auf Dimensionsudokus formal erklärt (4.5). In Section 5 werden zunächst NK-Wurzeln auf Hilbertsudokus eingeführt und gezeigt, dass Isotopietransformationen die NK-Wurzeln eines Hilbertsudokus eineindeutig in die NK-Wurzeln des Bildes überführen (5.3.4). In 5.5 werden NK-Wurzeln auf Dimensionssudokus eingeführt. Es wird gezeigt, dass jede NK-Wurzel auf einem N-Hilbertsudoku auf $\mathbb{C}^d$ auch NK-Wurzel auf dem zugehörigen Dimensionssudoku ist (5.5.10), wodurch ein Vorgehensweise zur systematischen Berechnung der nicht-kommutativen N-Hilbertsudokus auf $\mathbb{C}^d$ gegeben wird (5.5.12). Es wird gezeigt, wie sich NK- Wurzeln in übersichtlicher Weise durch Adjazenzmatrizen der Menge der *NK-Paare* (s. 5.5.1) auf einem Dimensionssudoku bestimmen und darstellen lassen (s. 5.7). In 5.8 wird gezeigt, welche Äquivalenzklassen von $(4, 3)$- und $(4, 4)$-Dimensionssudokus nicht-kommutative Lösungen zulassen, und beispielhaft die Isotopieklassen von nicht-kommutativen Lösungen eines bestimmten $(4, 3)$-Dimensionssudokus bestimmt. In Section 6 werden Rechteckstransformationen auf Hilbert- und Dimensionssudokus eingeführt. Es wird gezeigt, dass zwei unterschiedliche gewöhnliche N-Hilbertsudokus auf $\mathbb{C}^d$ (s.6.2.14), bzw. zwei unterschiedliche (N, d)-Dimensionssudokus (s. 6.1.10) durch eine Folge von Rechteckstransformationen ineinander überführt werden können. Außerdem wird gezeigt, dass unter Vorraussetzung der Gültigkeit von Vermutung 6.2.16 gilt, dass jedes (N, d)-Dimensionssudoku durch ein gewöhnliches N-Hilbertsudoku auf $\mathbb{C}^d$ gelöst wird (s.6.2.18). In 7 werden die über die Arbeit hinweg gestellten offenen Fragen zusammengetragen, und der Appendix (8) enthält den für 4.5.6 und 4.5.8 genutzten GAP-Quellcode.

2 Hilberträume

Die folgende Sektion enthält einige Definitionen und Aussagen über Hilberträume, Operatoren und Projektionen auf Hilberträumen, die für Behandlung von Fragen zu Hilbertsudokus wichtige Hilfsmittel darstellen. Ein Teil davon ist einschlägigen Lehrbüchern und Vorlesungsskripten entnommen, ein weiterer Teil besteht aus speziellere Aussagen.

2.1 Komplexe Hilberträume

Definition 2.1.1: (s.[3]) Sei $\mathscr{V}$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$. Ein *Skalarprodukt* auf $\mathscr{V}$ ist eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathscr{V} \times \mathscr{V} \to \mathscr{V}$, die erfüllt:

1. $\langle x, x\rangle \geq 0$, für alle $x \in \mathbb{V}$,
2. $\langle x, x\rangle = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ gilt,
3. $\langle x + \lambda \cdot y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \overline{\lambda} \cdot \langle y, z\rangle$, $\langle x, y + \mu \cdot z\rangle = \langle x, y\rangle + \mu \cdot \langle x, z\rangle$ für alle $x, y, z \in \mathscr{V}$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
4. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ für alle $x, y \in \mathscr{V}$.

Bemerkung 2.1.2: (s.[3]) Sei $\mathscr{V}$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{C}$ und $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein Skalarprodukt auf $\mathscr{V}$. Dann induziert $\langle\cdot,\cdot\rangle$ eine Norm auf $\mathscr{V}$ durch die Abbildung $\|\cdot\| : \mathscr{V} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \to \sqrt{\langle x, x\rangle}$. Das Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ heißt vollständig, wenn die induzierte Norm $\|\cdot\|$ vollständig ist.

Definition 2.1.3: (s.[3]) Ein *komplexer Hilbertraum* ist ein Vektorraum $\mathscr{H}$ über dem Körper $\mathbb{C}$ zusammen mit einem vollständigen Skalarprodukt $\langle .,. \rangle$ auf $\mathscr{H}$.

Bemerkung 2.1.4: In der gesamten folgenden Arbeit bezeichne $\mathscr{H}$ immer einen beliebigen, separablen und komplexen Hilbertraum und $\langle .,. \rangle$ das auf ihm definierte Skalarprodukt.

Satz 2.1.5 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung): *(s.[3]) Für $x, y \in \mathscr{H}$ gilt*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \cdot \langle y, y\rangle,$$

und es gilt genau dann Gleichheit, wenn x und y linear abhängig sind.

Definition 2.1.6: (s.[3]) Sei $X \subset \mathscr{H}$. Dann bezeichnen wir mit

$$X^{\perp} := \{x \in \mathscr{H} \mid x \perp y \text{ für alle } y \in V\}$$

das *orthgonale Komplement* von X.

Definition 2.1.7: (s.[3]) Eine Teilmenge $V \subset \mathscr{H}$ heißt *Unterhilbertraum*, wenn V ein Teilvektorraum von $\mathscr{H}$ ist und versehen mit dem eingeschränkten Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle|_{V\times V}$ wieder einen Hilbertraum bildet.

Lemma 2.1.8: *(s.[3]) Für eine Teilmenge $V \subset \mathscr{H}$ sind äquivalent:*

1. *V ist bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ abgeschlossener Teilvektorraum von $\mathscr{H}$,*

2. V ist ein Unterhilbertraum von $\mathscr{H}$.

Lemma 2.1.9: *(s.[3]) Sei $V \subset \mathscr{H}$ ein abgeschlossener Teilraum, also ein Unterhilbertraum. Dann ist $V^\perp$ ebenfalls ein Unterhilbertraum von $\mathscr{H}$ und es gilt:*

$$\mathscr{H} = V \oplus V^\perp.$$

Lemma 2.1.10: *Seien $V, W \subset \mathscr{H}$ abgeschlossene Teilräume mit $V \perp W$, $V \oplus W = \mathscr{H}$. Dann gilt $V = W^\perp, W = V^\perp$.*

Beweis: Aus $V \perp W$ folgt $V \subset W^\perp$. Sei nun $x \in W^\perp$. Dann existiert eine eindeutige Zerlegung $x = x_V + x_W,$ mit $x_V \in V, x_W \in W.$, und es gilt

$$0 = \langle x, x_W\rangle = \langle x_V, x_W\rangle + \langle x_W, x_W\rangle = \langle x_W, x_W\rangle.$$

Also gilt $x_W = 0$ und $x \in V$. Damit folgt $V = W^\perp$ und analog folgt $W = V^\perp$. ■

Bemerkung 2.1.11: Ist $\mathscr{H}$ ein endlich dimensionaler Hilbertraum, so ist jeder Teilvektorraum $V \subset \mathscr{H}$ abgeschlossen bezüglich $\langle\cdot,\cdot\rangle$ und somit ein Unterhilbertraum.

Notation 2.1.12: Es sei $\mathbb{N}^* := \{1, 2, 3, \dots\}$, für ein $d \in \mathbb{N}^*$ sei $[d] := \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq d\}$ und $[0] := \emptyset$.

Im Folgenden sei immer $d \in \mathbb{N}^*$

Beispiel 2.1.13: $\mathbb{C}^d$ bildet zusammen mit dem Standardskalarprodukt

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}, (\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_d \end{pmatrix}) \mapsto \sum_{i=1}^{d} \overline{x_i} \cdot y_i,$$

einen Hilbertraum.

Notation 2.1.14: Für $i \in [d]$ bezeichnen wir im Folgenden den i-ten kanonischen Basisvektor von $\mathbb{C}^d$ als e_i.

Konvention 2.1.15: Sei $d \in \mathbb{N}^*$. Dann definieren wir $\mathrm{Span}(\emptyset) := \{0\} \subset \mathbb{C}^d$.

Notation 2.1.16: Seien $S, S' \subset \mathscr{H}$ mit $S \neq \emptyset, S' \neq \emptyset$. Dann schreiben wir $S \perp S'$, falls $x \perp y$ für alle $x \in S, y \in S'$ gilt.

Bemerkung 2.1.17: Nach 2.1.16 gilt insbesondere für jede Menge $S \subset \mathscr{H}$ $S \perp \emptyset$.

Lemma 2.1.18: *Seien $S, S' \subset \mathscr{H}$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Span}(S) \perp \mathrm{Span}(S') \Leftrightarrow S \perp S'.$$

Beweis: Angenommen, eine der beiden Mengen wäre leer, ohne Einschränkung also $S = \emptyset$. Dann gilt $\mathrm{Span}(S) = \{0\}$ nach Konvention 2.1.15 und klarerweise würde $\mathrm{Span}(S) \perp \mathrm{Span}(S')$ gelten. Nach Bemerkung 2.1.17 würde gelten $S \perp S'$. Angenommen also, $S \neq \emptyset, S' \neq \emptyset$. Wegen $S \subset \mathrm{Span}(S)$, $S' \subset \mathrm{Span}(S')$ folgt dann die rechte Seite der Äquivalenz aus der linken. Seien nun $x \in \mathrm{Span}(S), y \in \mathrm{Span}(S'), n, m \in \mathbb{N}^*, v_1, \ldots, v_n \in S, w_1, \ldots, w_m \in S'$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{C}$ mit

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i,$$
$$y = \sum_{j=1}^{m} \mu_j \cdot w_j.$$

Angenommen, die rechte Seite der Äquivalenz würde gelten. Dann würde auch gelten:

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle =&\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot v_i, \sum_{j=1}^{m} \mu_j \cdot w_j\rangle \\ =& \sum_{i\in[n], j\in[m]} \overline{\lambda_i}\mu_j \cdot \langle v_i, w_j\rangle \\ =& \sum_{i\in[n], j\in[m]} \overline{\lambda_i}\mu_j \cdot 0 \\ =&0.\end{aligned}$$

Damit ist die Aussage bewiesen. ■

Lemma 2.1.19: *Sei B eine Basis von $\mathbb{C}^d$. Seien $S, S' \subset B$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Span}(S') = \mathrm{Span}(S \cap S').$$

Beweis: Im Fall $S \cap C' = \emptyset$ gilt wegen der linearen Unabhängigkeit von B und Konvention 2.1.15:

$$\mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Span}(S') = \{0\} = \mathrm{Span}(\emptyset) = \mathrm{Span}(S \cap S').$$

Im Fall $S \subset S'$ gilt auch $\mathrm{Span}(S) \subset \mathrm{Span}(S')$, und damit

$$\mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Span}(S') = \mathrm{Span}(S) = \mathrm{Span}(S \cap S').$$

Im Fall $S \not\subset S'$ und $S' \not\subset S$ existieren ein $s \in \mathbb{N}^*$, paarweise verschiedene $x_1, \ldots, x_s \in B$ mit $S \cap S' = \{x_1, \ldots, x_s\}$, ein $t \in \mathbb{N}^*$ und paarweise verschiedene $v_1, \ldots, v_t \in B \backslash (S \cap S')$ mit $S = \{x_1, \ldots, x_s, v_1, \ldots, v_t\}$. Außerdem existieren ein $t' \in \mathbb{N}^*$ und paarweise verschiedene $w_1, \ldots, w_{t'} \in B \backslash \{S \cap S'\}$ mit $S' = \{x_1, \ldots, x_s, w_1, \ldots, w_{t'}\}$. Sei nun $x \in \mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Span}(S')$. Dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_s, \mu_1, \ldots, \mu_t, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_s, \mu'_1, \ldots, \mu'_t \in \mathbb{C}$, sodass

$$x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^{t} \mu_j \cdot v_j,$$
$$x = \sum_{i=1}^{s} \lambda'_i \cdot x_i + \sum_{j=1}^{t'} \mu'_j \cdot w_j$$

gilt. Also gilt auch

$$0 = \sum_{i=1}^{s} (\lambda_i - \lambda_i') \cdot x_i + \sum_{j=1}^{t} \mu_j \cdot v_j + \sum_{k=1}^{t'} \mu_k' \cdot w_k.$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\{x_1, \dots, x_s, v_1, \dots, v_t, w_1, \dots, w_{t'}\}$ gilt also

$$\begin{aligned}\lambda_i &= \lambda_i' \text{ für } i \in [s],\\ \mu_j &= 0, \text{ für } j \in [t],\\ \mu_k' &= 0, \text{ für } k \in [t'].\end{aligned}$$

Also gilt $x \in \mathrm{Span}(S \cap S')$. Andererseits gilt klarerweise $\mathrm{Span}(S \cap S') \subset \mathrm{Span}(S), \mathrm{Span}(S \cap S') \subset \mathrm{Span}(S')$, und daher

$$\mathrm{Span}(S \cap S') \subset \mathrm{Span}(S) \cap \mathrm{Span}(S').$$

Die Aussage ist also bewiesen. ■

Definition 2.1.20: Eine *Orthogonalbasis* von $\mathbb{C}^d$ ist eine Basis S von $\mathbb{C}^d$, so dass für $v, w \in S$ mit $v \neq w$ gilt $v \perp w$.

Bemerkung 2.1.21: Es ist eigentlich untypisch im Kontext von Hilberträumen mit Orthogonalbasen zu arbeiten, typischerweise werden Orthonormalbasen benuzt. In Section 5.8 sind Orthogonalbasen bei der Berechnung von bestimmten Hilbertsudokus jedoch hilfreicher als Orthonormalbasen, da durch den Wegfall von Normierungsfaktoren vor bestimmten Vektoren mehr Übersichtlichkeit erreicht wird.

Lemma 2.1.22: *Sei B eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^d$. Sei $S \subset B$. Dann gilt:*

$$\mathrm{Span}(S)^{\perp} = \mathrm{Span}(B \backslash S).$$

Beweis: Im Fall $S = \emptyset$ gilt nach Konvention 2.1.15

$$\mathrm{Span}(S)^{\perp} = \{0\}^{\perp} = \mathbb{C}^d = \mathrm{Span}(B) = \mathrm{Span}(B \backslash S).$$

Im Fall $S = B$ gilt ebenfalls nach Konvention 2.1.15

$$\mathrm{Span}(B)^{\perp} = (\mathbb{C}^d)^{\perp} = \{0\} = \mathrm{Span}(\emptyset) = \mathrm{Span}(B \backslash S).$$

Angenommen nun, es gelte $S \notin \{B, \emptyset\}$. Seien $s \in \mathbb{N}^*, v_1, \dots, v_s \in B$ paarweise verschieden mit $S = \{v_1, \dots, v_s\}$, und $w_1, \dots w_{d-s} \in B$ paarweise verschieden mit $B = \{v_1, \dots, v_d, w_1, \dots, w_{d-s}\}$. Seien $x \in \mathrm{Span}(S)^{\perp}$ und $\lambda_i, \dots, \lambda_s, \mu_1, \dots, \mu_{d-s} \in \mathbb{C}$ mit

$$x = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot v_i + \sum_{j=1}^{d-s} \mu_j \cdot w_j.$$

Dann gilt für alle $k \in [s]$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle v_k, x\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot \langle v_k, v_i\rangle + \sum_{j=1}^{d-s} \mu_j \cdot \langle v_k, w_j\rangle \\ &= \lambda_k \cdot \|v_k\|^2 \end{aligned}$$

Also gilt $\lambda_k = 0$ für alle $k \in [s]$ und damit $x \in \operatorname{Span}(B\backslash S)$. Andererseits existieren für jedes $z \in \operatorname{Span}(B\backslash S)\mu_1, \ldots, \mu_{d-s} \in \mathbb{C}$ mit $z = \sum_{i=1}^{d-s} \mu_i \cdot w_i$, und für jedes $y \in \operatorname{Span}(S)\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ mit $y = \sum_{i=1}^{s} \lambda_i \cdot v_i$, weshalb gilt

$$\langle y, z\rangle = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{d-s} \overline{\lambda_i} \mu_j \cdot \langle v_i, w_j\rangle = 0.$$

Die Aussage ist also bewiesen. ■

2.2 Operatoren auf Hilberträumen

Im folgenden werden Hilfsaussagen zu Operatoren auf Hilberträumen gesammelt.

Definition 2.2.1: Ein *linearer Operator* auf $\mathscr{H}$ (oder einfach nur *Operator* auf $\mathscr{H}$) ist eine lineare Abbildung $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$.

Definition 2.2.2: (s.[3]) Ein linearer Operator $T : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ heißt *stetig*, wenn er stetig bezüglich der von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Norm-Topologie ist. Wir definieren

$$\mathcal{L}(\mathscr{H} := \{T \mid T \text{ ist stetig linearer Operator auf } \mathscr{H}\}.$$

Notation 2.2.3: Durch $\mathbb{1} : \mathscr{H} \to \mathscr{H}, x \mapsto x$ wird der Identitätsoperator notiert .

Lemma 2.2.4: *(s.[3]) Sei $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$. Dann existiert ein eindeutiger Operator $T^* \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$, sodass*

$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$

gilt für alle $x, y \in \mathscr{H}$. T^* heißt der zu T adjungierte Operator.

Definition 2.2.5: (s.[3]) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ heißt *unitär*, falls gilt

$$T^*T = \mathbb{1} = TT^*.$$

Wir definieren $\mathcal{U}(\mathscr{H}) := \{T \in \mathcal{L}(\mathscr{H}) \mid T \text{ ist unitär.}\}$ und für $d \in \mathbb{N}^*$ sei $\mathcal{U}_d := \mathcal{U}(\mathbb{C}^d)$.

Bemerkung 2.2.6: $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ ist eine Gruppe, da $\mathbb{1}$ neutrales Element ist, da zu $T \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$ das Inverse $T^* \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$ existiert, und da die Assoziativität von $\mathcal{L}(\mathscr{H})$ vererbt wird.

Satz 2.2.7: *(s.[3]) Sei $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$. Dann sind folgende drei Aussagen äquivalent:*

1. *T ist unitär,*

2. *$T(\mathscr{H}) = \mathscr{H}$ und $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x \in \mathscr{H}, y \in \mathscr{H}$,*

3. *$T(\mathscr{H}) = \mathscr{H}$ und $\|T(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathscr{H}$.*

Definition 2.2.8: (s.[4]) Ein Operator $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ heißt *positiv*, falls $T^* = T$ und

$$\langle T(x), x\rangle \geq 0 \text{ für alle } x \in \mathscr{H}$$

gilt. Es seien

$$\begin{aligned} \zeta(\mathscr{H}) &:= \{T \in \mathcal{L}(\mathscr{H}) \mid T = T^*\}, \\ \mathscr{B}^+(\mathscr{H}) &:= \{T \in \mathcal{L}(\mathscr{H}) \mid T \text{ ist positiv}\}. \end{aligned}$$

Lemma 2.2.9: *Auf $\zeta(\mathscr{H})$ wird dann durch $T \leq S :\Leftrightarrow S - T \in \mathscr{B}^+(\mathscr{H})$ eine Ordnungsrelation definiert.*

Definition 2.2.10: (s.[3]) Sei $A \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$. Dann definieren wir das *Spektrum von* A:

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A - \lambda \cdot \mathbb{1} \text{ ist nicht invertierbar}\}.$$

Satz 2.2.11: *(s.[3]) Für einen Operator $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ mit $T^* = T$ sind äquivalent:*

1. *$\langle Tx, x\rangle \geq 0$ für alle $x \in \mathscr{H}$,*

2. *$T = T^*, \sigma(A) \subset \mathbb{R}_0^+$,*

3. *$T = B^*B$ für ein $B \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$.*

In diesem Fall schreibt man $T \geq 0$.

Lemma 2.2.12: *(s. [11]) Seien $n \in \mathbb{N}^*$ und $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ positive Operatoren. Dann gilt:*

1. *$\sum_{i=1}^n A_i \geq 0$.*

2. *Gilt auch $-A \geq 0$, so gilt $A = 0$.*

Lemma 2.2.13: *Seien $\{v_1, \ldots, v_d\}, \{w_1, \ldots, w_d\}$ Orthonormalbasen von $\mathbb{C}^d$. Dann wird durch die lineare Fortsetzung von*

$$v_i \mapsto w_i \text{ für } i \in [d]$$

ein unitärer Operator auf $\mathbb{C}^d$ definiert.

Beweis: Sei $w \in \mathbb{C}^d$ mit $w = \sum_{i=1}^d \alpha_i \cdot w_i$ und $\alpha_i \in \mathbb{C}$ für alle $i \in [d]$. Dann gilt:

$$T(\sum_{i=1}^d \alpha_i \cdot v_i) = \sum_{i=1}^d \alpha_i \cdot w_i = w,$$

und somit $T(\mathbb{C}^d) = \mathbb{C}^d$. Außerdem gilt für $x \in \mathbb{C}^d$ und $\beta_1, \dots, \beta_d \in \mathbb{C}$ mit $x = \sum_{i=1}^d \beta_i \cdot w_i$:

$$\begin{aligned}
\|T(x)\|^2 &= \langle T(\sum_{i=1}^d \beta_i \cdot v_i), T(\sum_{i=1}^d \beta_i \cdot v_i)\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^d \beta_i \cdot w_i, \sum_{i=1}^d \beta_i \cdot w_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^d \overline{\beta}\beta\langle w_i, w_i\rangle \\
&= \sum_{i=1}^d \overline{\beta}\beta\langle v_i, v_i\rangle \\
&= \langle \sum_{i=1}^d \beta \cdot v_i, \sum_{i=1}^d \beta \cdot v_i\rangle \\
&= \|x\|^2,
\end{aligned}$$

also $\|T(x)\| = \|x\|$. Somit folgt die Aussage nach Satz 2.2.7. ■

2.3 Projektionen auf Hilberträumen

In dieser Subsektion werden Projektionen auf Hilberträumen eingeführt und spezielle Hilfsaussagen für die Behandlung von Hilbertsudokus aufgestellt.

Definition 2.3.1: (s.[4]) Sei $\mathscr{K} \subseteq \mathscr{H}$ ein abgeschlossener Teilraum und für $z \in \mathscr{H}$ sei $z = x + y$ die eindeutige orthogonale Zerlegung bezüglich $\mathscr{K}$, wobei $x \in \mathscr{K}$ und $y \in \mathscr{K}^\perp$ gelte. Dann heißt die Abbildung $p : \mathscr{H} \to \mathscr{H}, x + y \mapsto x$ die *orthogonale Projektion* von $\mathscr{H}$ auf $\mathscr{K}$.

Satz 2.3.2: *(s.[4]) Im Fall von Definition 2.3.1 gilt:*

1. $p \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$; $\|p\| = 1$ *oder* $p = 0$.
2. $p = p^2 = p^*$.
3. $\mathrm{Im}(p) = \mathscr{K}, \ker(P) = \mathscr{K}^\perp$.
4. *Sei* $\tilde{p} \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$, *so dass* $\tilde{p}^2 = \tilde{p} = \tilde{p}^*$ *. Dann existiert ein abgeschlossener Teilraum* $\tilde{\mathscr{K}}$ *von* $\mathscr{H}$*, so dass* $\tilde{p}$ *die orthogonale Projektion auf* $\tilde{\mathscr{K}}$ *im Sinne von Definition 2.3.1 ist.*

Bemerkung 2.3.3: Im Folgenden wird eine orthogonale Projektionen $p \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ auch einfach nur *Projektion* genannt.

Bemerkung 2.3.4: Durch Satz 2.3.2 wird eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der abgeschlossenen Untervektorräume von $\mathscr{H}$ und der Teilmenge der idempotenten, selbstadjungierten Abbildungen in $\mathcal{L}(\mathscr{H})$ gegeben.

Satz 2.3.5: *(s.[4]) Seien p, q Projektionen von $\mathscr{H}$ auf die abgeschlossenen Teilräume V beziehungsweise W. Dann sind äquivalent:*

1. $V \subseteq W$,
2. $qp = p$,
3. $pq = p$,
4. $\|p(x)\| \leq \|q(x)\|$ *für alle* $x \in \mathscr{H}$,
5. $p \leq q$.

Proposition 2.3.6: *(s.[4]) Ist p die Projektion auf den abgeschlossenen Teilraum V, dann ist $\mathbb{1} - p$ die Projektion auf $V^\perp$. Die Abbildung $p \mapsto \mathbb{1} - p$ auf der Menge der Projektionen auf $\mathscr{H}$ kehrt die Halbordnung $\leq$ um.*

Definition 2.3.7: (s.[4]) Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $p, q \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ Projektionen bezüglich den Teilräumen V und W. Dann bezeichnet $p \wedge q$ die Projektion auf

$$V \wedge W := V \cap W,$$

den größten abgeschlossenen Teilraum von $\mathscr{H}$, der in V und W enthalten ist, und $p \vee q$ die Projektion auf

$$V \vee W := \overline{LH(V \cup W)},$$

den kleinsten abgeschlossenen Teilraum von $\mathscr{H}$, der V und W enthält.

Proposition 2.3.8: *(s.[4]) Seien p, q kommutierende Projektionen auf $\mathscr{H}$ bezüglich den abgeschlossenen Teilräumen V, W. Dann gilt:*

1. $p \vee q = p + q - pq$,
2. $p \wedge q = pq$,
3. $V \vee W = V + W$.

Insbesondere ist $V + W$ abgeschlossen. Des Weiteren gilt $pq = 0$ genau dann, falls $V \perp W$. In diesem Fall gilt $p \vee q = p + q$.

Proposition 2.3.9: *(s.[4]) Seien p und q Projektionen auf $\mathscr{H}$ bezüglich den Teilräumen V und W. Dann gilt:*

$$pq = qp \Leftrightarrow (V \wedge (V \wedge W)^{\perp}) \perp (W \wedge (V \wedge W)^{\perp}).$$

Proposition 2.3.10: *(s.[4]) Seien p und q Projektionen auf $\mathscr{H}$ bezüglich den Teilräumen $V, W \subset \mathscr{H}$, für die $p \leq q$ beziehungsweise $V \subset W$ gilt. In diesem Fall ist $q-p$ die Projektion auf $W \wedge V^{\perp}$.*

Satz 2.3.11: *Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, $n \in \mathbb{N}^*$ und $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ Projektionen, die*

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \mathbb{1}$$

erfüllen. Dann gilt $p_i p_j = 0$ für alle $i, j \in [n]$ mit $i \neq j$.

Beweis: Für ein $j \in \mathbb{N}n$ gilt:

$$\begin{aligned} p_j = p_j^2 = p_j \mathbb{1} p_j = p_j (\sum_{i=1}^{n} p_i) p_j \\ = \sum_{i=1}^{n} p_j p_i p_j \\ = (\sum_{i=1, i\neq j}^{n} p_j p_i p_j) + p_j^3 \\ = (\sum_{i=1, i\neq j}^{n} p_j p_i p_j) + p_j. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\sum_{i=1, i\neq j}^{n} p_j p_i p_j = 0. \tag{2}$$

Wegen

$$p_j p_i p_j = p_j p_i p_i p_j = (p_i p_j)^* (p_i p_j)$$

ist $p_jp_ip_j$ nach Satz 2.2.11 ein positiver Operator für alle $i \in [n]$. Für ein $i_0 \in [n]\backslash\{j\}$ gilt wegen Gl. (2):

$$p_jp_{i_0}p_j = -\sum_{i=1, i\neq j, i\neq i_0} p_jp_ip_j. \tag{3}$$

Somit ist nach Lemma 2.2.12 (i) $\sum_{i=1,i\neq j,i\neq i_o} p_jp_ip_j$ positiv, und wegen Lemma 2.2.12(ii) gilt $p_jp_{i_0}p_j = 0$. Es gilt also

$$p_jp_ip_j = 0$$

für alle $i, j \in [n]$ mit $i \neq j$. Somit folgt

$$\begin{aligned} 0 = \|p_jp_ip_j\| &= \|p_jp_i^2p_j\| \\ &= \|(p_ip_j)^*(p_ip_j)\| \\ &= \|p_ip_j\|^2. \end{aligned}$$

■

Dabei gilt die letzte Gleichung wegen der C^*-Eigenschaft von $\mathcal{L}(\mathscr{H})$. Es folgt $p_ip_j = 0$ für alle $i, j \in [n]$ mit $i \neq j$.

Lemma 2.3.12: *Seien $n \in \mathbb{N}^*$, $V \subset \mathbb{C}^d$ ein Untervektorraum, $S := \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthogonalbasis von V und p die Projektion auf V. Dann gilt für $x \in \mathbb{C}^d$:*

$$p = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v_i, x\rangle}{\langle v_i, v_i\rangle} \cdot v_i.$$

Korollar 2.3.13: *Sei $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ ein unitärer Operator und $p \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ eine Projektion mit zugehörigem Unterhilbertraum V. Dann ist TpT^* die Projektion auf den Unterhilbertraum $T(V)$.*

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} (TpT^*)^* &= T^{**}p^*T^* = TpT^*, \\ (TpT^*) &= (Tp)\underbrace{(T^*T)}_{=\mathbb{1}}(pT) = TpT^* = TpT^*. \end{aligned}$$

Also ist TpT^* eine Projektion. Außerdem gilt $TpT^*(\mathscr{H}) = Tp(\mathscr{H})$ nach Satz 2.2.7. ■

Korollar 2.3.14: *Seien $n \in \mathbb{N}^*$, $V \subset \mathbb{C}^d$ ein Unterraum mit $\dim(V) = n$ und zugehöriger Projektion p. Sei $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis von V. Dann ist $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ eine Orthonormalbasis von $TpT^*(\mathscr{H})$ und für $x \in \mathbb{C}^d$ gilt:*

$$(TpT^*)(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle T(v_i), x\rangle \cdot T(v_i).$$

Beweis: Wegen Satz 2.2.7 gilt

$$\|T(v_i)\| = 1, \langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle \text{ für } i, j \in [n].$$

Da T unitär ist, ist T invertierbar und es gilt $\text{rang}(T) = d$. Also gilt $\dim(V) = \dim(T(V))$ und $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ ist eine Orthonormalbasis von $T(V)$. Der zweite Teil des Korollars folgt direkt mit Korollar 2.3.13. ■

Korollar 2.3.15: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, p_1, \ldots, p_N \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$ Projektionen mit $p_i p_j = 0$ für $i, j \in [N]$ mit $i \neq j$, $\sum_{i=1}^N \operatorname{rang}(p_i) = d$. Dann gilt $\sum_{i=1}^N p_i = \mathbb{1}$.*

Beweis: Wegen $p_i p_j = 0$ für $i \neq j$ gilt $p_i(\mathscr{H}) \perp p_j(\mathscr{H})$ für $i, j \in [N]$ mit $i \neq j$. Wegen $\sum_{i=1}^N \operatorname{rang}(p_i) = d$ gilt damit $\mathbb{C}^d = \oplus_{i=1}^N p_i(\mathbb{C}^d)$. Sei $S_i := \{v_1^i, \ldots, v_{n_i}^i\}$ eine Orthonormalbasis von $p_i(\mathbb{C}^d)$. Dann gilt $p_i = \sum_{j=1}^{n_i} \langle v_j^i, \cdot\rangle \cdot v_j^i = v$, und somit für ein $v \in \mathbb{C}^d$:

$$(\sum_{i=1}^N p_i)(v) = \sum_{j=1}^N \sum_{j=1}^{n_i} \langle v_j^i, v\rangle \cdot v_j^i = v,$$

wobei die letzte Gleichung aus der Linearen Algebra bekannt ist und gilt, da $\cup_{i=1}^N S_i$ eine Basis von $\mathbb{C}^d$ bildet. ■

Notation 2.3.16: Seien $n \in \mathbb{N}^*, m \in [d], v, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}^d$ und $S \subset \mathbb{C}^d$. Dann bezeichne

- p_v die Projektion auf $\operatorname{Span}(v)$,
- $p_{v_1,\ldots,v_n}$ die Projektion auf $\operatorname{Span}(v_1, \ldots, v_n)$,
- p_i die Projektion auf $\operatorname{Span}(e_i)$ für $i \in [d]$, wenn nicht anders vermerkt,
- p_S die Projektion auf $\operatorname{Span}(S)$

Lemma 2.3.17: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, B$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^d$ und $S, S' \subset B$. Dann gilt*

$$p_S p_{S'} = p_{S \cap S'}.$$

Insbesondere sind p_S und $p_{S'}$ kommutativ.

Beweis: Ohne Einschränkung gelte $S, S' \notin \{\emptyset, B\}$, da dann wegen $p_S = 0$ oder $p_S = \mathbb{1}$ (bzw. $p_{S'} = 0$ oder $p_{S'} = \mathbb{1}$) die Aussage trivial ist. Für $x \in \mathbb{C}^d$ gilt dann nach Lemma 2.3.12:

$$\begin{aligned}
p_S p_{S'}(x) &= p_S(p_{S'}(x)) \\
&= \sum_{v \in S} \frac{\langle v, \sum_{w \in S'} \frac{\langle w,x\rangle}{\langle w,w\rangle} \cdot w\rangle}{\langle v, v\rangle} \cdot v \\
&= \sum_{v \in S} \sum_{w \in S'} \frac{\langle w, x\rangle\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle\langle v, v\rangle} \cdot v \\
&= \sum_{v \in S, w \in S', v = w} \frac{\langle w, x\rangle\langle v, w\rangle}{\langle w, w\rangle\langle v, v\rangle} \cdot v \\
&= \sum_{v \in S \cap S'} \frac{\langle v, x\rangle}{\langle v, v\rangle} \cdot v \\
&= p_{S \cap S'}.
\end{aligned}$$

■

Proposition 2.3.18: *Seien $V, W \subset \mathscr{H}$ Unterräume und $T \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ ein unitärer Operator. Dann gilt*

$$\left\{ \langle x, y\rangle \;\middle|\; \begin{matrix} x \in V, \|x\| = 1, \\ y \in W, \|y\| = 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \langle x', y'\rangle \;\middle|\; \begin{matrix} x' \in T(V), \|x'\| = 1, \\ y' \in T(W), \|y'\| = 1 \end{matrix} \right\}$$

Beweis: Seien $x, \in V, y \in W$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$. Dann gilt nach Satz 2.2.7 $\|T(x)\| = \|T(y)\| = 1$ und $\langle x, y\rangle = \langle T(x), T(y)\rangle$. Seien andererseits $x' \in T(V), y' \in T(W)$ mit $\|x'\| = \|y'\| = 1$. Wegen $T^*(T(V)) = V$ gilt $T^*x \in V, T^*y \in W$. Da mit T auch T^* unitär ist gilt außerdem nach Satz 2.2.7 $\|T^*(x)\| = \|T^*(y)\| = 1$, und $\langle x', y'\rangle = \langle T^*(x), T^*(y)\rangle$. ■

Proposition 2.3.19: *Seien $p, q \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ Projektionen mit*

$$\mathrm{rang}(p) = \mathrm{rang}(q) = 1.$$

Seien $v, w \in \mathscr{H}$ mit

$$p(\mathscr{H}) = \mathrm{Span}(v), q(\mathscr{H}) = \mathrm{Span}(w).$$

Dann gilt:

$$pq \neq qp \Leftrightarrow \mathrm{Span}(v) \neq \mathrm{Span}(w) \text{ und } v \not\perp w.$$

Beweis: Angenommen, es gilt $\mathrm{Span}(v) = \mathrm{Span}(w)$. Dann gilt

$$\frac{v}{\|v\|} = \frac{w}{\|w\|}$$

und nach Korollar 2.3.15 auch

$$\begin{aligned} p &= \frac{\langle v, \cdot\rangle}{\langle v, v\rangle} \cdot v \\ &= \langle \frac{v}{\|v\|}, \cdot\rangle \cdot \frac{v}{\|v\|} \\ &= \langle \frac{w}{\|w\|}, \cdot\rangle \cdot \frac{w}{\|w\|} \\ &= \frac{\langle w, \cdot\rangle}{\langle w, w\rangle} \cdot w \\ &= q. \end{aligned}$$

Damit gilt dann

$$pq = p^2 = qp.$$

Angenommen nun, es gelte $v \perp w$. Dann gilt

$$p(\mathscr{H}) = \mathrm{Span}(v) \perp \mathrm{Span}(w) = q(\mathscr{H}),$$

und damit nach Proposition 2.3.8

$$pq = 0 = qp.$$

Also ist bereits

$$(pq \neq qp) \Rightarrow (\mathrm{Span}(v) \neq \mathrm{Span}(w) \text{ und } v \not\perp w)$$

bewiesen. Angenommen nun, es gelte $pq = qp$. Dann würde gelten $\mathrm{rang}(pq \in \{0, 1\}$. Im Fall $\mathrm{rang}(pq) = 0$ würde $pq = 0$, und damit nach Proposition 2.3.8 auch $p(\mathscr{H}) \perp q(\mathscr{H})$ gelten. Angenommen es gelte

$\operatorname{rang}(pq) = 1$. Wegen

$$(pq)^* = (qp)^* = p^* q^* = pq$$

und

$$(pq)^2 = pqpq = ppqq = pq,$$

was beides gilt, da p und q Projektionen sind, wäre pq dann auch eine Projektion. Außerdem würde gelten

$$pq(\mathscr{H}) \subset p(\mathscr{H})$$

und

$$\dim(pq(\mathscr{H})) = \dim(p(\mathscr{H})) = 1,$$

also

$$pq(\mathscr{H}) = p(\mathscr{H}).$$

Nach Bemerkung 2.3.4 würde also $pq = p$ gelten. Analog würde außerdem $pq = q$, und damit $p = q$ folgen. Also würde gelten

$$pq = p^2 = qp.$$

Damit ist die andere Richtung der Äquivalenz und somit die gesamte Aussage bewiesen. ∎

Lemma 2.3.20: *Seien $\{v_1, \dots, v_d\}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^d$. Dann gilt für jede Partition $\{v_1, \dots, v_d\} = S_1 \dot\cup \dots \dot\cup S_m, m \in [d]$:*

$$\sum_{i=1}^{m} p_{S_i} = \mathbb{1}.$$

Beweis: Für $i, j \in [m]$ mit $i \neq j$ gilt $S_i \perp S_j$, daher nach Lemma 2.1.18 $\operatorname{Span}(S_i) \perp \operatorname{Span}(S_j)$, und damit nach Proposition 2.3.8 $p_{S_i} \perp p_{S_j}$. Mit Korollar 2.3.15 folgt somit die Aussage. ∎

3 Hilbertsudokus

In der folgenden Sektion werden zunächst Hilbertsudokus und Hilbertsudokukonfigurationen eingeführt. Es werden grundlegende, allgemeine Aussagen gesammelt, und anschließend in den folgenden Subsektionen spezielle Typen von Hilbertsudokus und Hilbertsudokukonfigurationen diskutiert. Section 3.3 und Section 3.4 zeigen dabei auf, dass Hilbertsudokus die Konzepte *latin square* und *Sudoku* in der Hinsicht erweitern, dass es sowohl partial latin squares, wie auch Sudokus gibt, die als latin square bzw. Sudokus aufgefasst nicht vervollständigt werden können, jedoch als Hilbertsudokus aufgefasst Lösungen besitzen Seien im Folgenden immer $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $\mathscr{H}$ ein separabler, komplexer Hilbertraum.

3.1 Hilbertsudokus und Hilbertsudokukonfigurationen

Es folgt eine zentrale Definition der Arbeit:

Definition 3.1.1 (N-Hilbertsudoku): Ein *Hilbertsudoku* (der Ordnung N auf $\mathscr{H}$) ist eine $N\times N$-Matrix $H := (p_{ij})$, deren Einträge Projektionen auf $\mathscr{H}$ sind, so dass für alle $i_0, j_0 \in [N]$ gilt:

$$\sum_{j=1}^{N} p_{i_0 j} = \mathbb{1}, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{N} p_{i j_0} = \mathbb{1}. \tag{5}$$

$\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ bezeichne die Menge aller N-Hilbertsudokus zum Hilbertraum $\mathscr{H}$.

Bemerkung 3.1.2: Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ ein Hilbertsudoku. Nach Satz 2.3.11 gilt für $i_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $k_0 \neq l_0$ wegen Gl. (4) und Gl. (5):

$$p_{i_0 k_0} p_{i_0 l_0} = 0,$$
$$p_{k_0 i_0} p_{l_0 i_0} = 0.$$

Bemerkung 3.1.3: Sei $H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Für $i, k, l \in [N]$ mit $k \neq l$ gilt dann wegen Bemerkung 3.1.2 und Proposition 2.3.8

$$p_{ik}(\mathscr{H}) \perp p_{il}(\mathscr{H}),$$
$$p_{ki}(\mathscr{H}) \perp p_{li}(\mathscr{H}).$$

Bemerkung 3.1.4: N-Hilbertsudokus werden in der Theorie der Quantengruppen auch unter dem Namen *magic unitaries* (s.[9]) und *projective permutation matrix* (s.[10]) studiert. Der Name *magic unitary* leitet sich davon ab, dass für ein N-Hilbertsudoku $H := (p_{ij})$ auf $\mathscr{H}$ eine unitäre Matrix ist in dem Sinne, dass für die Matrix $\overline{H}^T := (p_{ji}^*)$ nach 3.1.2 gilt:

$$(H\overline{H}^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} p_{ik} p_{jk}^* = \sum_{k=1}^{N} p_{ik} p_{jk} = \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$(\overline{H}^T H)_{ij} = \sum_{k=1}^{N} p_{ki}^* p_{kj} = \sum_{k=1}^{N} p_{ki} p_{kj} = \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases}$$

Lemma 3.1.5: *Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$. Dann gilt für alle $i_0, j_0 \in [N]$:*

$$\sum_{j=1}^{N} \operatorname{rang}(p_{i_0 j}) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{rang}(p_{i j_0}) = d.$$

Beweis: Wegen Gl. (4) gilt:

$$\mathbb{C}^d = \mathbb{1}(\mathbb{C}^d) = \sum_{j=1}^{N} p_{i_0 j}(\mathbb{C}^d).$$

Wegen Bemerkung 3.1.3 ist diese Summe sogar direkt, es gilt also:

$$d = \dim(\mathbb{C}^d) = \sum_{j=1}^{N} \dim(p_{i_0 j}(\mathbb{C}^d) = \sum_{j=1}^{N} \operatorname{rang}(p_{i_0 j}).$$

Analog folgt $d = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{rang}(p_{i j_0})$. ■

Definition 3.1.6 (Kommutatives Hilbertsudoku): Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. H heißt *kommutativ*, wenn für alle $(i_0, j_0), (k_0, l_0) \in [N]^2$ gilt:

$$p_{i_0 j_0} p_{k_0 l_0} = p_{k_0 l_0} p_{i_0 j_0}.$$

H heißt *nicht-kommutativ*, wenn H nicht kommutativ ist.

Es folgt eine weitere zentrale Definition der Arbeit:

Definition 3.1.7 (N-Konfiguration): Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum. Eine *Hilbertsudokukonfiguration* der Ordnung N auf $\mathscr{H}$ ist ein Tupel $((p_{ij}), \mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A} \subset [N]^2$ und p_{ij} für $(ij) \in \mathcal{A}$ eine Projektion auf $\mathscr{H}$ ist. Dabei soll erfüllt sein:

1. Für alle $i_0, j_0, k_0 \in [N]$ mit $j_0 \neq k_0$ gilt

$$p_{i_0 j_0} p_{i_0 k_0} = 0,$$
$$p_{j_0 i_0} p_{k_0 i_0} = 0,$$

2. Existiert ein $i_0 \in [N]$ mit $(i_0, j) \in \mathcal{A}$ für alle $j \in [N]$, so gilt:

$$\sum_{k=1}^{N} p_{i_0 k} = \mathbb{1},$$

3. Existiert ein $j_0 \in [N]$ existiert mit $(i, j_0) \in \mathcal{A}$ für alle $i \in [N]$, so gilt:

$$\sum_{i=1}^{N} p_{i j_0} = \mathbb{1}.$$

Im Folgenden nennen wir eine Hilbertsudokukonfiguration der Ordnung N auf $\mathscr{H}$ auch einfach nur eine *N-Konfiguration* auf $\mathscr{H}$ und bezeichnen die Menge aller N-Konfigurationen auf $\mathscr{H}$ mit $\mathcal{HK}(\mathscr{H}, N)$.

Bemerkung 3.1.8: Eine N-Konfiguration auf $\mathscr{H}$ entspricht also einer $N \times N$-Matrix, deren Einträge entweder leer oder mit einer Projektion auf $\mathscr{H}$ aufgefüllt sind, sodass ein Einträge, die in der selben Zeile oder Spalte stehen orthogonal zueinander sind, und Einträge aus einer vollaufgefüllten Zeile bzw. Spalte sich zu $\mathbb{1}$ addieren.

Ob eine N-Konfiguration durch Auffüllen der leeren Einträge zu einem N-Hilbertsudoku ergänzt werden kann, ist zentrale Frage der Arbeit, und gibt Anlass zu folgender zentralen Definition:

Definition 3.1.9 (Lösbarkeit einer N-Konfiguration): Eine N-Konfiguration $K := ((p_{ij}), \mathcal{A})$ heißt *lösbar*, falls ein Hilbertsudoku $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ existiert, so dass $p_{ij} = q_{ij}$ für $(i, j) \in A$ gilt. Wir sagen in diesem Fall H *löst* K oder H ist eine *Lösung* von K.

Bemerkung 3.1.10: Sei $((p_{ij}), \mathcal{A})$ eine N-Konfiguration auf $\mathscr{H}$. Aus Satz 2.3.11 folgt, dass keine $(i_0, j_0), (k_0, j_0) \in \mathcal{A}$ existieren, mit

1. $p_{i_0 j_0} \neq 0, p_{k_0 l_0} \neq 0,$
2. $(i_0, j_0) \neq (k_0, l_0),$
3. $i_0 = k_0$ oder $j_0 = l_0$, und
4. $p_{i_0 j_0} = p_{k_0 l_0}.$

Im Folgenden gelte ohne Einschränkung, dass jede N-Konfiguration die oben aufgeführte Bedingung erfüllt.

Lemma 3.1.11: *Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ ein Hilbertsudoku. Für $(i_0, j_0) \in [N]^2, n_1, n_2 \in [N-1]$ und $i_1, \ldots, i_{n_1} \in [N] \backslash \{i_0\}, j_1, \ldots, j_{n_2} \in [N] \backslash \{j_0\}$ gilt:*

$$p_{i_0 j_0}(\mathscr{H}) \perp ((\sum_{m=1}^{n_1} p_{i_m j_0}(\mathscr{H})) + (\sum_{n=1}^{n_2} p_{i_0 j_n}(\mathscr{H}))).$$

Beweis: Nach Bemerkung 3.1.3 gilt

$$p_{i_0 j_0}(\mathscr{H}) \perp (\bigcup_{m=1}^{n_1} p_{i_m j_0}(\mathscr{H})) \cup (\bigcup_{n=1}^{n_2} p_{i_0 j_n}(\mathscr{H})).$$

Nach Lemma 2.1.18 gilt damit

$$\begin{aligned} p_{i_0 j_0}(\mathscr{H}) = \operatorname{Span}(p_{i_0 j_0}(\mathscr{H})) \perp \operatorname{Span}\left((\bigcup_{m=1}^{n_1} p_{i_m j_0}(\mathscr{H})) \cup (\bigcup_{n=1}^{n_2} p_{i_0 j_n}(\mathscr{H}))\right) \\ = ((\sum_{m=1}^{n_1} p_{i_m j_0}(\mathscr{H})) + (\sum_{n=1}^{n_2} p_{i_0 j_n}(\mathscr{H}))) \end{aligned}$$

■

Lemma 3.1.12: *Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ ein Hilbertsudoku. Existiert ein $(i_0, j_0) \in [N]^2$, so dass $p_{i_0 j_0} = \mathbb{1}$ gilt, dann gilt*

$$p_{i_0 j} = 0, p_{i j_0} = 0$$

für alle $i \in [N] \backslash \{i_0\}, j \in [N] \backslash \{j_0\}$.

Beweis: Für $i \in [N]\backslash\{i_0\}, j \in [N]\backslash\{j_0\}$ gilt nach Satz 2.3.11

$$\begin{aligned} p_{ij_0} &= p_{ij_0}\mathbb{1} = p_{ij_0}p_{i_0j_0} = 0, \\ p_{i_0j} &= p_{i_0j}\mathbb{1} = p_{i_0j}p_{i_0j_0} = 0. \end{aligned}$$ ■

Die Frage nach nicht-kommutativen Lösungen von N-Konfigurationen ist im Fall $N = 3$ trivial:

Proposition 3.1.13: *Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, 3)$. Dann ist H kommutativ.*

Beweis: Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, 3)$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit seien die p_{ij} bezeichnet durch $p_1, \ldots, p_9$ (in Ausnahme zur Notation aus Notation 2.3.16), sodass gelte:

$$H = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_4 & p_5 & p_6 \\ p_7 & p_8 & p_9 \end{pmatrix}.$$

Für $i, j \in [9]$, sodass p_i, p_j in der selben Zeile oder Spalte stehen, gilt nach Bemerkung 3.1.2 $p_ip_j = 0 = p_jp_i$. Wir zeigen nun außerdem $p_1p_9 = p_9p_1$. Da Spalten- und Zeilenpermutationen ein Hilbertsudoku in ein Hilbertsudoku überführen (s.4.2.1), folgt damit $p_{i'}p_{j'} = p_{j'}p_{i'}$ für alle $i', j' \in [9]$, für die $p_{i'}, p_{j'}$ nicht in der selben Spalte oder Zeile stehen. Nach Bemerkung 3.1.2 gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 &= p_6p_5 \\ &= (\mathbb{1} - p_3 - p_9)p_5 \\ &= (\mathbb{1} - (\mathbb{1} - p_1 - p_2) - p_9)p_5 \\ &= (p_1 + p_2 - p_9)p_5 = p_1p_5 - p_9p_5 \\ \Leftrightarrow p_1p_5 &= p_9p_5. \end{aligned}$$

Analog folgt aus $0 = p_5p_6$, dass auch $p_5p_1 = p_5p_9$ gilt. Außerdem gilt analog:

$$\begin{aligned} 0 = p_1p_4 &= p_1(\mathbb{1} - p_5 - p_6) \\ &= p_1(\mathbb{1} - p_5 - (\mathbb{1} - p_3 - p_9)) \\ &= p_1(p_9 - p_5) \\ \Leftrightarrow p_1p_9 &= p_1p_5 \end{aligned}$$

Analog folgt aus $0 = p_4p_1$, dass auch $p_9p_1 = p_5p_1$ gilt. Somit lässt sich unter mehrfacher Anwendung von Bemerkung 3.1.2 schließen:

$$\begin{aligned} p_1p_9 &= p_9p_5 = p_9\mathbb{1}p_5 = p_9(p_1 + p_2 + p_3)p_5 = p_9p_1p_5 \\ &= p_5p_1p_5 = p_5p_1p_9 = p_5(p_1 + p_2 + p_3)p_9 = p_5p_9 = p_5p_1 \\ &= p_9p_1. \end{aligned}$$

Somit ist die Aussage bewiesen. ■

Bemerkung 3.1.14: In [12] findet sich ein Beweis dieser Aussage, der die Zeilen- und Spaltensummeneigenschaft von H, die Orthogonalität der Einträge mit selbem Zeilen und Spaltenindex, sowie die Selbstadjungiertheit der Einträge benutzt, und dadurch kürzer ist. Ein alternativer Beweis findet sich in [13].

Notation 3.1.15: Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$. Dann notieren wir H auch durch eine $N \times N$-Matrix, in der der (i, j)-te Eintrag gefüllt wird durch

$$\begin{cases} S_{ij}, & \text{wobei } S_{ij} \text{ eine Basis von } p_{ij}(\mathscr{H}) \text{ ist, falls } 0 < \operatorname{rang}(p_{ij}) < d \text{ gilt,} \\ \mathbb{1}, & \text{falls } \operatorname{rang}(p_{ij}) = d \text{ gilt,} \\ 0, & \text{falls } p_{ij} = 0 \text{ gilt .} \end{cases}$$

Im Fall einer N-Konfiguration $K := ((p_{ij}), \mathcal{A}) \in \mathcal{HSK}(\mathbb{C}^d, N)$ notieren wir K analog, wobei wir für $(i, j) \in [N]^2 \backslash \mathcal{A}$ den (i, j)-ten Eintrag durch $*$ befüllen.

Beispiel 3.1.16:

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & * \\ e_2, e_3 & * & * \\ * & e_1 & e_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{HK}(\mathbb{C}^3, 3)$$

bezeichne die 3-Konfiguration $((p_{ij}), \mathcal{A})$ mit $\mathcal{A} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}, p_{11} = p_{32} =: f$, $p_{12} = p_{33} =: g, p_{21} =: h$, wobei gilt:

$$f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$g : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$h : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}.$$

Definition 3.1.17: Sei $H := ((p_{ij}), \mathcal{A}) \in \mathcal{HK}(\mathscr{H}, N)$. Existiert ein Hilbertraum $\mathscr{H}_2$ mit $\mathscr{H} \subset \mathscr{H}$, ein $N_2 \in \mathbb{N}^*$ mit $N \leq N_2$ und ein Hilbertsudoku $H := (q_{ij}) \in \mathcal{HK}(\mathscr{H}_2, N_2)$, sodass gilt:

$$p_{ij} = q_{ij}|_{\mathscr{H}} \text{ für } (i, j) \in \mathcal{A},$$

dann nennen wir H eine erweiterte Lösung von K.

Frage 3.1.18: Besitzt jede Hilbertsudokukonfiguration eine erweiterte Lösung? Wenn nicht, was sind Kritieren für die Existenz einer erweiterten Lösung?

3.2 Der gewöhnliche Fall

Die Frage nach der Lösbarkeit einer N-Konfiguration lässt sich oft leicht beantworten, wenn die enthaltenen Projektionen in Bezug auf eine gegebene Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ eine bestimmte, unkomplizierte Form besitzen (s.3.2.1). Solche Konfigurationen, oder die entsprechenden Hilbertsudokus nennen wir *gewöhnlich*. Außerdem lässt sich aus einem gewöhnlichen Hilbertsudoku, das zwingend kommutativ ist (s.3.2.2), und eine bestimmte Form (s.3.2.13) besitzt immer ein nicht-kommutatives Hilbertsudoku gewinnen.

Definition 3.2.1 (Gewöhnliches Hilbertsudoku): Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$, sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ und sei $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_d\}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^d$. H heißt *gewöhnlich bezüglich* $\mathcal{B}$, falls für alle $(i,j) \in [N]^2$ eine Teilmenge $S_{ij} \subset \mathcal{B}$ existiert (s.2.3.16), sodass gilt:

$$p_{ij} = p_{S_{ij}}.$$

Im Fall $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_d\}$ heißt H auch einfach nur *gewöhnlich*. Wir bezeichnen durch $\mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ die Menge der bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnlichen N-Hilbertsudokus.

Im Folgenden sei immer $\mathcal{B} := \{v_1, \ldots, v_d\}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^d$.

Lemma 3.2.2: *Sei $H \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$. Dann ist H kommutativ.*

Beweis: Zu $i, j \in [N]$ existieren $S_{ij} \subset \mathcal{B}$ mit $H = (p_{S_{ij}})$. Nach Lemma 2.3.17 gilt dann für $i, j, k, s \in [N]$:

$$p_{ij} p_{kl} = p_{kl} p_{ij}.$$

Also ist H kommutativ. ■

Lemma 3.2.3: *Sei für $(i,j) \in [N]^2$ $S_{ij} \subset \mathcal{B}$, sodass $H := (p_{ij}) := (p_{S_{ij}}) \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ gilt. Dann existiert für $i_0 \in [N]$ genau ein $j_{i_0} \in [N]$, und für $j_0 \in [N]$ genau ein $i_{j_0} \in [N]$ mit:*

$$p_{v_n} \le p_{i_0 j_{i_0}}, p_{v_n} \le p_{i_{j_0} j_0}, \tag{6}$$
$$v_n \in S_{i_0 j_{i_0}}, v_n \in S_{i_{j_0} j_0}. \tag{7}$$

Beweis: Sei $i_0 \in [N]$. Für $j \in [N]$ existiert ein $S_{i_0 j} \subset \mathcal{B}$ mit $p_{i_0 j} = p_{S_{i_0 j}}$. Nach Proposition 2.3.8 gilt:

$$v_n \notin S_{i_0 j} \Leftrightarrow p_{v_n} p_{i_0 j} = 0.$$

Außerdem gilt nach Bemerkung 3.1.3 und Proposition 2.3.8

$$S_{i_0 j_1} \cap S_{i_0 j_2} = \emptyset$$

für $j_1, j_2 \in [N]$ mit $j_1 \neq j_2$. Also existiert höchstens ein $j_1 \in [N]$ mit $v_n \in S_{i_0 j_1}$. Andererseits existiert wegen

$$p_{v_n} = p_{v_n} \mathbb{1} = p_{v_n} \sum_{k=1}^{N} p_{i_0 k}$$

mindestens ein $j_{i_0} \in [N]$ mit $p_n p_{i_0 j_{i_0}} \neq 0$, also $v_n \in S_{i_0 j_{i_0}}$. Also existiert nach Satz 2.3.5 genau ein $j_{i_0} \in [N]$ mit $p_{v_n} \le p_{i_0 j_{i_0}}$. Analog folgt die eindeutige Existenz von i_{j_0}. Die Äquivalenz von (6) und (7) folgt direkt aus Satz 2.3.5. ■

Notation 3.2.4: Sei $N \in \mathbb{N}^*$ und $\mathcal{M}$ eine nicht-leere Menge. Dann bezeichne $\mathrm{Mat}(\mathcal{M}, N)$ bezeichne die Menge der $N \times N$-Matrizen mit Einträgen in $\mathcal{M}$.

Notation 3.2.5: Sei $\mathcal{M}$ eine endliche Menge. Dann bezeichne wir $\mathrm{Sym}(\mathcal{M})$ die symmetrische Gruppe auf $\mathcal{M}$, die Menge der bijektiven Selbstabbildungen auf $\mathcal{M}$. Im Fall $\mathcal{M} = [N]$ schreiben wir auch S_N.

Proposition 3.2.6: *Für Teilmengen $S_{ij} \subset \mathcal{B}$ für $i, j \in [N]$ sind äquivalent:*

1. $H := (p_{S_{ij}}) \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$,

2. $\dot\cup_{j=1}^{N} S_{i_0 j} = \dot\cup_{i=1}^{N} S_{i j_0} = \mathcal{B}$,

3. *es existieren* $\sigma_1, \ldots, \sigma_d \in S_N$*, sodass für alle* $n \in [d]$ *gilt:*

$$v_n \in S_{ij} \Leftrightarrow j = \sigma_n(i) \tag{8}$$

für alle $i, j \in [N]$.

Beweis: Angenommen, 1. gelte. Seien $i \in [N]$ und $n \in [d]$. Dann existiert nach Lemma 3.2.3 genau ein $j_i^n \in [N]$ mit $v_n \in S_{ij_i^n}$. Wegen $S_{ij} \subset \mathcal{B}$ für alle $j \in [N]$ gilt also $S_{ij_1} \cap S_{ij_2} = \emptyset$ für $j_1, j_2 \in [N]$ mit $j_1 \neq j_2$ und $\dot\cup_{j=1}^{N} S_{ij} = \mathcal{B}$. Analog folgt $\dot\cup_{i=1}^{N} S_{ij} = \mathcal{B}$ für alle $j \in [N]$. Angenommen andererseits, 2. gelte. Dann gilt für $i_0, j_0 \in [N]$ nach Lemma 2.3.20:

$$\sum_{j=1}^{N} p_{S_{i_0 j}} = \sum_{i=1}^{N} p_{S_{i j_0}} = \mathbb{1}.$$

Also ist $H := (p_{S_{ij}}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ gewöhnlich bezüglich $\mathcal{B}$. Wir zeigen nun, dass aus 2. 3. folgt. Sei $i \in [N]$. Dann existiert wegen $\dot\cup_{j=1}^{N} S_{ij} = \mathcal{B}$ genau ein $j_i^n \in [N]$ mit $v_n \in S_{ij_i^n}$. Somit ist die Abbildung

$$\sigma_n : [N] \to [N], i \mapsto j_i^n$$

wohldefiniert. Zu $j \in [N]$ existiert wegen $\cup_{i=1}^{N} S_{ij} = \mathcal{B}$ genau ein $i_j^n \in [N]$ mit $v_n \in S_{i_j^n j}$. Also gilt $\sigma_n \in S_N$ und $v_n \in \mathrm{S}_{ij} \Leftrightarrow j = \sigma_n(i)$. Seien hingegen $\sigma_1, \ldots, \sigma_d$ gegeben. Aus $v_n \in S_{ij} \Leftrightarrow 1j = \sigma_n(i) \Leftrightarrow i = \sigma_n^{-1}(j)$ für alle $i, j \in [N], n \in [d]$ folgt direkt 2. ■

Bemerkung 3.2.7: Seien in Proposition 3.2.6 $\sigma_1, \ldots \sigma_d, \sigma'_1, \ldots, \sigma'_d \in S_N$, sodass gilt:

$$v_n \in S_{ij} \Leftrightarrow j = \sigma_n(i) \Leftrightarrow j = \sigma'_n(i)$$

für alle $i, j \in [N], n \in [d]$. Dann gilt $\sigma_n = \sigma'_n$ für alle $n \in [d]$. Also wird durch:

$$\Phi_{\mathcal{B}} : S_N \to \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N), (\sigma_1, \ldots, \sigma_d) \mapsto (p_{S_{ij}}) \text{ mit } v_n \in S_{ij} \Leftrightarrow j = \sigma_n(i)$$

eine Bijektion definiert. Für $\sigma_1, \ldots, \sigma_d \in \mathrm{S}_d$ schreiben wir $H^{\mathcal{B}}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_d} := \Phi_{\mathcal{B}}(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)$.

Proposition 3.2.8: *Auf* $\mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ *wird durch* $H^{\mathcal{B}}_{\sigma_1,\ldots,\sigma_d} H^{\mathcal{B}}_{\sigma'_1,\ldots,\sigma'_d} := H^{\mathcal{B}}_{\sigma_1\sigma'_1,\ldots,\sigma_d\sigma'_d}$ *eine Gruppenstruktur definiert, die* $\Phi_{\mathcal{B}}$ *zu einem Gruppenisomorphismus macht.*

Beweis: Die Aussage folgt direkt daraus, dass $\Phi_{\mathcal{B}}$ eine Bijektion ist, und dass für $\sigma_1, \sigma'_1, \ldots, \sigma_d, \sigma'_d \in S_N$ gilt:

$$\Phi_{\mathcal{B}}(\sigma_1, \ldots, \sigma_d)\Phi_{\mathcal{B}}(\sigma'_1, \ldots, \sigma'_d) = \Phi_{\mathcal{B}}(\sigma_1\sigma'_1, \ldots, \sigma_d\sigma'_d)$$

■

Proposition 3.2.9: *Es gilt:*

$$\#\mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N) = N!^d$$

Beweis: Dies folgt direkt aus Proposition 3.2.8. ■

Definition 3.2.10 (Gewöhnliche Hilbertsudokukonfiguration): Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$, $K := ((p_{ij}), \mathcal{A}) \in \mathcal{HK}(\mathbb{C}^d, N)$ und sei $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_d\}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^d$. K heißt *gewöhnlich* bezüglich $\mathcal{B}$, falls für alle $(i, j) \in \mathcal{A}$ eine Teilmenge $S_{ij} \subset \mathcal{B}$ existiert, sodass gilt:

$$p_{ij} = p_{S_{ij}}.$$

Im Fall $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$ heißt H auch einfach nur *gewöhnlich*. Wir schreiben $\mathcal{HK}_{\mathcal{B}}(N)$ für die Menge der bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnlichen N-Konfigurationen.

Definition 3.2.11: Seien $\mathcal{A} \subset [N]^2$ und für $(i, j) \in \mathcal{A}$ $S_{ij} \subset \mathcal{B}$, sodass $K := ((p_{S_{ij}}), \mathcal{A}) \in \mathcal{HK}_{\mathcal{B}}(N)$ gilt. Dann definieren wir:

$$\begin{aligned} F_K^{\mathcal{B}} :&[d] \to \mathbb{N}, \\ &n \mapsto \#\{(i, j) \in \mathcal{A} \mid v_n \in S_{ij}\}. \end{aligned}$$

Im Fall $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_d\}$ schreiben wir statt $F_K^{\mathcal{B}}$ auch F_K.

Es wird eine vollständige Klassifikation der Lösbarkeit von bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnlichen N-Konfigurationen durch bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliche N-Hilbertsudokus gegeben:

Satz 3.2.12: *Seien $\mathcal{A} \subset [N]^2$ und für $(i, j) \in \mathcal{A}$ $S_{ij} \subset \mathcal{B}$, sodass $K := ((p_{S_{ij}}), \mathcal{A}) \in \mathcal{HK}_{\mathcal{B}}(N)$ gilt. Seien für $n \in [d]$ und $s \in [F_K^{\mathcal{B}}(n)]$ $(i_s^n, j_s^n) \in \mathcal{A}$ paarweise verschieden mit $v_n \in S_{i_s^n j_s^n}$. Dann sind äquivalent:*

1. *K besitzt eine Lösung $H \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$,*
2. *zu $n \in [d]$ existiert ein $\sigma_n \in S_N$, mit $\sigma_n(i_s^n) = (j_s^n)$ für alle $s \in [F_K^{\mathcal{B}}(n)]$ sodass für alle $i \in [N]$ gilt:*

$$(i, \sigma_n(i)) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow i = i_s^n \text{ für ein } s \in [F_K^{\mathcal{B}}(n)].$$

Beweis: Angenommen es gelte 1. und zu $(i, j) \in [N]^2 \backslash \mathcal{A}$ sei $S_{ij} \subset \mathcal{B}$, sodass $H := (p_{S_{ij}})$ gilt. Nach Proposition 3.2.6 existiert dann zu $n \in [d]$ ein $\sigma_n \in S_N$ mit $v_n \in S_{ij} \Leftrightarrow j = \sigma_n(i)$ für alle $i \in [N]$. Seien $n \in [d]$ und $i \in [N]$. Gilt $i = i_s^n$ für ein $s \in [F_K^{\mathcal{B}}(n)]$, dann gilt $v_n \in S_{ij_s^n}$ und $v_n \in S_{i\sigma_n(i)}$. Wegen Lemma 3.2.3 gilt dann $\sigma_n(i) = j_s^n$, und damit auch $(i, \sigma_n(i)) = (i_s^n, j_s^n) \in \mathcal{A}$. Angenommen, es gelte $i \neq i_s^n$ für alle $s \in [F_K^{\mathcal{B}}(n)]$. Dann gilt $v_n \notin S_{ij}$ für alle $j \in [N]$ mit $(i, j) \in \mathcal{A}$, aber $v_n \in S_{i\sigma_n(i)}$, also $(i, \sigma_n(i)) \notin \mathcal{A}$. Also gilt 2.
Angenommen nun, es gelte 2. Sei $H := H^{\mathcal{B}}_{\sigma_1, \dots, \sigma_d} \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ (s.3.2.7). Wir wollen zeigen, dass H eine Lösung von K ist. Sei zu $(i, j) \in [N]^2 S'_{ij} \subset \mathcal{B}$, sodass gilt $H = (p_{S'_{ij}})$. Für $n \in [d]$ und $(i, j) \in [N]^2$ gilt dann:

$$\begin{aligned} v_n \in S'_{ij} \text{ und } (i, j) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow& j = \sigma_n(i) \text{ und } (i, \sigma_n(i)) \in \mathcal{A} \\ \Leftrightarrow& (i, j) = (i_s^n, j_s^n) \text{ für ein } s \in [d] \\ \Leftrightarrow& v_n \in S_{ij}. \end{aligned}$$

Also ist H eine Lösung von K. ∎

Proposition 3.2.13: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ mit $N \geq 4, d \geq 2$, $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_d\}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^d$. Sei für $(i, j) \in [N]^2$ $S_{ij} \subset \mathcal{B}$, so dass $H := (p_{S_{ij}}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ gewöhnlich bezüglich $\mathcal{B}$ ist, und sodass $i_0, j_0, k_0, l_0, s_0, t_0 \in [N], \omega, \rho \in [d]$ existieren mit $i_0 \neq k_0, j_0 \neq l_0, s_0 \notin$*

$\{i_0, k_0\}, t_0 \notin \{j_0, l_0\}$ und $\omega \neq \rho$, so dass $v_\omega \in S_{i_0 j_0} \cap S_{k_0 l_0}, v_\rho \in S_{i_0 l_0} \cap S_{k_0 j_0}, v_\omega \in S_{s_0 t_0}$ und $v_\rho \notin S_{s_0 t_0}$ gilt.
Sei $H'_\alpha := (q_{ij}) \in \mathrm{Mat}(\mathcal{L}(\mathbb{C}^d), N)$ mit

$$q_{i_0 j_0} = p_{\tilde{S}_{i_0 j_0}}, q_{k_0 l_0} := p_{\tilde{S}_{k_0 l_0}}, q_{i_0 l_0} := p_{\tilde{S}_{i_0 l_0}}, q_{k_0 j_0} = p_{\tilde{S}_{k_0 j_0}},$$

wobei

$$\begin{aligned}
\tilde{S}_{i_0 j_0} &:= (S_{i_0 j_0} \backslash \{v_\omega\}) \cup \{v_\omega + \alpha v_\rho\}, \\
\tilde{S}_{k_0 l_0} &:= (S_{k_0 l_0} \backslash \{v_\omega\}) \cup \{v_\omega + \alpha v_\rho\}, \\
\tilde{S}_{i_0 l_0} &:= (S_{i_0 l_0} \backslash \{v_\rho\}) \cup \{v_\omega - \frac{1}{\overline{\alpha}} v_\rho\}, \\
\tilde{S}_{k_0 j_0} &:= (S_{k_0 j_0} \backslash \{v_\rho\}) \cup \{v_\omega - \frac{1}{\overline{\alpha}} v_\rho\},
\end{aligned}$$

und $\alpha \in \mathbb{C}^*$, und

$$q_{mn} := p_{S_{mn}} \text{ für } (m,n) \in [N]^2 \backslash \{(i_0, j_0), (k_0, j_0), (i_0, l_0), (k_0, l_0)\}$$

gelte. Dann gilt $H'_\alpha \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ und H'_α ist nicht-kommutativ.

Beweis: Zunächst soll gezeigt werden, dass $H' \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ gilt. Zu zeigen ist

$$\sum_{s=1}^{N} q_{st} = \sum_{s=1}^{N} q_{ts} = \mathbb{1}, \text{ für alle } t \in [N].$$

Falls $t \in [N] \backslash \{i_0, j_0, k_0, l_0\}$ gilt, so folgt diese Aussage direkt wegen $q_{st} = p_{S_{st}}, q_{ts} = p_{S_{ts}}$ für $s \in [N]$. Durch $\mathcal{B}' := (\mathcal{B} \backslash \{v_\omega, v_\rho\}) \dot{\cup} \{v_\omega + \alpha \cdot v_\rho, v_\omega - \frac{1}{\overline{\alpha}} \cdot v_\rho\}$ wird eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^d$ definiert und es gilt:

$$\left(\dot{\cup}_{s \in [N] \backslash \{i_0, k_0\}} S_{s j_0}\right) \dot{\cup} \left(\tilde{S}_{i_0 j_0} \dot{\cup} \tilde{S}_{k_0 j_0}\right) = \mathcal{B}'.$$

Also gilt nach Lemma 2.3.20:

$$\sum_{s=1}^{N} q_{s j_0} = \left(\sum_{s \in [N] \backslash \{i_0, k_0\}} p_{S_{s j_0}}\right) + p_{\tilde{S}_{i_0 j_0}} + p_{\tilde{S}_{k_0 j_0}} = \mathbb{1}.$$

Analog folgt:

$$\sum_{s=1}^{N} q_{s l_0} = \sum_{s=1}^{N} q_{i_0 s} = \sum_{s=1}^{N} q_{k_0 s} = \mathbb{1}.$$

Bleibt zu zeigen, dass H' nicht-kommutativ ist. Hierzu genügt es nach Proposition 2.3.9 und Definition 2.3.7 für $V_1 := q_{s_0 t_0}(\mathbb{C}^d)$ und $V_2 := q_{i_0 j_0}(\mathbb{C}^d)$ zu zeigen, dass gilt:

$$(V_1 \cap (V_1 \cap V_2)^\perp) \not\perp (V_2 \cap (V_1 \cap V_2)^\perp).$$

Sei $S := S_{s_0 t_0} \cap \tilde{S}_{i_0 j_0}$. Wir wollen nun zeigen, dass $\mathrm{Span}(S) = V_1 \cap V_2$ gil.t Dabei gilt $\mathrm{Span}(S) \subset V_1 \cap V_2$ wegen $S \subset V_1 \cap V_2$. Sei nun $v \in V_1 \cap V_2$ und sei $S_1 := S_{s_0 t_0} \backslash S$. Wegen $v \in V_1$ besitzt v eine eindeutige

Darstellung:

$$v = \sum_{x \in S} \lambda_x \cdot x + \sum_{x' \in S_1} \mu_{x'} \cdot x'. \tag{9}$$

Wir wollen zunächst zeigen, dass dann jeder der Koeffizienten $\mu_{x'} = 0$ ist. Sei dazu $S_2 := \tilde{S}_{i_0 j_0} \backslash S$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Angenommen $x' \in S_1 \backslash \{v_w\}$. Dann gilt $x' \in B \backslash (S \cup (S_2 \backslash \{v_\omega + \alpha v_\rho\}))$. Also gilt $x' \perp S \cup (S_2 \backslash \{v_\omega + \alpha v_\rho\})$. Wegen $v_\rho \notin S_{s_0 t_0}$ gilt andererseits $x' \in B \backslash \{v_\omega, v_\rho\}$. Daher gilt $x' \perp v_\omega + \alpha v_\rho$. Also gilt $x' \perp S \cup S_2$, also auch $x' \in \operatorname{Span}(S \cup S_2)^\perp = V_2^\perp \subset (V_1 \cap V_2)^\perp$. Es folgt, dass in Gl. (9) gilt:

$$\mu_{x'} = \langle x', v \rangle = 0.$$

2. Angenommen, in Gl. (9) würde $\mu_{v_\omega} \neq 0$ gelten. Nach Vorraussetzung gilt in Gl. (9) $v \in V_1 \cap V_2$. Also würde mit 1. gelten

$$v_\omega = v - \sum_{x \in S} \lambda_x \cdot x \in V_1 \cap V_2 \subset V_2,$$

Damit hätte v_ω eine eindeutige Darstellung

$$v_\omega = \sum_{x \in S} \tilde{\lambda}_x \cdot x + \sum_{x' \in S_2} \tilde{\mu}_{x'} \cdot x'.$$

Für $x \in S$ gilt dann aber

$$\tilde{\lambda}_x = \langle x, v_\omega \rangle = 0,$$

und für $x' \in S_2 \backslash \{v_\omega + \alpha v_\rho\}$ gilt $\tilde{\mu}_{x'} = \langle x', v_\omega \rangle = 0$. Also gilt

$$v_\omega = \mu_{v_\omega + \alpha v_\rho} \cdot (v_\omega + \alpha v_\rho),$$

was im Widerspruch zur linearen Abhängigkeit von v_ω und v_ρ steht. Also gilt $\mu_{v_\omega} = 0$.

Es folgt:

$$v = \sum_{x \in S} \lambda_x \cdot x \in \operatorname{Span}(S),$$

und somit $V_1 \cap V_2 \subset \operatorname{Span}(S)$, also zusammenfassend:

$$V_1 \cap V_2 = \operatorname{Span}(S).$$

Es gilt $v_\omega \perp S$ und $v_{v_\omega + \alpha \cdot v_\rho} \perp S$, und damit

$$v_\omega \in V_1 \cap \operatorname{Span}(S)^\perp = V_1 \cap (V_1 \cap V_2)^\perp$$

und

$$v_\omega + \alpha \cdot v_\rho \in V_2 \cap \operatorname{Span}(S)^\perp = V_2 \cap (V_1 \cap V_2)^\perp.$$

Wegen $v_\omega \not\perp v_\omega + \alpha \cdot v_\rho$ gilt also nach Lemma 2.1.18

$$(V_1 \cap (V_1 \cap V_2)^\perp) \not\perp (V_2 \cap (V_1 \cap V_2)^\perp),$$

und die Nicht-Kommutativität von H' ist bewiesen. ■

Beispiel 3.2.14: Sei $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^4, 4))$ mit

$$H := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_1 \\ e_3 & e_4 & e_1 & e_2 \\ e_4 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}.$$

und sei $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Dann gilt für

$$H'_\alpha := (q_{ij}) := \begin{pmatrix} \tilde{e}_5 & e_2 & \tilde{e}_6 & e_4 \\ e_2 & e_3 & e_4 & e_1 \\ \tilde{e}_6 & e_4 & \tilde{e}_5 & e_2 \\ e_4 & e_1 & e_2 & e_3 \end{pmatrix}, \text{ wobei } \tilde{e}_5 := e_1 + \alpha \cdot e_3, \tilde{e}_6 := e_1 - \frac{1}{\alpha} \cdot e_3,$$

$H'_\alpha \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^4, 4)$. Außerdem ist H'_α nicht-kommutativ. Es gilt nämlich $\mathrm{Span}(e_1) \not\perp \mathrm{Span}(\tilde{e}_5)$, $\mathrm{Span}(e_1) \neq \mathrm{Span}(\tilde{e}_5)$, und somit gilt nach Proposition 2.3.19:

$$q_{11}q_{24} \neq q_{24}q_{11}.$$

Proposition 3.2.15: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ mit $d \leq N$. In einem gewöhnlichen Hilbertsudoku $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ ist die Anzahl der $(i, j) \in [N]^2$ mit $p_{ij} = 0$ stets größer gleich der Anzahl der $(k, l) \in [N]^2$ mit $\mathrm{rang}(p_{kl}) > 1$.*

Beweis: Wir zeigen per Induktion über $n \in [N]$: Sei $k \in [N]$ und existieren paarweise verschiedene $l_1, \dots, l_n \in [N]$ mit $\mathrm{rang}(p_{kl_i}) > 1$ für $i \in [n]$, dann existieren paarweise verschiedene $l'_1, \dots, l'_n \in [N]$ mit $p_{kl'_i} = 0$ für $i \in [n]$. Dann folgt direkt die Aussage des Korollars. Sei also $n = 1$ und $(k, l) \in [N]^2$ mit $\mathrm{rang}(p_{kl}) > 1$. Dann gilt

$$\sum_{s=1, s\neq l}^{N} p_{ks} = \mathbb{1} - p_{kl},$$

und daher

$$\sum_{s=1, s\neq l} \mathrm{rang}(p_{ks}) \overset{(*)}{=} \mathrm{rang}(\sum_{s=1, s\neq l}^{N} p_{ks}) = \mathrm{rang}(\mathbb{1} - p_{kl}) \leq d - 2 \leq N - 2.$$

Dabei gilt $(*)$ wegen Satz 2.3.11 und Proposition 2.3.8. Wegen $\mathrm{rang}(p_{ks}) \in \mathbb{N}$ für alle $s \in \mathbb{N}$ existiert also ein $l' \in [N] \backslash \{l\}$ mit $\mathrm{rang}(p_{kl}) = 0$. Damit ist die Aussage für $n = 1$ bewiesen. Sei nun die Aussage für ein $n \in [N]$ bewiesen. Seien $l_1, \dots, l_{n+1} \in [N]$ mit $\mathrm{rang}(p_{kl_i}) > 1$ für $i \in [n+1]$. Dann existieren nach Induktionsvorraussetzung paarweise verschiedene $l'_1, \dots, l'_n \in [N]$ mit $p_{kl'_i} = 0$ für $i \in [n]$. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{s=1, s\notin\{l_1,\dots,l_{n+1},l'_1,\dots,l'_n\}}^{N} \mathrm{rang}(p_{ks}) &\overset{(*)}{=} \mathrm{rang}(\sum_{s=1, s\notin\{l_1,\dots,l_{n+1},l'_1,\dots,l'_n\}} p_{ks}) \\ &= \mathrm{rang}(\mathbb{1} - \sum_{i=1}^{n+1} p_{kl_i}) \leq d - 2 \cdot (n+1) \leq N - 2 \cdot (n+1). \end{aligned}$$

Dabei gilt wieder $(*)$ wegen Satz 2.3.11 und Proposition 2.3.8. Wegen $\mathrm{rang}(p_{ks}) \in \mathbb{N}$ für alle $s \in [N]$ existiert also ein $l' \in [N] \backslash \{l_1, \ldots, l_{n+1}, l'_1, \ldots, l'_n\}$ mit $\mathrm{rang}(p_{kl'}) = 0$, also $p_{kl'} = 0$. Mit $l'_{n+1} := l'$ ist die Aussage für $n+1$ und damit die Induktion bewiesen. Somit folgt die Aussage des Korollars. ■

3.3 Klassische Hilbertsudokus

In dieser Subsektion werden klassische Hilbertsudokus und klassische Hilbertsudokukonfigurationen eingeführt, die Analoga zu *latin squares* (s.3.3.3) bzw. *partial latin squares* (s.3.3.5) bilden. Es wird gezeigt, dass es partial latin squares gibt, die nicht zu einem latin square vervollständigt werden können, als Hilbertsudoku jedoch lösbar sind (s.3.3.8).

Definition 3.3.1 (Klassisches Hilbertsudoku): Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Ein Hilbertsudoku $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ heißt *klassisch*, falls $\mathscr{H} = \mathbb{C}^N$ gilt und für jedes $(i_0, j_0) \in [N]^2$ ein $k \in [N]$ existiert, so dass $p_{i_0 j_0} = p_k$ gilt.

Definition 3.3.2 (Klassische Hilbertsudoku-Konfiguration): Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Eine N-Konfiguration $((p_{ij}), \mathcal{A}) \in \mathcal{HK}(\mathbb{C}^N, N)$ heißt *klassisch*, falls für jedes $(i_0, j_0) \in \mathcal{A}$ ein $k \in [N]$ existiert, so dass $p_{i_0 j_0} = p_k$ gilt. Eine klassische N-Konfiguration $((p_{ij}), \mathcal{A})$ heißt *klassisch lösbar*, wenn ein klassisches Hilbertsudoku $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^N, N)$ existiert, das $((p_{ij}), \mathcal{A})$ löst.

Latin Squares sind $N \times N$-Matrizen mit Einträgen aus $[N]$, so dass jede Zahl aus $[N]$ pro Zeile und pro Spalte genau einmal vorkommt. Sie bilden ein klassisches Konzept der Kombinatorik, mit weitreichenden Beiträgen zu $\ldots$, mit dem bereits Euler arbeitete [1].

Definition 3.3.3 (Latin Square): (s.[2]) Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Ein N-*latin square* ist eine Matrix $A := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}([N], N)$, so dass für alle $i_0, k_0 \in [N]$ genau ein $j_0 \in [N]$ existiert, mit

$$a_{i_0 j_0} = k_0, \tag{10}$$

und für alle $j_1, k_1 \in [N]$ genau ein $i_1 \in [N]$ existiert, mit

$$a_{i_1 j_1} = k_1. \tag{11}$$

Der Name *latin square* stammt daher, dass Euler statt Zahlen oft lateinische Buchstaben als Einträge für latin squares benutzte. In diesem Sinne lassen sich latin squares auch auf folgende, verallgemeinerte Weise definieren, die die Konzepte der Konjugiertheit, Äquivalenz oder Orthogonalität von latin squares (s.[1]) vereinfacht:

Definition 3.3.4 (Verallgemeinertes Latin Square): (s.[1]) Ein *latin square* ist ein Quadrupel $(R, C, S; L)$, wobei R, C, S Mengen sind mit $\#R = \#C = \#S$ und

$$L : R \times C \to S$$

eine Abbildung ist, sodass für alle $i \in R, x \in S$ genau ein $j \in C$ existiert mit

$$L(i, j) = x, \tag{12}$$

und für alle $j \in C, x \in S$ genau ein $i \in R$ existiert mit

$$L(i, j) = x. \tag{13}$$

Im Folgenden verstehen wir latin squares ausschließlich im Sinne von Definition 3.3.3. Im Fall von Hilbertsudokus besteht eine zentrale Frage darin, wann eine N-Konfiguration lösbar ist. Analog definiert man im Fall von latin squares *partial latin squares*, und fragt sich, wann diese zu latin squares vervollständigt werden können:

Definition 3.3.5 (N-Partial Latin Square): (s.[2]) Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Ein N-*partial latin square* ist eine Matrix $M := (m_{ij}) \in \mathrm{Mat}([N] \cup \{*\}, N)$, sodass alle für $i_0, k_0 \in [N]$ höchstens ein $j_0 \in [N]$ existiert, mit

$$m_{i_0 j_0} = k_0, \tag{14}$$

und für alle $j_1, k_1 \in [N]$ höchstens ein $i_1 \in [N]$ existiert, mit

$$m_{i_1 j_1} = k_1. \tag{15}$$

M heißt *komplettierbar*, wenn ein N-latin square $A := (a_{ij})$ existiert mit:

$$m_{ij} \neq * \Rightarrow a_{ij} = m_{ij}, \text{ für alle } (i,j) \in [N]^2. \tag{16}$$

Die folgende Bemerkung erklärt, wie sich latin squares als klassische Hilbertsudokus und umgekehrt, und wie sich klassische N-Konfigurationen als partial latin squares und umgekehrt verstehen lassen:

Bemerkung 3.3.6: Sei $N \in \mathbb{N}^*$, $A := (a_{ij})$ ein N-latin square und $H := (p_{ij}) \in \mathrm{Mat}(\mathcal{L}(\mathbb{C}^N, N))$, wobei p_{ij} die Projektion auf $\mathrm{Span}(e_{a_{ij}})$ sei. Dann ist H ein klassisches Hilbertsudoku. Wegen Gl. (10) (bzw. Gl. (11)) sind nämlich paarweise verschiedene Einträge aus der selben Zeile (bzw. Spalte) auf H orthogonal, und nach Korollar 2.3.15 folgt für alle $i_0, j_0 \in [N]$

$$\sum_{k=1}^{N} p_{i_0 k} = \mathbb{1},$$
$$\sum_{k=1}^{N} p_{k j_0} = \mathbb{1}.$$

Andererseits ergibt sich für jedes klassische Hilbertsudoku $H' := (p'_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^N, N)$ durch die Matrix $A' := (a'_{ij})$ mit

$$a'_{ij} := k, \text{ falls } p'_{ij} = p_k \text{ gilt },$$

nach Bemerkung 3.1.3 ein latin square. Die beiden oben aufgeführten Transformationen sind zueinander invers, und setzen die Menge der N-latin squares daher in eine 1-zu-1-Beziehung zur Menge der klassischen N-Hilbertsudokus. Für A und H wie oben, nennen wir A das *zu H gehörende latin square* und H das *zu A gehörende klassische Hilbertsudoku.*
In analoger Weise erhält man aus einem partial latin square $B := (b_{ij})$ durch $K := ((p_{ij}), \mathcal{A},$ mit

$$\mathcal{A} := \{(i,j) \in [N]^2 \mid b_{ij} \neq *\},$$
$$p_{ij} := p_{b_{ij}}, \text{ für } (i,j) \in \mathcal{A},$$

eine klassische N-Konfiguration. Außerdem folgt analog, dass sich für jede klassische N-Konfiguration $K' := ((p'_{ij}), \mathcal{A}') \in \mathcal{HK}(\mathbb{C}^N, N)$ durch die Matrix $B' := (b'_{ij})$ mit

$$\begin{aligned} b'_{ij} &:= k, \text{ falls } (i,j) \in \mathcal{A}', p'_{ij} = p_k, \\ b'_{ij} &:= *, \text{ sonst} \end{aligned}$$

ein N-partial latin square ergibt. Wieder sind die beiden aufgeführten Transformationen zueinander invers und setzen die Menge der N-partial latin squares in eine 1-zu-1-Beziehung zur Menge der klassischen N-Konfigurationen. Für B und K wie oben, nennen wir B das *zu K gehörende N-partial latin square* und K die *zu B gehörende klassische N-Konfiguration* .

Bemerkung 3.3.7: Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Eine klassische N-Konfiguration $K \in \mathcal{HK}(\mathbb{C}^N, N)$ ist genau dann klassisch lösbar, wenn das zu K gehörende N-partial latin square komplettierbar ist.

Klassische N-Hilbertsudokus und N-Konfigurationen verallgemeinern N-latin squares und N-partial latin squares. Das folgende Beispiel zeigt, dass es N-partial latin squares, die nicht komplettierbar sind, die jedoch als klassische N-Konfigurationen aufgefasst lösbar sind.

Beispiel 3.3.8: Die klassische 4-Konfiguration

$$K := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & * & * \\ e_3 & e_4 & * & * \\ * & * & e_2 & e_4 \\ * & * & e_1 & e_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{HK}(\mathbb{C}^4, 4)$$

besitzt keine klassische Lösung. Sei nämlich $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^4, 4)$ eine Lösung von K. Nach Lemma 3.1.11 gilt dann

$$p_{14}(\mathbb{C}^4) \perp \sum_{i=1}^{4} \mathrm{Span}(e_i) = \mathbb{C}^4,$$

also $p_{14}(\mathscr{H}) = \{0\}$, und damit $p_{14} = 0$. Damit kann H nicht klassisch sein. Allerdings besitzt K die gewöhnliche Lösung

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3, e_4 & 0 \\ e_3 & e_4 & 0 & e_1, e_2 \\ 0 & e_1, e_3 & e_2 & e_4 \\ e_2, e_4 & 0 & e_1 & e_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^4, 4).$$

Benjamin Musto und Jamie Vicary führten 2016 *quantum Latin squares* ein [5], $N \times N$-Matrizen, deren Einträge Einheitsvektoren von $\mathbb{C}^N$ sind, sodass die Einträge jeder Zeile bzw. Spalte zusammengefasst jeweils eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^N$ ergeben. Musto und Vicary nutzen quantum Latin squares zur Konstruktion von *unitary error bases* ([5]). Musto nutzt quantum Latin squares außerdem zur Konstruktion von *mutually unbiased bases*, Paare von Orthonormalbasen $\{v_1, \ldots, v_d\}, \{w_1, \ldots, w_d\}$ von $\mathbb{C}^d$, sodass $|\langle v_i, w_j|^2 = \frac{1}{d}$ für alle $i, j \in [d]$ gilt. Musto und Vicary führen außerdem für quantum Latin squares einen Begriff der Orthogonalität ein ([15]), der den von klassischen latin squares ([1]) erweitert. Durch den Übergang jedes Eintrags zur Projektion auf den davon erzeugten Unterraum, ergibt sich nach Lemma 2.3.20 aus einem quantum Latin square ein Hilbertsudoku, in dem jeder Eintrag Rang 1 hat. Dies motiviert im Rahmen der Hilbertsudokus folgende Definition:

Definition 3.3.9 (Semiklassisches Hilbertsudoku): Sei $N \in \mathbb{N}^*$ und $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^N, N)$ ein Hilbertsudoku. H heißt *semiklassisch*, falls $\operatorname{rang}(p_{ij}) = 1$ gilt für alle $i, j \in [N]$.

Die Angabe eines semiklassischen Hilbertsudokus ist äquivalent zur Angabe eines quantum Latin squares. Im Rahmen der Frage nach Lösungen zu Hilbertsudokukonfigurationen stellt sich folgende Frage:

Frage 3.3.10: Sei $N \in \mathbb{N}^*$ und $K := \mathcal{HK}(\mathbb{C}^N, N)$ eine klassische N-Konfiguration, die eine semiklassische Lösung $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^N, N)$ besitzt. Ist K dann auch klassisch lösbar?

3.4 N^2-Block-Hilbertsudokus

Im Folgenden werden N^2-Block-Hilbertsudokus eingeführt, die eine Erweiterung der kombinatorischen Objekte *Sudokus*(s.[2]) darstellen. Es wird gezeigt, dass es Sudokus gibt, die als solche nicht vervollständigt werden können, als N^2-Konfigurationen aufgefasst jedoch eine Lösung durch ein N^2-Block-Hilbertsudokus besitzen.

Definition 3.4.1: Seien $N \in \mathbb{N}^*$. Ein N^2-*Block-Hilbertsudoku* auf $\mathscr{H}$ ist ein Hilbertsudoku $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N^2)$, für das erfüllt ist:

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_{(k-1)\cdot N+i,(l-1)\cdot N+j} = \mathbb{1},$$

für alle $k, l \in [N]$. Gilt $\mathscr{H} = \mathbb{C}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}^*$, so nennen wir H auch ein (N^2, d)-*Block-Hilbertsudoku*.

Definition 3.4.2: Sei $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, $N \in \mathbb{N}^*$. Eine N^2-*Block-Hilbertsudokukonfiguration* (oder N^2-*Block-Konfiguration*) auf $\mathscr{H}$ ist eine N^2-Konfiguration $K := (\mathcal{A}, (p_{ij}))$, wobei $\mathcal{A} \subset [N]^2$ sei, so dass gilt

$$p_{(k-1)\cdot N+i_1,(l-1)\cdot N+j_1}\ p_{(k-1)\cdot N+i_2,(l-1)\cdot N+j_2} = 0$$

für alle $k, l \in [N], (i_1, j_1), (i_2, j_2) \in [N]^2$, so dass $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$ und $(k \cdot N + i_1, l \cdot N + j_1), (k \cdot N + i_2, l \cdot N + j_2) \in \mathcal{A}$, und

$$\sum_{i,j\in[N]} p_{k_1\cdot N+i,l_1\cdot N+j} = \mathbb{1},$$

für $(k_1, l_1) \in [N]^2)$, falls gilt

$$((k_1 - 1) \cdot N + i, (l_1 - 1) \cdot N + j) \in \mathcal{A} \text{ für alle } (i, j) \in [N]^2.$$

Ist $\mathscr{H} = \mathbb{C}^d$, so nennen wir K auch (N^2, d)-*Blockkonfiguration*.

Definition 3.4.3 (N^2-Sudoku): (s.[2]) Ein N^2-*sudoku* ist ein N^2-latin square (a_{ij}), das für alle $i, j \in \{0, \ldots, N\}$ erfüllt:

$$\text{Für alle } n \in [N^2] \text{ existiert genau ein } (k, l) \in [N]^2, \text{ sodass } a_{i\cdot N+k,j\cdot N+l} = n.$$

Definition 3.4.4 (N^2-Partial Sudoku): (s.[2]) Ein N^2-*partial sudoku* ist ein N^2-partial latin square (a_{ij}), das für alle $i, j \in \{0, \ldots, N\}$ erfüllt:

$$\text{Für alle } n \in [N^2] \text{ existiert höchstens ein } (k,l) \in [N]^2, \text{ sodass } a_{i \cdot N+k, j \cdot N+l} = n.$$

Bemerkung 3.4.5: Das zu einem N^2-sudoku gehörende N^2-latin square (s.3.3.6) ist ein klassisches N^2-Block-Hilbertsudoku, und das zu einem klassischen N^2-Block-Hilbertsudoku gehörende latin square ist ein N^2-sudoku. Analoges gilt für N^2-partial sudokus und N^2-Blockkonfigurationen. Dies folgt direkt aus 2.3.20 und 2.3.11.

Im Fall $N = 3$ entsprechen klassische N^2-Blockkonfigurationen den Sudokuspielen, die auch außerhalb der Mathematik bekannt sind:

$$\begin{pmatrix} * & p_4 & * & * & p_7 & * & * & p_1 & * \\ * & * & p_3 & p_4 & * & p_1 & p_2 & * & * \\ p_8 & * & * & * & * & * & * & * & p_5 \\ p_9 & * & p_7 & * & * & * & p_5 & * & p_6 \\ * & * & * & p_8 & * & p_7 & * & * & * \\ p_2 & * & p_5 & * & * & * & p_4 & * & p_1 \\ p_5 & * & * & * & * & * & * & * & p_4 \\ * & * & p_8 & p_3 & * & p_6 & p_9 & * & * \\ * & p_1 & * & * & p_4 & * & * & p_2 & * \end{pmatrix} \leftrightsquigarrow$$

	4			7			1	
		3	4		1	2		
8								5
9		7				5		6
			8		7			
2		5				4		1
5								4
		8	3		6	9		
	1			4			2	

Hilbertsudokus erweitern sudokus in dem Sinne, dass es N^2-partial sudokus gibt, die nicht durch ein N^2-sudoku komplettiert werden können, jedoch als N^2-Blockkonfiguration durch ein N^2-Blockhilbertsudoku gelöst werden können. Im Folgenden wird ein solches Beispiel gezeigt:

Beispiel 3.4.6: Die klassische $(4,4)$-Block-Konfiguration

$$K := \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & e_3 & e_1 \\ * & e_1 & e_2 & * \\ * & e_3 & * & * \end{pmatrix}$$

besitzt keine Lösung, die ein klassisches $(4,4)$-Block-Hilbertsudoku ist. Sie kann jedoch durch ein klassisches Hilbertsudoku gelöst werden und besitzt eine Lösung, die ein gewöhnliches $(4,4)$-Block-Hilbertsudoku ist.
Sei nämlich $H := (p_{ij})$ eine klassische Lösung von K. Wegen *Lemma* 3.1.11, da H klassisch ist, folgt entweder

1. $p_{43} = p_4$, oder

2. $p_{43} = p_1$.

In Fall 1 gilt wiederum wegen *Lemma* 3.1.11, und da H klassisch ist $p_{44} = p_2$, womit H kein $(4,4)$-Block-Hilbertsudoku ist, da damit $p_{33} \neq p_{44}$ gefordert wäre. In Fall 2 gilt wegen Gl. (5) und Lemma 2.3.20 $p_{13} = p_4$. Mit Lemma 3.1.11 und da H klassisch ist, folgt $p_{12} = p_2$, und sukzessive folgt mit Gl. (5) und Lemma 2.3.20 $p_{22} = p_4, p_{21} = p_2$. Also ist auch in Fall 2 H kein $(4,4)$-Block-Hilbertsudoku, da dann $p_{12} \neq p_{21}$ gefordert wäre.

K besitzt also keine Lösung, die ein klassisches $(4,4)$-Block-Hilbertsudoku ist. Jedoch ist K klassisch lösbar durch

$$H_1 := \begin{pmatrix} e_2 & e_4 & e_1 & e_3 \\ e_4 & e_2 & e_3 & e_1 \\ e_3 & e_1 & e_2 & e_4 \\ e_1 & e_3 & e_4 & e_2 \end{pmatrix},$$

und besitzt die gewöhnliche $(4,4)$-Block-Hilbertsudoku-Lösung

$$H_2 := \begin{pmatrix} e_1, e_3 & 0 & 0 & e_4, e_2 \\ 0 & e_2, e_4 & e_3 & e_1 \\ e_4 & e_1 & e_2 & e_3 \\ e_2 & e_3 & e_4, e_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.5 (r, N)-Zeilenkonfigurationen

In der folgenden Subsektion werden N-Konfigurationen disktutiert, deren Einträge genau die der ersten r Zeilen für ein $r \in [N-1]$ sind. Aus der Theorie der latin squares ist bekannt, dass jedes partial latin square von entsprechender Form komplettierbar, und damit jede solche klassische N-Konfiguration klassisch lösbar ist. Dieses Ergebnis wird für den Fall von gewöhnlichen N-Konfigurationen verallgemeinert.

Definition 3.5.1 ((r, N)-Zeilenkonfiguration): Seien $r \in [N]$ und $K := ((p_{ij}), [r] \times [N]) \in \mathcal{HK}(\mathscr{H}, N)$ eine Hilbertsudokukonfiguration. Dann heißt K eine (r, N)-*Zeilenkonfiguration* oder (r, N)-*Konfiguration* auf $\mathscr{H}$.

Aus der Theorie der latin squares lässt sich direkt eine Existenzaussage für die Lösung von klassischen (r, N)-Konfigurationen übertragen. Hierzu wird zunächst definiert:

Definition 3.5.2 ((r, N)-Latin Rectangle): (s.[1]) Sei $r \in [N]$. Ein (r, N)-*latin rectangle* ist ein N-partial latin square $M := (m_{ij})$ für das gilt:

$$m_{ij} \in [N] \Leftrightarrow 1 \leq i \leq r.$$

Bemerkung 3.5.3: Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $r \in [N]$. Ein N-partial latin square ist genau dann ein (r, N)-latin rectangle, wenn die zugehörige klassische N-Konfiguration (s.3.3.6) eine (r, N)-Zeilenkonfiguration ist.

Proposition 3.5.4: *(s.[1]) Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $r \in [N]$. Dann ist jedes (r, N)-latin rectangle komplettierbar.*

Mit Bemerkung 3.3.7 und Bemerkung 3.5.3 folgt daraus also direkt, dass jede klassische (r, N)-Zeilenkonfiguration eine klassische Lösung besitzt. Die klassischen Lösungen einer klassischen $(2, 4)$-Konfiguration lassen sich leicht charakterisieren:

Beispiel 3.5.5: Sei $K := (p_{ij}) \in \mathcal{HK}(\mathbb{C}^4, 4)$ eine klassische $(2,4)$-Konfiguration. Da für $(i_0, j_0) \in [2] \times [4]$ ein $k \in [4]$ existiert, so dass $p_{i_0 j_0} = p_k$ gilt, lässt sich K darstellen als:

$$K = \begin{pmatrix} e_i & e_j & e_k & e_l \\ e_{\sigma(i)} & e_{\sigma(j)} & e_{\sigma(k)} & e_{\sigma(l)} \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix},$$

wobei $i,j,k,l \in [4]$ gilt, i,j,k,l wegen Bemerkung 3.1.10 paarweise verschieden sind und $\sigma \in S_4$ gilt. Außerdem ist wegen Bemerkung 3.1.10 σ weder die Identität, noch von der Form $(\alpha\beta)$, noch von der Form $(\alpha\beta\gamma)$. Also ist σ von der Form $(\alpha\beta)(\gamma\delta)$ oder von der Form $(\alpha\beta\gamma\delta)$. Im ersten Fall stellt

$$\begin{pmatrix} e_i & e_j & e_k & e_l \\ e_{\sigma(i)} & e_{\sigma(j)} & e_{\sigma(k)} & e_{\sigma(l)} \\ e_k & e_l & e_i & e_j \\ e_{\sigma(k)} & e_{\sigma(l)} & e_{\sigma(i)} & e_{\sigma(j)} \end{pmatrix}$$

eine Lösung von K dar, wobei ohne Einschränkung $\sigma(i) \neq k$ angenommen wurde. Im zweiten Fall stellt

$$\begin{pmatrix} e_i & e_j & e_k & e_l \\ e_{\sigma(i)} & e_{\sigma(j)} & e_{\sigma(k)} & e_{\sigma(l)} \\ e_{\sigma^2(i)} & e_{\sigma^2(j)} & e_{\sigma^2(k)} & e_{\sigma^2(l)} \\ e_{\sigma^3(i)} & e_{\sigma^3(j)} & e_{\sigma^3(k)} & e_{\sigma^3(l)} \end{pmatrix}$$

eine Lösung von K dar.

Die Aussage, dass jede klassische (r,N)-Konfiguration eine klassische Lösung besitzt, lässt sich auf den Fall von gewöhnlichen (r,N)-Konfigurationen erweitern:

Proposition 3.5.6: *Seien $N,d \in \mathbb{N}^*, r \in [N]$ und $K \in \mathcal{HK}_{\mathcal{B}}(N)$ eine bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliche (r,N)-Konfiguration. Dann besitzt K eine bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliche Lösung $H \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$.*

Beweis: Ohne Einschränkung gelte $1 \leq r < N$. Sei für $(i,j) \in [r] \times [N]$ $S_{ij} \subset \mathcal{B}$ mit $p_{ij} = p_{S_{ij}}$(s.Notation 3.1.15). Sei $n \in [d]$. Genau wie im Beweis von Lemma 3.2.3 folgt, dass für alle $i \in [r]$ genau ein $l_i^n \in [N]$ existiert mit $v_n \in S_{il_i^n}$. Nach Bemerkung 3.1.3 und Satz 2.3.5 gilt $l_i^n \neq l_k^n$ für $i,k \in [r]$ mit $i \neq k$. Also existieren $j_1^n, \dots, j_{N-r}^n \in [N]$ mit $j_1^n < \cdots < j_{N-r}^n$ und $v_n \notin S_{ij_k^n}$ für alle $i \in [r], k \in [N-r]$. Es sei für $n \in [d]$:

$$\sigma_n : [N] \to [N], i \mapsto \begin{cases} l_i^n, & i \in [r], \\ j_{i-r}^n, & i \in \{r+1, \dots, N\}. \end{cases}$$

Dann gilt für $n \in [d]$ $\sigma_n \in S_N$ und für $i,j \in [N]$

$$v_n \in S_{ij} \Leftrightarrow j = \sigma_n(i).$$

Also ist $H := (p_{S_{ij}}) \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ nach Proposition 3.2.6 eine Lösung von K. ■

Damit ist das Problem der Lösbarkeit einer (r,N)-Zeilenkonfiguration für den Fall von bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnlichen N-Konfigurationen gelöst. In [6] wird allgemeiner jedoch gefragt:

Frage 3.5.7: Seien $N \in \mathbb{N} \geq 4, r \in \{2, \dots N-2\}$ und $K := ((p_{ij}), [r] \times [N]) \in \mathcal{HK}(\mathscr{H}, N)$. Existiert dann immer eine Lösung von K. Spezieller, existiert für den Fall $(r,N) = (2,4)$ oder $\mathscr{H} = \mathbb{C}^d$ immer eine Lösung von K? Falls nicht, was sind in den entsprechenden Fällen Gegenbeispiele?

3.6 (r, s, N)-Rechteckskonfigurationen

In dieser Subsektion führen wir (r, s, N)-Konfigurationen ein. Das sind N-Konfigurationen deren Einträge genau die des Durchschnitts der ersten r Zeilen und s Spalten sind. Eine Charakterisierung der Lösbarkeit einer klassischen (r, s, N)-Konfiguration ist bereits durch die analoge Aussage für partial latin squares gegeben. Wir charakterisieren darüber hinaus die Lösbarkeit einer bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnlichen (r, s, N)-Konfiguration durch ein bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliches N-Hilbertsudoku.

Definition 3.6.1: Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $r, s \in [N-1]$. Eine (r, s, N)-*Rechteckskonfiguration* auf $\mathscr{H}$ ist eine Hilbertsudokukonfiguration $K := ((p_{ij}), \mathcal{A}) \in \mathcal{HK}(\mathscr{H}, N)$, sodass $\mathcal{A} = [r] \times [s]$ gilt.

Die Frage nach der Lösbarkeit einer (r, s, N)-Rechteckskonfiguration wird im Fall einer klassischen Konfiguration schon durch das analoge Ergebnis für partial latin squares beantwortet. Hierzu:

Definition 3.6.2: (s.[1]) Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $r, s \in [N-1]$. Ein N-partial latin square $M := (m_{ij})$ heißt (r, s, N)-*latin rectangle* , falls gilt:

$$m_{ij} \in [N] \Leftrightarrow 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s, \text{ für alle } (i, j) \in [N]^2.$$

Bemerkung 3.6.3: Sei $N \in \mathbb{N}^*$ und $r, s \in [N-1]$. Ein N-partial latin square ist genau dann ein (r, s, N)-latin rectangle, wenn die zugehörige klassische N-Konfiguration eine klassische (r, s, N)-Rechteckstransformation ist.

Proposition 3.6.4: *(s.[1]) Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $r, s \in [N]$. Ein (r, s, N)-latin rectangle ist genau dann komplettierbar, wenn gilt:*

$$\#\{(i, j) \in [N]^2 \mid 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s, m_{ij} = n\} \geq r + s - N, \textit{ für alle } n \in [N].$$

Proposition 3.6.5: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, r, s \in [N]$ und $K \in \mathcal{HK}(\mathbb{C}^N, N)$ eine klassische (r, s, N)-Rechteckskonfiguration. Dann besitzt K eine klassische Lösung $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^N, N)$ genau dann, wenn*

$$F_K(n) \geq r + s - N$$

für alle $n \in [N]$ gilt.

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus Proposition 3.6.4, Bemerkung 3.6.3 und Bemerkung 3.3.7. ■

Wir zeigen, dass sich diese Aussage völlig analog auch für gewöhnliche (r, s, N)-Konfigurationen verallgemeinern lässt:

Proposition 3.6.6: *Seien $r, s \in [N-1]$ und $K := ((p_{ij}), [r] \times [s]) \in \mathcal{HK}_{\mathcal{B}}(N)$ eine bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliche (r, s, N)-Konfiguration. Dann besitzt K genau dann eine bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliche Lösung, wenn gilt:*

$$F_K^{\mathcal{B}}(n) \geq r + s - N \textit{ für alle } n \in [d].$$

Beweis: Sei für $(i, j) \in [r] \times [s]$ $S_{ij} \subset \mathcal{B}$ mit $p_{ij} = p_{S_{ij}}$. Angenommen, zu $(i, j) \in [N]^2 \backslash ([r] \times [s])$ sei $S_{ij} \subset \mathcal{B}$, sodass $H := (p_{S_{ij}})$ eine bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliche Lösung von K ist. Sei $n \in [d]$. Nach

Proposition 3.2.6 existieren dann paarweise verschiedene $j_1, \dots, j_r \in [N]$ mit $v_n \in S_{ij_i}$ und $v_n \notin S_{ij}$ für $i \in [r]$ und $j \in [N] \backslash \{j_i\}$. Dann gilt:

$$F_K^{\mathcal{B}}(n) = \#(\{j_i \mid i \in [r]\} \cap [s]) \geq r - (N - s) = r + s - N.$$

Angenommen andererseits, es gelte $F_K^{\mathcal{B}}(n) \geq r + s - N \Leftrightarrow N - s \geq r - F_K^{\mathcal{B}}(n)$ für alle $n \in [d]$. Seien zu $n \in [d]$ und $\alpha \in [F_K^{\mathcal{B}}(n)]$ $(i_\alpha^n, j_\alpha^n) \in [r] \times [s]$ paarweise verschieden mit $v_n \in S_{i_\alpha^n j_\alpha^n}$. Nach der Definition von N-Konfigurationen und Lemma 2.3.17 gilt dann $i_\alpha^n \neq i_\beta^n$ für $\alpha, \beta \in [F_K^{\mathcal{B}}(n)]$ mit $\alpha \neq \beta$. Dann gilt $v_n \notin S_{ij}$ für $i \in [r] \backslash \{i_\alpha^n \mid \alpha \in [F_K^{\mathcal{B}}(n)]\}, j \in [s]$. Für $n \in [d]$ mit $m_n := r - F_K^{\mathcal{B}}(n) > 0$ existieren $k_1^n, \dots k_{m_n}^n$ mit $k_\alpha^n < k_\beta^n$ für $\alpha, \beta \in [m_n]$ mit $\alpha < \beta$ und $\{k_\alpha^n \mid \alpha \in [m_n]\} = [r] \backslash \{i_\beta^n \mid \beta \in [F_K^{\mathcal{B}}(n)]\}$. Für $(i, j) \in [r] \times \{s + 1, \dots, N\}$ definieren wir $S_{ij} \subset \mathcal{B}$ durch:

$$v_n \in S_{ij} \Leftrightarrow r - F_K^{\mathcal{B}}(n) > 0 \text{ und } i = k_\alpha^n, j = s + \alpha \text{ für ein } \alpha \in [m_n].$$

Wegen $N - s \geq r - F_K^{\mathcal{B}}(n)$ ist dies wohldefiniert. Es gilt $\dot\bigcup_{j \in [N]} S_{ij} = \mathcal{B}$ für $i \in [r]$ und $S_{i_1 j} \cap S_{i_2 j} = \emptyset$ für $i_1, i_2 \in [r]$ mit $i_1 \neq i_2$ und $j \in [s + 1, \dots, N]$. Also ist $((p_{S_{ij}}), [r] \times [N])$ nach Lemma 2.3.20 und Lemma 2.3.17 eine bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliche (r, N)-Zeilenkonfiguration, die nach Proposition 3.5.6 eine Lösung besitzt, die ein bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliches N-Hilbertsudoku ist. H ist auch eine Lösung von K. Somit ist die Aussagen bewiesen. ■

3.7 Direkte Summen von Hilbertsudokus

Definition 3.7.1: Seien $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*, H_1 := (p_{ij}^1) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N_1), H_2 := (p_{ij}^2) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N_2)$. Sei dann $H := (p_{ij})$ mit

$$p_{ij} = \begin{cases} p_{ij}^1, & \text{falls } i, j \leq N_1, \\ p_{ij}^2, & \text{falls } i, j \leq N_2, \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases}$$

Dann heißt H die *direkte Summe* von H_1 und H_2 und wir schreiben auch $H := H_1 \oplus H_2$.

Bemerkung 3.7.2: Im Fall von Definition 3.7.1 gilt $H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N_1 + N_2)$.

Definition 3.7.3: Seien $\mathscr{H}$ ein Hilbertraum, $N \in \mathbb{N}^*$ und $H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. H heißt *reduzibel*, falls $N_1, N_2 \in [N], H_1 \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N_1), H_2 \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N_2)$ und ein $g \in G_N$ existieren mit $g \cdot H := H_1 \oplus H_2$. H heißt *irreduzibel*, falls H nicht reduzibel ist.

Bemerkung 3.7.4: Eine Klassifikation der Isotopieklassen von Hilbertsudokus $H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ zu gegebenem Hilbertraum $\mathscr{H}$ und $N \in \mathbb{N}^*$ lässt sich also auf eine Klassifikation der irreduziblen Isotopieklassen von Hilbertsudokus $H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ beschränken.

Frage 3.7.5: Was sind Kriterien für die Irreduzibilität von Hilbertsudokus?

Lemma 3.7.6: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, \mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$, sodass ein $H' \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, 3)$ existiert mit:*

$$H = \mathbb{1}_{\mathscr{H}, N-3} \oplus H'.$$

Dann ist H kommutativ.

Beweis: Wegen Proposition 3.1.13 ist H' kommutativ. Seien $(i, j), (k, l) \in [N]^2$ und $p := p_{ij}, q := p_{kl}$, und ohne Einschränkung gelte $(i, j) \notin \{N-2, N-1, N\}^2$. Dann gilt nach Definition 3.7.1 $p \in \{0, \mathbb{1}\}$, also gilt $pq = qp$. ∎

4 Isotopie von Hilbertsudokus

Auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ lässt eine natürliche Ähnlichkeitsbeziehung definieren, die wir *Isotopie* nennen und die in der folgenden Sektion eingeführt wird. Zwei Hilbertsudokus $H_1, H_2 \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ heißen *isotop*, wenn sie durch eine endliche Folge von Zeilenpermutationen, Spaltenpermutationen, Spiegelung an einer der Diagonalen, 90°-Rotationen oder Konjugation jedes Eintrags mit einem unitären Operator ineinander übergeführt werden können. Dies wird in Section 4.1 und Section 4.2 formal durch Operationen der Gruppen G_N (4.1.4) und $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ (2.2.5) auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ hergeleitet. In Section 4.3 werden Isotopieinvarianten aufgeführt. Um eine weitere Isotopieinvariante zu bekommen, werden in Section 4.4 Dimensionssudokus eingeführt und in 4.4 und 4.5 diskutiert. Im Folgenden seien immer $N, d \in \mathbb{N}^*$.

4.1 Die Gruppe G_N

Wir werden G_N über die in der folgenden Definition eingeführten Erzeuger definieren.

Definition 4.1.1: Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}
&\mathrm{r}_\sigma : [N]^2 \to [N]^2, (i,j) \mapsto (\sigma(i), j), \text{ für } \sigma \in S_N,\\
&\mathrm{c}_\sigma : [N]^2 \to [N]^2, (i,j) \mapsto (i, \sigma(j)), \text{ für } \sigma \in S_N,\\
&\tau_N : [N]^2 \to [N]^2, (i,j) \mapsto (j,i),\\
&\tau'_N : [N]^2 \to [N]^2, (i,j) \mapsto (N+1-j, N+1-i),\\
&\mathrm{rot}_N : [N]^2 \to [N]^2, (i,j) \mapsto (j, N+1-i).
\end{aligned}$$

Lemma 4.1.2: *Sei $N \in \mathbb{N}^*, \sigma \in S_N$. Dann gilt:*

$$\mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_N, \tau'_N, \mathrm{rot}_N \in \mathrm{Sym}([N]^2).$$

Beweis: Man zeigt leicht, dass $\mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_N, \tau'_N, \mathrm{rot}_N$ wohldefinierte Abbildungen auf $[N]^2$ sind.

$$\mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_N, \tau'_N, \mathrm{rot}_N \in \mathrm{Sym}([N]^2)$$

sieht man nun leicht daran, dass $\mathrm{r}_{\sigma^{-1}}$ die Umkehrabbildung zu r_σ, $\mathrm{c}_{\sigma^{-1}}$ die Umkehrabbildung zu $\mathrm{c}_{\sigma^{-1}}$, τ_N selbstinvers, τ'_N selbstinvers und

$$\mathrm{rot}'_N : [N]^2 \to [N]^2, (i,j) \mapsto (N+1-j, i)$$

die Umkehrabbildung zu rot_N ist. ■

Bemerkung 4.1.3: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, \sigma \in S_N$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&r_\sigma^{-1} = r_{\sigma^{-1}},\\
&c_\sigma^{-1} = c_{\sigma^{-1}},\\
&\tau_N^{-1} = \tau_N,\\
&\tau_N'^{-1} = \tau'_N,\\
&\mathrm{rot}_N^{-1} = \mathrm{rot}_N^3 = ([N]^2 \to [N]^2, (i,j) \mapsto (N+1-j, i)).
\end{aligned}$$

Definition 4.1.4: Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Dann definieren wir die Gruppe

$$G_N := \langle \mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_N, \tau_N', \mathrm{rot}_N | \sigma \in S_N \rangle \subset \mathrm{Sym}([N]^2).$$

Bemerkung 4.1.5: Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Dann operiert $\mathrm{Sym}([N]^2)$ von links auf $[N]^2$ durch die kanonische Operationsvorschrift

$$\sigma \cdot (i,j) := \sigma((i,j)) \text{ für } (i,j) \in [N]^2.$$

Da G_N eine Untergruppe von $\mathrm{Sym}([N]^2)$ ist, wird durch

$$G_N \times [N]^2 \to [N]^2, g \cdot (i,j) = g((i,j))$$

eine Linksoperation von G_N auf $[N]^2$ definiert.

Notation 4.1.6: Für $N \in \mathbb{N}^*, g \in G_N, (i_0, j_0) \in [N]^2$ schreiben wir statt $g \cdot (i_0, j_0)$ auch einfach $g(i_0, j_0)$. Für eine nicht-leere Menge $\mathcal{M}$ und eine Matrix $M := (m_{ij}) \in \mathrm{Mat}(\mathcal{M}, N)$ bezeichne $m_{g(i_0,j_0)}$ den Eintrag $m_{i_0' j_0'}$, wobei $i_0', j_0 \in [N]$ und $g(i_0, j_0) = (i_0', j_0')$ gelte.

Wir definieren die natürliche Operationsweise von G_N auf allgemeinen Matrizen:

Lemma 4.1.7: *Sei $N \in \mathbb{N}^*$ und $\mathcal{M}$ eine nicht-leere Menge. Dann wird durch*

$$G_N \times \mathrm{Mat}(\mathcal{M}, N) \to \mathrm{Mat}(\mathcal{M}, N), (g, (a_{ij})) \mapsto g \cdot (a_{ij}) := (a_{g^{-1}(i,j)})$$

eine Linksoperation von G_N auf $\mathrm{Mat}(\mathcal{M}, N)$ *definiert.*

Beweis: Seien $g, f \in G_N, A \in \mathrm{Mat}(\mathcal{M}, N)$. Dann gilt:

1. $(\mathrm{id}_{G_N} \cdot A)_{ij} = A_{\mathrm{id}_{G_N}(i,j)} = A_{ij}$.
2. $((gf) \cdot A)_{ij} = A_{(gf)^{-1}(ij)} = A_{(f^{-1}g^{-1})(i,j)} \overset{(*)}{=} A_{f^{-1}(g^{-1}(i,j))} = (f \cdot A)_{g^{-1}(i,j)} = (g \cdot (f \cdot A))_{ij}$. Dabei gilt $(*)$ wegen Bemerkung 4.1.5. ∎

Bemerkung 4.1.8: Seien $N, \in \mathbb{N}^*, g \in G_N$ $\mathcal{M}$ eine nicht-leere Menge und $A := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(\mathcal{M}, N)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= A_{g^{-1}(g(i,j))} = (g \cdot A)_{g(i,j)}, \\ (g \cdot A)_{ij} &= a_{g^{-1}(i,j)}, \end{aligned}$$

für alle $i, j \in [N]$.

4.2 Isotopie von Hilbertsudokus

Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ unter der in 4.1.7 definierten Operation von G_N stabil ist. Anschließend definieren wir die Operation der unitären Gruppe $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$, um schließlich den Begriff der *Isotopie* zu definieren. Wir zeigen, dass ein Hilbertsudoku auf $\mathbb{C}^d$ immer isotop ist zu einem Hilbertsudoku, in dem die Einträge der ersten Zeile Diagonalmatrizen absteigenden Rangs sind, und die Einträge der ersten Spalte ebenfalls absteigenden Rang haben (s.4.2.9).

Proposition 4.2.1: *Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Dann operiert G_N von links auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ durch*

$$G_N \times \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N) \to \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N), g \cdot (p_{ij}) := (p_{g^{-1}(i,j)}).$$

Beweis: Es gilt $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N) \subset \mathrm{Mat}(\mathcal{L}(\mathscr{H}), N)$. Deswegen muss nach Lemma 4.1.7 nur bewiesen werden:

$$G_N \cdot \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N) \subset \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N).$$

Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N), \sigma \in \mathrm{Sym}([N]^2)$. Dann gilt nach Bemerkung 4.1.3:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^N p_{\mathrm{r}_\sigma^{-1}(i,j)} = \sum_{i=1}^N p_{\sigma^{-1}(i)j} = \sum_{i=1}^N p_{ij} = \mathbb{1}, && \text{für } j \in [N],\\
&\sum_{j=1}^N p_{\mathrm{r}_\sigma^{-1}(i,j)} = \sum_{j=1}^N p_{\sigma^{-1}(i)j} = \mathbb{1}, && \text{für } i \in [N],\\
&\sum_{i=1}^N p_{\mathrm{c}_\sigma^{-1}(i,j)} = \sum_{i=1}^N p_{i\sigma^{-1}(j)} = \mathbb{1}, && \text{für } j \in [N],\\
&\sum_{j=1}^N p_{\mathrm{c}_\sigma^{-1}(i,j)} = \sum_{j=1}^N p_{i\sigma^{-1}(j)} = \sum_{j=1}^N p_{ij} = \mathbb{1}, && \text{für } i \in [N],\\
&\sum_{i=1}^N p_{\tau_N^{-1}(i,j)} = \sum_{i=1}^N p_{ji} = \mathbb{1}, && \text{für } j \in [N],\\
&\sum_{j=1}^N p_{\tau_N^{-1}(i,j)} = \sum_{j=1}^N p_{ji} = \mathbb{1}, && \text{für } i \in [N],\\
&\sum_{i=1}^N p_{\tau_N'^{-1}(i,j)} = \sum_{i=1}^N p_{N+1-j,N+1-i} = \sum_{i=1}^N p_{N+1-j,i} = \mathbb{1}, && \text{für } j \in [N],\\
&\sum_{j=1}^N p'^{-1}_{\tau}{}_N(i,j) = \sum_{j=1}^N p_{N+1-j,N+1-i} = \sum_{j=1}^N p_{j,N+1-i} = \mathbb{1}, && \text{für } i \in [N],\\
&\sum_{i=1}^N p_{\mathrm{rot}_N^{-1}(i,j)} = \sum_{i=1}^N p_{N+1-j,i} = \mathbb{1}, && \text{für } j \in [N],\\
&\sum_{j=1}^N p_{\mathrm{rot}_N^{-1}(i,j)} = \sum_{j=1}^N p_{N+1-j,i} = \sum_{j=1}^N p_{j,i} = \mathbb{1}, && \text{für } i \in [N].
\end{aligned}$$

Also gilt

$$\mathrm{r}_\sigma \cdot H, \mathrm{c}_\sigma \cdot H, \tau_N \cdot H, \tau_N' \cdot H, \mathrm{rot}_N \cdot H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N).$$

Analog zeigt man

$$\mathrm{id} \cdot H, \mathrm{r}_\sigma^{-1} \cdot H, \mathrm{c}_\sigma^{-1} \cdot H, \tau_N^{-1} \cdot H, \tau_N'^{-1} \cdot H, \mathrm{rot}_N^{-1} \cdot H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N).$$

Da G_N nur aus Wörtern in $\{\mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_N, \tau_N', \mathrm{rot}_N\}$ besteht, folgt somit

$$G_N \cdot \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N) \subset \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N). \qquad \blacksquare$$

Definition 4.2.2: Seien $N \in \mathbb{N}^*, H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ und $T \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$ ein unitärer Operator. Dann definieren wir

$$THT^* := (Tp_{ij}T^*)$$

Lemma 4.2.3: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ und $T \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$ ein unitärer Operator. Dann gilt $THT^* \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$.*

Beweis: Nach Korollar 2.3.13 ist $Tp_{ij}T^*$ eine Projektion für alle $(i,j) \in [N]^2$. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} Tp_{ik}T^* = T(\sum_{k=1}^{N} p_{ik})T^* = T\mathbb{1}T = \mathbb{1},\\ \sum_{k=1}^{N} Tp_{ki}T^* = T(\sum_{k=1}^{N} p_{ki})T^* = T\mathbb{1}T = \mathbb{1},\end{aligned}$$

für alle $i \in [N]$. Also gilt $THT^* \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. ■

Proposition 4.2.4: *Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Dann operiert $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ von links auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ durch*

$$\mathcal{U}(\mathscr{H}) \times \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N) \to \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N), (T, H) \mapsto T * H = THT^{-1}.$$

Beweis: Sei $H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$.

1. Es gilt $\mathbb{1} * H = \mathbb{1}H\mathbb{1}^* = (\mathbb{1}p_{ij}\mathbb{1}^*) = (\mathbb{1}p_{ij}\mathbb{1}) = (p_{ij}) = H$.

2. Für $T_1, T_2 \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$ gilt

$$\begin{aligned}(T_1T_2) * H &= (T_1T_2)H(T_1T_2)^* \\ &= ((T_1T_2)p_{ij}(T_1T_2)^*) \\ &= ((T_1T_2)p_{ij}(T_2^*T_1*)) \\ &= ((T_1(T_2p_{ij}T_2^*)T_1^*) \\ &= T_1 * (T_2p_{ij}T_2^*) \\ &= T_1 * (T_2 * H)).\end{aligned}$$

■

Bemerkung 4.2.5: Seien $N \in \mathbb{N}^*, T \in \mathcal{U}(\mathscr{H}), g \in G_N, H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Dann gilt

$$g \cdot (T * H) = g \cdot (Tp_{ij}T^*) = (Tp_{g^{-1}(i,j)}T^*) = T * (p_{g^{-1}(i,j)}) = T * (g \cdot H).$$

Lemma 4.2.6: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$. Dann operiert $\mathcal{U}(\mathscr{H}) \times G_N$ auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ durch*

$$(\mathcal{U}(\mathscr{H}) \times G_N) \times \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N) \to \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N), ((T, g), H) \mapsto (T, g) * H := g \cdot (T * H).$$

Beweis: Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Dann gilt:

1. $(\mathbb{1}, \mathrm{id}) * H = \mathrm{id} \cdot (\mathbb{1}H\mathbb{1}^*) = \mathrm{id} \cdot H = H$.

2. Seien $T_1, T_2 \in \mathcal{U}(\mathscr{H}), g_1, g_2 \in G_N$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}((T_1, g_2) \cdot (T_2, g_2)) * H &= (T_1T_2, g_1g_2) * H \\ &= (g_1g_2) \cdot ((T_1T_2) * H) \\ &= g_1 \cdot (g_2 \cdot (T_1 * (T_2 * H))) \\ &= g_1 \cdot (T_1 * (g_2(T_2 * H))) \\ &= (g_1, T_1) * ((g_2, T_2) * H_2)).\end{aligned}$$

Dabei wurde angewandt, dass $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ und G_N auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ operieren. Die vorletzte Gleichung gilt wegen Bemerkung 4.2.5. ■

Definition 4.2.7 (Isotopie von Hilbertsudokus): Sei $N \in \mathbb{N}^*, H_1, H_2 \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Dann heißen H_1, H_2 *isotop*, falls sie unter der Operation von $\mathcal{U}(\mathscr{H}) \times G_N$ auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ in der selben Bahn liegen. Wir schreiben dann $H_1 \simeq H_2$. Für ein $g \in G_N, T \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$ bezeichnen wir die Abbildung $(T, g) : \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N) \to \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N), H \mapsto (T, g) * H$ auch als *Isotopietransformation*.

Isotopie definiert eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Somit ergibt schon für den Fall $\mathscr{H} = \mathbb{C}^d$ sich das folgende Problem:

Frage 4.2.8: Bestimmen Sie eine Klassifikation von $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ durch Repräsentanten der Isotopieklassen.

Proposition 4.2.9: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$. Dann existiert ein zu H isotopes $H' := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$, für das gilt:*

$$\begin{aligned}\operatorname{rang}(p_{1j}) &\geq \operatorname{rang}(p_{1,j+1}) \\ \operatorname{rang}(p_{i1}) &\geq \operatorname{rang}(p_{i+1,1})\end{aligned}$$

für $i, j \in [N-1]$, und $p_{1j}(\mathbb{C}^d)$ wird aufgespannt von

$$\begin{cases}\{e_{(\sum_{k=1}^{j-1} \operatorname{rang}(p_{1k}))+i} \mid 1 \leq i < \operatorname{rang}(p_{1j})\}, & \text{falls } \operatorname{rang}(p_{1j}) \neq 0, \\ \{0\} & \text{sonst,}\end{cases}$$

für alle $j \in [N]$. Dabei gelte $\sum_{k=1}^{0} \operatorname{rang}(p_{1k}) = 0$.

Beweis: Angenommen es gelte $N = 1$. Dann gilt $H = (\mathbb{1})$ und die Aussage folgt trivialerweise für $H' := H$. Angenommen also, es gelte $N > 1$. Sei für $(i, j) \in [N]^2$ $q_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$ mit $H = (q_{ij})$. Sei $(i_0, j_0) \in [N]^2$ mit $\operatorname{rang}(q_{i_0j_0}) = \max\{\operatorname{rang}(q_{ij}) \mid (i, j) \in [N]^2\}$. Dann existiert ein $\sigma \in S_N$ mit $\sigma(j_0) = 1$ und

$$\operatorname{rang}(q_{i_0\sigma^{-1}(j)}) \geq \operatorname{rang}(q_{i_0\sigma^{-1}(j+1)})$$

für $j \in [N-1]$. Wegen $\operatorname{rang}(q_{i_0\sigma^{-1}(1)}) = \max\{\operatorname{rang}(q_{i\sigma^{-1}(1)}) \mid i \in [N]\}$ existiert ein $\tilde{\sigma} \in S_N$ mit $\tilde{\sigma}(i_0) = 1$ und

$$\operatorname{rang}(q_{\tilde{\sigma}^{-1}(i)\sigma^{-1}(j_0)}) \geq \operatorname{rang}(q_{\tilde{\sigma}^{-1}(i+1)\sigma^{-1}(j_0)})$$

für alle $i \in [N-1]$. Für $\tilde{H} := (\tilde{p}_{ij}) := \mathrm{r}_{\tilde{\sigma}}\mathrm{c}_\sigma \cdot H$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(\tilde{p}_{1j}) &= \operatorname{rang}(q_{\tilde{\sigma}^{-1}(1)\sigma^{-1}(j)}) \\
&= \operatorname{rang}(q_{i_0\sigma^{-1}(j)}) \\
&\geq \operatorname{rang}(q_{i_0\sigma^{-1}(j+1)}) \\
&= \operatorname{rang}(q_{\tilde{\sigma}^{-1}(1)\sigma^{-1}(j+1)}) \\
&= \operatorname{rang}(\tilde{p}_{1,j+1})
\end{aligned}$$

für alle $j \in [N-1]$ und

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(\tilde{p}_{i1}) &= \operatorname{rang}(q_{\tilde{\sigma}^{-1}\sigma^{-1}(j_0)}) \\
&\geq \operatorname{rang}(q_{\tilde{\sigma}^{-1}(i+1)\sigma^{-1}(j_0)}) \\
&= \operatorname{rang}(\tilde{p}_{i+1,1})
\end{aligned}$$

für alle $i \in [N-1]$. Seien $n_j := \operatorname{rang}(\tilde{p}_{1j})$ für $j \in [N]$ und falls $n_j \neq 0$ gilt $\{v_1^j, \dots, v_{n_j}^j\}$ eine Orthonormalbasis von $p_{1j}(\mathbb{C}^d)$ für $j \in [N]$. Dann gilt nach Lemma 3.1.5

$$\sum_{j=1}^{N} n_j = d,$$

weswegen nach Bemerkung 3.1.3 $\cup_{j=1, n_j \neq 0}^{N} \{v_1^j, \dots, v_{n_j}^j\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{C}^d$ ist. Nach Lemma 2.2.13 wird also durch die lineare Fortsetzung von

$$v_i^j \mapsto e_{\left(\sum_{k=1}^{j-1} n_k\right)+i} \text{ für } j \in [N], i \in [n_j]$$

eine unitärer Operator $T \in \mathcal{U}_d$ definiert, wobei $\sum_{k=1}^{0} \operatorname{rang}(p_{1k}) = 0$ gelte und nach Notation 2.1.12 $[0] = \emptyset$ gilt. Für $H' := (p_{ij}) := T\tilde{H}T^*$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{rang}(p_{ij}) &= \operatorname{rang}(T\tilde{p}_{1j}T^*) \\
&= \operatorname{rang}(\tilde{p}_{1j}) \\
&\geq \operatorname{rang}(\tilde{p}_{1,j+1}) \\
&= \operatorname{rang}(T\tilde{p}_{1,j+1}T^*) \\
&= \operatorname{rang}(p_{1j+1})
\end{aligned}$$

für alle $j \in [N-1]$. Außerdem wird nach Lemma 5.5.5 $p_{1j}(\mathbb{C}^d)$ aufgespannt durch

$$\begin{cases} \{Tv_1^j, \dots, Tv_{n_j}^j\}, & \text{falls } n_j \neq 0, \\ \{0\}, & \text{sonst,} \end{cases}$$

also durch

$$\begin{cases} \{e_{\left(\sum_{k=1}^{j-1} \operatorname{rang}(p_{1k})\right)+i} \mid 1 \leq i < \operatorname{rang}(p_{1j})\}, & \text{falls } \operatorname{rang}(p_{1j}) \neq 0, \\ \{0\} & \text{sonst,} \end{cases}$$

für alle $j \in [N]$, da $n_j = \operatorname{rang}(p_{1j})$ gilt für alle $j \in [N]$. ■

Bemerkung 4.2.10: In Proposition 4.2.9 wurden die Zeilen und Spalten von H permutiert und H anschließend mit einem unitären Operator konjugiert. Ohne Zeilen und Spalten zu permutieren lässt sich H jedoch schon durch Konjugation mit einem unitären Operator auf eine Form bringen, in der die Einträge der ersten Zeile alle auf ein Erzeugnis einer Teilmenge der Standardbasis $\{e_1, \ldots, e_d\}$ projizieren. Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ und für $s \in [N]$ $n_s \in \{0, \ldots, d\}$ und $\mathcal{B}_s := \{v_k^s \mid k \in [s]\}$ eine Orthogonalbasis von $p_{1s}(\mathbb{C}^d)$. Dann ist nach Bemerkung 3.1.3 und Lemma 3.1.5 $\dot\bigcup_{s=1}^N \mathcal{B}_s$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^d$. Durch die lineare Fortsetzung von

$$f : \dot\bigcup_{s=1}^N \mathcal{B}_s \to \{e_1, \ldots, e_d\}, v_k^s \mapsto e_{\left(\sum_{j=1}^{s-1} n_j\right)+k}, \text{ für } s \in [N], k \in [n_s]$$

wird nach Lemma 2.2.13 ein unitärer Operator definiert, der nach Korollar 2.3.14 erfüllt, dass $(fHf^*)_{1s}$ aufgespannt wird von $\{e_{\left(\sum_{j=1}^{s-1} n_j\right)+k} \mid k \in [n_s]\}$.

Definition 4.2.11: Seien H und H' wie in Proposition 4.2.9. Dann heißt H' eine *Normalform* von H.

Bemerkung 4.2.12: Aus Proposition 4.2.9 folgt, dass für $N, d \in \mathbb{N}^*$ jedes $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ ein zu H isotopes $H' := (q_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ existiert, so dass q_{1j} für $j \in [N]$ als die Diagonalmatrix

$$\sum_{i \in [\mathrm{rang}(q_{1j})]} E_{\left(\sum_{k=1}^{j-1} \mathrm{rang}(p_{1k})\right)+i, \left(\sum_{k=1}^{j-1} \mathrm{rang}(p_{1k})\right)+i}$$

dargestellt werden kann, wobei für $(i, j) \in [d]^2$ E_{ij} die Elementarmatrix mit 1 im Eintrag (i, j) und sonst nur 0-Einträgen bezeichnet.

Frage 4.2.13: Sei $N, d \in \mathbb{N}^*$. Was muss für $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ gelten, damit die Normalform eindeutig ist?

4.3 Isotopie-Invarianten auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$

Im folgenden werden Isotopieinvarianten eingeführt, die auf der Invarianz von Winkeln zwischen Vektoren unter der Wirkung unitärer Operatoren beruhen. Außerdem zeigen wir, dass die (Nicht-)Kommutativität von Hilbertsudokus eine Isotopieinvariante ist.

Definition 4.3.1: Seien $p, q \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ Projektionen. Dann definieren wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{ang}(p, q) &:= \{\langle x, y\rangle \mid x \in p(\mathscr{H}), y \in q(\mathscr{H}), \|x\| = \|y\| = 1\},\\
|\mathrm{ang}|(p, q) &:= \{|\langle x, y\rangle| \mid x \in p(\mathscr{H}), y \in q(\mathscr{H}), \|x\| = \|y\| = 1\},\\
\max|\mathrm{ang}|(p, q) &:= \max\{|\langle x, y\rangle| \mid x \in p(\mathscr{H}), y \in q(\mathscr{H}), \|x\| = \|y\| = 1\}.
\end{aligned}$$

Bemerkung 4.3.2: Seien $p, q \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ Projektionen. Nach Satz 2.1.5 gilt

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \text{ für } x, y \in \mathscr{H},$$

daher ist $\max|\mathrm{ang}|(p, q)$ wohldefiniert.

Definition 4.3.3: Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Dann definieren wir

$$\mathcal{P}(\mathscr{H}) := \{p \in \mathcal{L}(\mathscr{H}) \mid \text{Es existiert } (i,j) \in [N]^2 \text{ mit } p = p_{ij}\}.$$

Proposition 4.3.4: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, H_1, H_2 \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ Hilbertsudokus. Sind H_1 und H_2 isotop, dann gilt*

$$\{\mathrm{ang}(p,q) |\, p,q \in \mathcal{P}(H_1)\} = \{\mathrm{ang}(p,q) |\, p,q \in \mathcal{P}(H_2)\}\,.$$

Existiert ein $d \in \mathbb{N}^*$ mit $\mathscr{H} = \mathbb{C}^d$, so gilt sogar:

$$\begin{aligned} &\{\mathrm{ang}(p,q) \times \{(\mathrm{rang}(p), \mathrm{rang}(q))\} \mid p,q \in \mathcal{P}(H_1)\} \\ =&\{\mathrm{ang}(p,q) \times \{(\mathrm{rang}(p), \mathrm{rang}(q))\} \mid p,q \in \mathcal{P}(H_2)\}\,. \end{aligned}$$

Beweis: Seien $H_1 := (p^1_{ij})$ und $H_2 := (p^2_{ij})$. Da H_1 und H_2 isotop sind, existiert ein $g \in G_N$ und ein $T \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$, sodass $H_1 = (T,g) * H_2$ gilt, also

$$p^1_{ij} = T p^2_{g^{-1}(i,j)} T^* \text{ für } (i,j) \in [N]^2.$$

Seien $(i,j),(k,l) \in [N]^2, x \in p^1_{ij}(\mathscr{H})$ mit $\|x\| = 1$ und $y \in p^1_{kl}(\mathscr{H})$ mit $\|y\| = 1$. Dann gilt nach Korollar 2.3.13 $x \in Tp_{g^{-1}(i,j)}(\mathscr{H})$ und $y \in Tp_{g^{-1}(k,l)}(\mathscr{H})$. Also existiert ein $x' \in p_{g^{-1}(i,j)}(\mathscr{H})$ mit $x = T(x')$ und ein $y' \in p_{g^{-1}(k,l)}(\mathscr{H})$ mit $y = T(y')$. Nach Satz 2.2.7 gilt $\|x\| = \|x'\|, \|y\| = \|y'\|, \langle x, y\rangle = \langle x', y'\rangle$. Also gilt

$$\{\mathrm{ang}(p,q) \mid p,q \in \mathcal{P}(H_1)\} \subset \{\mathrm{ang}(p,q) \mid p,q \in \mathcal{P}(H_2)\}\,.$$

Im Fall $\mathscr{H} = \mathbb{C}^d$ für ein $d \in \mathbb{N}^*$ gilt auch

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}(p^1_{ij}) &= \mathrm{rang}(Tp^2_{g^{-1}(i,j)}T^*) = \mathrm{rang}(p^2_{g^{-1}(i,j)}), \\ \mathrm{rang}(p^1_{kl}) &= \mathrm{rang}(Tp^2_{g^{-1}(k,l)}T^*) = \mathrm{rang}(p^2_{g^{-1}(k,l)}), \end{aligned}$$

da T und T dann als unitäre Vektorraumisomorphismen vollen Rang haben, und damit:

$$\begin{aligned} &\{\mathrm{ang}(p,q) \times \{(\mathrm{rang}(p), \mathrm{rang}(q))\} \mid p,q \in \mathcal{P}(H_1)\} \\ \subset&\{\mathrm{ang}(p,q) \times \{(\mathrm{rang}(p), \mathrm{rang}(q))\} \mid p,q \in \mathcal{P}(H_2)\}\,. \end{aligned}$$

Da $H_2 = (T^{-1}, g^{-1}) * H_1 = (T^*, g) * H_1$ gilt, folgen auf analoge Weise die beiden umgekehrten Inklusionen. ■

Definition 4.3.5: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$. Für $d_1, d_2 \in [d]$ definieren wir:

$$\begin{aligned} \mathrm{ang}_H(d_1,d_2) &:= \{\mathrm{ang}(p,q) \mid p,q \in \mathcal{P}(H), \mathrm{rang}(p) = d_1, \mathrm{rang}(q) = d_2\}\,, \\ |\mathrm{ang}|_H(d_1,d_2) &:= \{|\mathrm{ang}|(p,q) \mid p,q \in \mathcal{P}(H), \mathrm{rang}(p) = d_1, \mathrm{rang}(q) = d_2\}\,, \\ \max|ang|_H(d_1,d_2) &:= \{\max|\mathrm{ang}|(p,q) \mid p,q \in \mathcal{P}(H), \mathrm{rang}(p) = d_1, \mathrm{rang}(q) = d_2\}\,. \end{aligned}$$

Lemma 4.3.6: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $H_1, H_2 \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ isotope Hilbertsudokus. Für alle $d_1, d_2 \in [d]$ gilt dann:*

$$\begin{aligned} &\mathrm{ang}_{H_1}(d_1,d_2) = \mathrm{ang}_{H_2}(d_1,d_2), \\ &|\mathrm{ang}|_{H_1}(d_1,d_2) = |\mathrm{ang}_{H_2}|(d_1,d_2), \\ &\max|\mathrm{ang}|_{H_1}(d_1,d_2) = |\mathrm{ang}_{H_2}|(d_1,d_2). \end{aligned}$$

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus dem zweiten Teil von Proposition 4.3.4. ■

Lemma 4.3.7: *Seien* $p, q \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ *Projektionen mit* $\dim(q(\mathscr{H})) = 1$ *und* $w \in \mathscr{H}$ *mit* $q(\mathscr{H}) = \operatorname{Span}(w)$. *Dann gilt:*

$$|\text{ang}|(p,q) = \left\{ \frac{1}{\|w\|} \cdot |\langle x, w\rangle| \mid x \in p(\mathscr{H}) \text{ mit } |x| = 1 \right\}.$$

Gilt auch $\dim(p(\mathscr{H})) = 1$ *und ist* $v \in \mathscr{H}$ *mit* $p(\mathscr{H}) = \operatorname{Span}(v)$, *dann gilt:*

$$|\text{ang}|(p,q) = \left\{ \frac{|\langle v, w\rangle|}{\|v\| \cdot \|w\|} \right\}.$$

Beweis: Seien $x \in p(\mathscr{H})$ und $y \in q(\mathscr{H})$ mit $\|x\| = \|y\| = 1$. Dann existiert ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$ mit $|\alpha| = 1, y = \alpha \cdot \frac{w}{\|w\|}$ und es gilt

$$|\langle x, y\rangle| = \frac{|\alpha|}{\|w\|} \cdot |\langle x, w\rangle| = \frac{1}{\|w\|} \cdot |\langle x, w\rangle|.$$

Somit folgt die erste Aussage. Sei nun darüber hinaus auch $\dim(p(\mathscr{H})) = 1$ und $v \in \mathscr{H}$ mit $p(\mathscr{H}) = \operatorname{Span}(v)$. Dann existiert ein $\beta \in \mathbb{C}^*$ mit $|\beta| = 1, x = \beta \cdot \frac{v}{\|v\|}$ und es gilt:

$$|\langle x, y\rangle| = \frac{1}{\|w\|} \cdot |\langle x, w\rangle| = \frac{|\overline{\beta}|}{\|v\|\|w\|} |\langle v, w\rangle| = \frac{1}{\|v\|\|w\|} |\langle v, w\rangle|.$$

Somit folgt auch die zweite Aussage. ■

Lemma 4.3.8: *Seien* $N \in \mathbb{N}^*, H_1 := (p_{ij}), H_2 := (q_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. *Sind* H_1 *und* H_2 *isotop, dann ist* H_1 *kommutativ, genau dann wenn* H_2 *kommutativ ist.*

Beweis: Angenommen, H_1 und H_2 sind isotop und H_1 ist nicht-kommutativ. Dann existieren ein $g \in G_N$ und ein $T \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$ mit $p_{ij} = T q_{g^{-1}(i,j)} T^*$. Seien $(i_0, j_0), (k_0, l_0) \in [N]^2$ mit $p_{i_0 j_0} p_{k_0 l_0} \neq p_{k_0 l_0} p_{i_0 j_0}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} T q_{g^{-1}(i_0,j_0)} q_{g^{-1}(k_0,l_0} T^* &= (T q_{g^{-1}(i_0,j_0)} T^*)(T q_{g^{-1}(k_0,l_0)} T^*) \\ &= p_{i_0 j_0} p_{k_0 l_0} \\ &\neq p_{k_0 l_0} p_{i_0 j_0} \\ &= (T q_{g^{-1}(k_0,l_0)} T^*)(T q_{g^{-1}(i_0,j_0)} T^*) \\ &= T q_{g^{-1}(k_0,l_0)} q_{g^{-1}(i_0,j_0)} T^*. \end{aligned}$$

Da T unitär ist, folgt somit

$$q_{g^{-1}(i_0,j_0)} q_{g^{-1}(k_0,l_0)} \neq q_{g^{-1}(k_0,l_0)} q_{g^{-1}(i_0,j_0)}.$$

Also ist H_2 nicht-kommutativ. Analog folgt aus der Nicht-Kommutativität von H_2 die Nicht-Kommutativität von H_1. ■

4.4 Dimensionssudokus und Dimensionskonfigurationen

Im Folgenden werden Dimensionssudokus eingeführt. Ein (N, d)-Dimensionssudoku ist eine $N \times N$-Matrix mit Einträgen aus $\{0, \ldots, d\}$, in der sich die Einträge zeilen- und spaltenweise zu

d aufsummieren. Geht man bei einem Hilbertsudoku H auf $\mathbb{C}^d$ eintragsweise zum Rang des Eintrags über, so erhält man das *zu H gehörende* Dimensionssudoku. Die zentrale Bedeutung von Dimensionssudokus für Hilbertsudokus auf $\mathbb{C}^d$ besteht darin, dass die Gruppe G_N(s.4.1) auf der Menge der (N, d)-Dimensionssudokus operiert und diese in Äquivalenzklassen unterteilt (s.4.5), und dass isotope Hilbertsudokus auf $\mathbb{C}^d$ äquivalente zugehörige Dimensionssudokus besitzen (s.4.5.5). Die Äquivalenzklassen der (N, d)-Dimensionssudokus lassen sich verhältnismäßig einfach mit einem Computeralgebrasystem berechnen, in das zu einer gegebenen initialisierten Gruppenoperation auf einer Menge eine Funktion zur Berechnung der Bahnen implementiert ist. Dies wurde in 4.5.6 und 4.5.8 beispielhaft für die Fälle $(N, d) = (4, 3)$ und $(N, d) = (4, 4)$ mit Hilfe des Computeralgebrasystems GAP getan.

Definition 4.4.1 ((N, d)-Dimensionssudoku): Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$. Ein *N-d-Dimensionssudoku* ist eine Matrix $D = (d_{ij}) \in ([d] \cup \{0\})^{N \times N}$, so dass für alle $i \in [N]$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{N} d_{ik} = d,$$
$$\sum_{k=1}^{N} d_{ki} = d.$$

$\mathcal{D}(N, d)$ bezeichne die Menge aller N-d-Dimensionssudokus. Wir lassen oft die Indizes N und d weg, und sprechen nur von Dimensionssudokus.

Lemma 4.4.2: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ und $D := (\text{rang}(p_{ij})) \in \text{Mat}([d], N)$. Dann gilt $D \in \mathcal{D}(N, d)$.*

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus Lemma 3.1.5. ■

Definition 4.4.3: Seien H und D wie in Lemma 4.4.2. Dann heißt D das *zu H gehörende Dimensionssudoku* und wir schreiben $D := \text{Dim}(H)$, und sagen, dass D von H *gelöst wird*.

Bemerkung 4.4.4: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$. Nach Lemma 4.4.2 folgt also, dass zu jedem Hilbertsudoku $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ ein (eindeutiges) Dimensionssudoku $D \in \mathcal{D}(N, d)$ existiert mit $D = \text{Dim}(H)$. Andererseit kann man sich fragen, ob zu jedem Dimensionssudoku $D' := (d'_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$ ein Hilbertsudoku $H' \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ existiert, das D löst. Diese Frage ist nicht trivial, sie lässt sich jedenfalls nicht direkt durch eine einfache Induktion über die Einträge jeder Zeilen lösen. Angenommen nämlich beispielsweise, für ein $r \in [N-1]$ seien für $(i, j) \in [r] \times [N]$ bereits Projektionen p_{ij} gefunden, die $\text{rang}(p_{ij}) = d'_{ij}$ gelte. Für das kleinste $j_1 \in [N]$ mit $d_{r+1,j_1} \neq 0$, kann dann zwar einfach eine Projektion p_{r+1,j_1} gefunden werden mit $\text{rang}(p_{r+1,j_1}) = d'_{r+1,j_1}$. Für das kleinste $j_2 \in [N] \backslash \{j_1\}$ mit $d'_{r+1,j_2} \neq 0$ kann allerdings bereits gelten

$$d - \dim(\text{Span}(\cup_{i=1}^{r} p_{ij_1}(\mathbb{C}^d) \cup \text{Span}(p_{r+1,j_1}(\mathbb{C}^d))) < d'_{r+1,j_2},$$

weswegen nach Lemma 3.1.11 keine Projektion p_{r+1,j_2} auf $\mathbb{C}^d$ existieren kann mit:

$$\begin{aligned}
&p_{r+1,j_1} p_{r+1,j_2} = 0, \\
&p_{i,j_2} p_{r+1,j_2} = 0, \text{ für alle } i \in [r], \\
&\text{rang}(p_{r+1,j_2} = d'_{r+1,j_2}).
\end{aligned}$$

Beispielhaft sieht man dies für

$$D' := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(4,4).$$

Die ersten zwei Zeilen von D' könnten kanonisch aufgefüllt werden durch (zur Notation, s.2.3.16):

$$(q_{ij}) := \begin{pmatrix} p_{e_1,e_2} & p_3 & p_4 & 0 \\ p_3 & p_{e_1,e_2} & 0 & p_4 \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & 0 & q_{43} & q_{44}. \end{pmatrix}$$

Dann müsste gelten nach Gl. (5) gelten $q_{31} = p_4$, und somit nach Lemma 3.1.11 $q_{32} = 0$, was im Widerspruch zu $\operatorname{rang}(q_{32}) = D'_{32} = 1$ steht. In Section 6 wird allerdings bewiesen, dass unter Vorraussetzung der Gültigkeit von Vermutung 6.2.16 jedes Dimensionssudoku durch ein Hilbertsudoku gelöst wird.

Frage 4.4.5: Existiert zu jedem $D \in \mathcal{D}(N,d)$ ein Hilbertsudoku $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$, das D löst?

Eine Möglichkeit zur positiven Beantwortung von 4.4.5 besteht darin, zu zeigen, dass jedes Dimensionssudoku eine Summe von Permutationssmatrizen ist:

Definition 4.4.6: Eine N-Permutationsmatrix ist eine $N \times N$-Matrix $A_\sigma := (a_{ij})$, sodass gilt:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 1, \text{ falls } j = \sigma(i), \\ a_{ij} &= 0, \text{ sonst}, \end{aligned}$$

für ein $\sigma \in S_N$.

Lemma 4.4.7: *Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_d \in S_N$ und $A_{\sigma_1}, \dots, A_{\sigma_d}$ Permutationsmatrizen wie in 4.4.6. Für $D := (d_{ij}) := A_{\sigma_1} + \dots + A_{\sigma_d}$ gilt dann $D \in \mathcal{D}(N,d)$.*

Beweis: Für alle $i_0, j_0 \in [N]$ gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N} d_{i_0 j} &= \sum_{k=1}^{d} d_{i_0 \sigma_k(i_0)} = d, \\ \sum_{i=1}^{N} d_{i j_0} &= \sum_{k=1}^{N} d_{\sigma_k^{-1}(j_0) j_0} = d. \end{aligned} \qquad \blacksquare$$

Frage 4.4.8: Sei $D \in \mathcal{D}(N,d)$. Existieren dann $\sigma_1, \dots, \sigma_N \in S_N$ und N-Permutationsmatrizen $A_{\sigma_1}, \dots, A_{\sigma_d}$ mit $D = A_{\sigma_1} + \dots A_{\sigma_d}$?

Proposition 4.4.9: *Unter Annahme, dass sich Frage 4.4.8 positiv beantworten lässt, gilt: Zu jedem $D \in \mathcal{D}(N,d)$ existiert ein $H \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$, mit $\operatorname{Dim}(H) = D$, wobei $\mathcal{B}$ eine Orthogornalbasis von $\mathbb{C}^d$ ist.*

Beweis: Sei $D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N,d)$ und $\sigma_1, \dots, \sigma_d \in S_N$ mit $D = A_{\sigma_1} + \dots + A_{\sigma_d}$. Wähle $H := H^{\mathcal{B}}_{\sigma_1,\dots,\sigma_d}$ (s.3.2.7). Dann gilt für $\mathrm{Dim}(H) := (d'_{ij})$:

$$d'_{ij} = \sum_{k \in [d], \sigma_k(i) = j} 1 = d_{ij}. \qquad \blacksquare$$

In Analogie zu N-Konfigurationen im Fall von Hilbertsudokus, ist es naheliegend, folgende Definition zu machen:

Definition 4.4.10 ((N,d)-Dimensionskonfiguration): Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$. Eine (N,d)-*Dimensionssudokukonfiguration* ist ein Tupel $((d_{ij}), \mathcal{A})$, wobei $\mathcal{A} \subset [N]^2$ und $d_{ij} \in \{0, \dots, d\}$ für $(i,j) \in \mathcal{A}$ gilt, sodass

$$\begin{aligned} \sum_{k \in [N], (i,k) \in \mathcal{A}} d_{ik} \leq d \text{ und } \sum_{k=1}^{N} d_{ik} = d, \text{ falls } (i,k) \in \mathcal{A} \text{ für alle } k \in [N], \\ \sum_{k \in [N], (k,j) \in \mathcal{A}}^{N} d_{kj} \leq d \text{ und } \sum_{k=1}^{N} d_{kj} = d, \text{ falls } (k,j) \in \mathcal{A} \text{ für alle } k \in [N], \end{aligned}$$

für alle $i, j \in [N]$. Wir nennen eine (N,d)-Dimensionssudokukonfiguration auch (N,d)-*Dimensionskonfigura* Wir bezeichnen mit $\mathcal{DK}(N,d)$ die Menge aller (N,d)-Dimensionkonfigurationen. Eine (N,d)-Dimensionskonfiguration $(D' := (d'_{ij}), \mathcal{A})$ heißt *lösbar*, falls ein $D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N,d)$ existiert mit $d_{ij} = d'_{ij}$ für alle $(i,j) \in \mathcal{A}$.

Nicht jede Dimensionskonfiguration besitzt eine Lösung. Beispielsweise müsste eine Lösung $D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(4,6)$ von

$$D' := \begin{pmatrix} 3 & * & 1 & 0 \\ 3 & 1 & * & 2 \\ * & 2 & 2 & 1 \\ * & 1 & * & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{DK}(4,6)$$

erfüllen:

$$3 + 3 + d_{31} + d_{41} = d_{11} + d_{21} + d_{31} + d_{41} = 6,$$

also $d_{31} = d_{41} = 0$, und

$$d_{31} + 2 + 2 + 1 = d_{31} + d_{32} + d_{33} + d_{34} = 6,$$

also $d_{31} = 1$. Somit ergibt sich die Frage:

Frage 4.4.11: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$. Was sind Kriterien für die Lösbarkeit einer Dimensionskonfiguration $D \in \mathcal{DK}(N,d)$? Was sind Kriterien für die Eindeutigkeit einer Lösung?

Auch im Übergang jedes Eintrags einer N-Konfiguration auf $\mathbb{C}^d$ zum jeweiligen Rang des Eintrags erhält man eine Dimensionskonfiguration:

Lemma 4.4.12: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, K := ((p_{ij}), \mathcal{A}) \in \mathcal{HK}(\mathbb{C}^d, N)$ und $D := ((\mathrm{rang}(p_{ij})), \mathcal{A})$. Dann gilt $D \in \mathcal{DK}(N,d)$.*

Beweis: Sei $f ür (i, j) \in \mathcal{A}\ d_{ij} := \operatorname{rang}(p_{ij})$. Sei $i \in [N]$. Im Fall $(i, l) \in \mathcal{A}$ für alle $l \in [N]$ folgt

$$\sum_{l=1}^{N} d_{il} = d$$

genau wie im Beweis von Lemma 4.4.2. Analog folgt für $j \in [N]$ mit $(k, j) \in \mathcal{A}$ für alle $k \in [N]$:

$$\sum_{k=1}^{N} d_{ki} = d.$$

Außerdem gilt für $i \in [N]$ wegen Bemerkung 3.1.3

$$\bigoplus_{l \in [N], (i,l) \in \mathcal{A}} p_{il}(\mathscr{H}) = \sum_{l \in [N], (i,l) \in \mathcal{A}} p_{il}(\mathscr{H}) \subset \mathscr{H},$$

und damit

$$\sum_{l \in [N], (i,l) \in \mathcal{A}} d_{il} = \sum_{l \in [N], (i,l) \in \mathcal{A}} \operatorname{rang}(p_{il}) = \sum_{l \in [N], (i,l) \in \mathcal{A}} \dim(p_{il}(\mathscr{H}) \leq d.$$

Analog folgt für alle $j \in [N]$

$$\sum_{k \in [N], (i,k) \in \mathcal{A}} d_{kj} \leq d.$$

■

Dies gibt Anlass zu folgender Definition:

Definition 4.4.13: Seien K und D wie in Lemma 4.4.12. Dann nennen wir D die *zu K gehörende Dimensionskonfiguration* und schreiben $\operatorname{Dim}(K) := D$.

4.5 Die Operation von G_N auf $\mathcal{D}(N, d)$

In dieser Subsektion zeigen wir formal, dass $\mathcal{D}(N, d)$ abgeschlossen ist unter der Operation von G_N (s.4.1), das heißt anschaulich unter Zeilen- und Spaltenpermutationen, Spiegelung eines Dimensionssudokus an einer der Diagonalen und Rotationen um 90°. Daraus ergibt sich der Begriff der Äquivalenz von Dimensionssudokus (s.4.5.2). Wir zeigen anschließend, dass isotope Hilbertsudokus auf $\mathbb{C}^d$ äquivalente zugehörige Dimensionssudokus besitzen.

Lemma 4.5.1: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt:*

$$G_N \cdot \mathcal{D}(N, d) = \mathcal{D}(N, d).$$

Beweis: Es gilt $\mathcal{D}(N, d) \subset \operatorname{Mat}([d], N)$. Deswegen muss nach Lemma 4.1.7 nur bewiesen werden:

$$G_N \cdot \mathcal{D}(N, d) \subset \mathcal{D}(N, d).$$

Sei $D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N,d), \sigma \in \mathrm{Sym}([N]^2)$. Dann gilt nach Bemerkung 4.1.3:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{N} d_{\mathrm{r}_\sigma^{-1}(i,j)} = \sum_{i=1}^{N} d_{\sigma^{-1}(i)j} = \sum_{i=1}^{N} d_{ij} = d, && \text{für } j \in [N],\\
&\sum_{j=1}^{N} d_{\mathrm{r}_\sigma^{-1}(i,j)} = \sum_{j=1}^{N} d_{\sigma^{-1}(i)j} = d, && \text{für } i \in [N],\\
&\sum_{i=1}^{N} d_{\mathrm{c}_\sigma^{-1}(i,j)} = \sum_{i=1}^{N} d_{i\sigma^{-1}(j)} = d, && \text{für } j \in [N],\\
&\sum_{j=1}^{N} d_{\mathrm{c}_\sigma^{-1}(i,j)} = \sum_{j=1}^{N} d_{i\sigma^{-1}(j)} = \sum_{j=1}^{N} d_{ij} = d, && \text{für } i \in [N],\\
&\sum_{i=1}^{N} d_{\tau_N^{-1}(i,j)} = \sum_{i=1}^{N} d_{ji} = d, && \text{für } j \in [N],\\
&\sum_{j=1}^{N} d_{\tau_N^{-1}(i,j)} = \sum_{j=1}^{N} d_{ji} = d, && \text{für } i \in [N],\\
&\sum_{i=1}^{N} d_{\tau_N'^{-1}(i,j)} = \sum_{i=1}^{N} d_{N+1-j,N+1-i} = \sum_{i=1}^{N} d_{N+1-j,i} = d, && \text{für } j \in [N],\\
&\sum_{j=1}^{N} d'^{-1}_{\tau}{}^{N(i,j)} = \sum_{j=1}^{N} d_{N+1-j,N+1-i} = \sum_{j=1}^{N} d_{j,N+1-i} = d, && \text{für } i \in [N],\\
&\sum_{i=1}^{N} d_{\mathrm{rot}_N^{-1}(i,j)} = \sum_{i=1}^{N} d_{N+1-j,i} = d, && \text{für } j \in [N],\\
&\sum_{j=1}^{N} d_{\mathrm{rot}_N^{-1}(i,j)} = \sum_{j=1}^{N} d_{N+1-j,i} = \sum_{j=1}^{N} d_{j,i} = d, && \text{für } i \in [N].
\end{aligned}
$$

Also gilt

$$\mathrm{r}_\sigma \cdot D, \mathrm{c}_\sigma \cdot D, \tau_N \cdot D, \tau_N' \cdot D, \mathrm{rot}_N \cdot D \in \mathcal{D}(N,d).$$

Analog zeigt man

$$\mathrm{id} \cdot D, \mathrm{r}_\sigma^{-1} \cdot D, \mathrm{c}_\sigma^{-1} \cdot D, \tau_N^{-1} \cdot D, \tau_N'^{-1} \cdot D, \mathrm{rot}_N^{-1} \cdot D \in \mathcal{D}(N,d).$$

Da G_N nur aus Wörtern in $\{\mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_N, \tau_N', \mathrm{rot}_N\}$ besteht, folgt somit

$$G_N \cdot \mathcal{D}(N,d) \subset \mathcal{D}(N,d). \qquad \blacksquare$$

Definition 4.5.2: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $A, B \in \mathcal{D}(N,d)$. A, B heißen *äquivalent*, wenn sie unter der Operation von G_N auf $\mathcal{D}(N,d)$ in der selben Bahn liegen.

Bemerkung 4.5.3: Analog zum Fall von Hilbertsudokus auf $\mathbb{C}^d$ (4.2.11) lässt sich zeigen, lässt sich wie im ersten Teil des Beweis von Proposition 4.2.9 zeigen, dass zu einem Dimensionssudoku $D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N,d)$ immer ein äquivalentes $D' := (d'_{ij})$ existiert, das erfüllt:

$$d'_{1j} \geq d'_{1,j+1}, d'_{i1} \geq d'_{i+1,1},$$

für alle $i, j \in [N-1]$. So ein D' nennen wir dann analog *Normalform* von D.

Somit ergibt sich die Frage:

Frage 4.5.4: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $D \in \mathcal{D}(N, d)$. Was muss für D gelten, damit D eine eindeutige Normalform besitzt?

Satz 4.5.5: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $H_1 := (p_{ij}), H_2 := (q_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ isotop, dann sind $\mathrm{Dim}(H_1), \mathrm{Dim}(H_2)$ äquivalent.*

Beweis: Sind H_1 und H_2 isotop, dann existiert ein $g \in G_N$ und ein $T \in \mathcal{U}(\mathbb{C}^d)$ mit $q_{ij} = T p_{g^{-1}(i,j)} T^*$ für alle $(i, j) \in [N]^2$. Also gilt

$$\mathrm{rang}(q_{ij}) = \mathrm{rang}(T p_{g^{-1}(i,j)} T^*) = \mathrm{rang}(p_{g^{-1}(i,j)}).$$

Damit folgt

$$\mathrm{Dim}(H_2) = \mathrm{Dim}(gH_1) = g \cdot \mathrm{Dim}(H_1).$$

Also sind $\mathrm{Dim}(H_1)$ und $\mathrm{Dim}(H_2)$ äquivalent. ■

Im Folgenden sind die Repräsentanten der Äquivalenzklassen von $\mathcal{D}(4, 3)$ und $\mathcal{D}(4, 4)$ aufgeführt. Diese wurden mit dem Computeralgebrasystem GAP ausgerechnet. Der Quellcode dazu, zusammen mit einer Erläuterung, befindet sich im Appendix (8).

Beispiel 4.5.6: $\mathcal{D}(4, 3)$ zerfällt in 12 Äquivalenzklassen $A_i, i \in [12]$. Für $i \in [12]$ besitzt A_i den Repräsentanten D_i, wobei gilt:

$D_1 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \lvert\mathcal{A}_1\rvert = 24$	$D_2 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \lvert\mathcal{A}_2\rvert = 144$
$D_3 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \lvert\mathcal{A}_3\rvert = 288$	$D_4 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \lvert\mathcal{A}_4\rvert = 192$
$D_5 := \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \lvert\mathcal{A}_5\rvert = 16$	$D_6 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \lvert\mathcal{A}_6\rvert = 72$
$D_7 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \lvert\mathcal{A}_7\rvert = 288$	$D_8 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \lvert\mathcal{A}_8\rvert = 576$
$D_9 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lvert\mathcal{A}_9\rvert = 144$	$D_{10} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \lvert\mathcal{A}_{10}\rvert = 96$
$D_{11} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \lvert\mathcal{A}_{11}\rvert = 144$	$D_{12} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \lvert\mathcal{A}_{12}\rvert = 24$

Bemerkung 4.5.7: Die Repräsentanten in Beispiel 4.5.6, die durch GAP berechnet wurden, wurden durch Zeilen- und Spaltenpermutationen noch in Normalform gebracht.

Beispiel 4.5.8: $\mathcal{D}(4,4)$ zerfällt in 38 Äquivalenzklassen $A_i, i \in [38]$. Für $i \in [38]$ besitzt A_i den Repräsentanten D_i, wobei gilt:

$D_1 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_1 \rvert = 576$	$D_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_2 \rvert = 96$
$D_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_3 \rvert = 576$	$D_4 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_4 \rvert = 288$
$D_5 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_5 \rvert = 72$	$D_6 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_6 \rvert = 576$
$D_7 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_7 \rvert = 72$	$D_8 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lvert A_8 \rvert = 192$
$D_9 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \lvert A_9 \rvert = 1$	$D_{10} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{10} \rvert = 576$
$D_{11} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{11} \rvert = 144$	$D_{12} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{12} \rvert = 288$
$D_{13} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{13} \rvert = 96$	$D_{14} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{14} \rvert = 576$
$D_{15} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lvert A_{15} \rvert = 576$	$D_{16} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{16} \rvert = 576$
$D_{17} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{17} \rvert = 288$	$D_{18} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lvert A_{18} \rvert = 576$
$D_{19} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{19} \rvert = 288$	$D_{20} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{20} \rvert = 288$
$D_{21} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lvert A_{21} \rvert = 288$	$D_{22} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \lvert A_{22} \rvert = 576$

$D_{23} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{23} \rvert = 288$	$D_{24} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \lvert A_{24} \rvert = 288$
$D_{25} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{25} \rvert = 576$	$D_{26} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lvert A_{26} \rvert = 72$
$D_{27} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lvert A_{27} \rvert = 144$	$D_{28} := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \lvert A_{28} \rvert = 288$
$D_{29} := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{29} \rvert = 72$	$D_{30} := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{30} \rvert = 96$
$D_{31} := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{31} \rvert = 72$	$D_{32} := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{32} \rvert = 18$
$D_{33} := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{33} \rvert = 72$	$D_{34} := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{34} \rvert = 144$
$D_{35} := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{35} \rvert = 192$	$D_{36} := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{36} \rvert = 72$
$D_{37} := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{37} \rvert = 144$	$D_{38} := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lvert A_{38} \rvert = 24$

5 NK-Wurzeln

In dieser Sektion werden *NK-Wurzeln* auf Hilbertsudokus und auf Dimensionssudokus eingeführt. Eine NK-Wurzel W auf einem Hilbertsudoku H ist ist eine maximale Menge von Paaren ungleicher Elemente aus $[N]^2$, sodass die Nicht-Kommutativität von jeweils zwei Paaren von Einträgen aus H mit Indizes aus W unter den Summengleichungen (1) äquivalent ist. <Unter einem abgeleiteten Konzept der Nicht-Kommutativität für Einträge eines Dimensionsionssudokus werden dann auch für Dimensionssudokus eingeführt (5.5.8). NK-Wurzeln auf Hilbertsudokus liefern Isotopieinvarianten für nicht-kommutative Hilbertsudokus. Zentrales Ergebnis der Sektion ist, dass NK-Wurzeln auf einem Hilbertsudoku auf $\mathbb{C}^d$ auch NK-Wurzeln auf dem zugehörigen Dimensionssudoku sind. Somit wird eine Möglichkeit gegeben, die Isotopieklassen von nicht-kommutativen Hilbertsudokus, die das gleiche Dimensionssudoku lösen, zu berechnen (beispielhaft in 5.8.12). Im Folgenden seien immer $N, d \in \mathbb{N}^*$.

5.1 Vorbereitung

Diese Subsektion führt zunächst einige technische Hilfsaussagen für die folgenden Aussagen zu NK-Wurzeln auf.

Definition 5.1.1: Sei $N \in \mathbb{N}^*$. Dann definieren wir:

$$[N]^2_\times := \left\{ \{(i,j),(k,l)\} \mid (i,j),(k,l) \in [N]^2, i \neq k, j \neq l \right\}. \tag{17}$$

Lemma 5.1.2: *Sei X eine nicht-leere Menge und $R \subset X^2$ eine symmetrische Relation auf X, die notiert wird durch :*

$$x \overset{R}{\sim} y :\Leftrightarrow (x,y) \in R.$$

Dann wird durch $\tilde{R} \subset X^2$, mit

$$\begin{aligned} x \overset{\tilde{R}}{\sim} y :\Leftrightarrow& (x,y) \in \tilde{R} \\ :\Leftrightarrow& \textit{Es existiert ein } n \in \mathbb{N}, x_0, \ldots, x_n \in X \textit{ mit } x_i \overset{R}{\sim} x_{i-1}, \\ & \textit{für } 1 \leq i \leq n \textit{ und } x_0 = x, x_n = y \textit{ oder } x = y, \end{aligned}$$

eine Äquivalenzrelation auf X definiert.

Beweis: Seien $x, y, z \in X$. Dann gilt:

1. $x \overset{\tilde{R}}{\sim} x$ per Definition.

2. Angenommen es gelte $x \overset{\tilde{R}}{\sim} y$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}, x_0, \ldots, x_n \in X$ mit $x_i \overset{R}{\sim} x_{i-1}$ für $1 \leq i \leq n$ und $x_0 = x, x_n = y$. Für $x_i' := x_{n-i}$ für $0 \leq i \leq n$ gilt wegen der Symmetrie von R: $x_i' \overset{R}{\sim} x_{i-1}'$ für $1 \leq i \leq n$, $x_0' = y$ und $x_n' = x$. Also gilt $y \overset{\tilde{R}}{\sim} x$.

3. Angenommen es gelte $x \overset{\tilde{R}}{\sim} y$ und $y \overset{\tilde{R}}{\sim} z$. Dann existieren $n, n' \in \mathbb{N}$ und $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_{n'} \in X$ mit $x_0 = x, x_n = y, x_i \overset{R}{\sim} x_{i-1}$ für $0 \leq i \leq n$, sowie $y_0 = y, y_n = z, y_j \overset{R}{\sim} y_{j-1}$ für $1 \leq j \leq n'$. Für

die Wahl

$$x'_i := \begin{cases} x_i, & \text{für } 0 \leq i \leq n, \\ y_{i-n-1}, & \text{für } n+1 \leq i \leq n+n'+1, \end{cases}$$

gilt dann $x'_0 = x, x'_{n+n'+1} = z$ und $x'_i \overset{R}{\sim} x_{i-1}$ für $1 \leq i \leq n+n'+1$. Also gilt $x \overset{\tilde{R}}{\sim} z$. ■

Bemerkung 5.1.3: Seien $\mathcal{M}$ eine nicht-leere Menge und $g \in \mathrm{Sym}(\mathcal{M})$. Dann wird durch

$$g \times g : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M} \times \mathcal{M}, (x, y) \mapsto (g \cdot x, g \cdot y)$$

eine Bijektion definiert, da die Abbildung

$$g^{-1} \times g^{-1} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M} \times \mathcal{M}, (x, y) \mapsto (g^{-1} \times x, g^{-1} \times y)$$

eine Umkehrabbildung zu $g \times g$ bildet.

Lemma 5.1.4: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, (i_0, j_0), (k_0, l_0) \in [N]^2, g \in G_N$ und $(i_1, j_1), (k_1, l_1) \in [N]^2$ mit*

$$\begin{aligned} g(i_0, j_0) &= (i_1, j_1), \\ g(k_0, l_0) &= (k_1, l_1). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$i_0 \neq k_0, j_0 \neq l_0 \Leftrightarrow i_1 \neq k_1, k_1 \neq l_1.$$

Beweis: Sei $\sigma \in S_N$. Dann sieht man leicht mit Bemerkung 4.1.3, dass die Aussage für

$$g \in \{\mathrm{id}, \mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_N, \tau'_N, \mathrm{rot}_N, \mathrm{r}_\sigma^{-1}, \mathrm{c}_\sigma^{-1}, \tau_N^{-1}, \tau_N'^{-1}, \mathrm{rot}_N^{-1}\}$$

erfüllt ist. da G_N nur aus Wörtern in $\{\mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_N, \tau'_N, \mathrm{rot}_N\}$ besteht, folgt die Aussage induktiv für jedes $g \in G_N$. ■

Konvention 5.1.5: Sei $N \in \mathbb{N}^*, g \in G_N$ und $(i_0, j_0), (k_0, l_0) \in [N]^2$ mit $(i_0, j_0) \neq (k_0, l_0)$. Dann definieren wir

$$g \times g(\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\}) := \{g(i_0, j_0), g(k_0, l_0)\}.$$

Man vergewissert sich leicht, dass die Zuordnung Unabhängig von der Darstellung von $(\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\})$ ist, und somit eine wohldefinierte Selbstabbildung Abbildung auf

$$\left\{ \{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \mid (i_0, j_0), (k_0, l_0) \in [N]^2 \text{ mit } (i_0, j_0) \neq (k_0, l_0) \right\}$$

definiert.

Proposition 5.1.6: *Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $g \in G_N$. Dann wird durch*

$$g \times g : [N]^2_\times \to [N]^2_\times, a \mapsto g \times g(a)$$

eine bijektive Selbstabbildung definiert.

Beweis: Nach Lemma 5.1.4 gilt für alle $a \in [N]^2_\times$ $g \times g(a) \in [N]^2_\times$. Nach Bemerkung 5.1.3 ist die Abbildung bijektiv. ■

Bemerkung 5.1.7: Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $g, g' \in G_N$. Dann gilt auf $[N]^2_\times$:

$$(g' \times g') \circ (g \times g) = g'g \times g'g.$$

5.2 NK-Wurzeln auf Hilbertsudokus

In dieser Subsektion werden *NK-Wurzeln* auf Hilbertsudokus eingeführt. Dazu definieren wir zunächst die Indexmenge von ungeordneten Paaren von Projektionen eines Hilbertsudokus H, die nicht miteinander kommutieren, als die Menge der *NK-Paare* auf H, $\mathcal{NK}(H)$. NK-Wurzeln werden dann als maximale Teilmengen von $\mathcal{NK}(H)$ eingeführt, deren Elemente unter den Summengleichungen (4) und (5) äquivalent sind.

Definition 5.2.1 (NK-Paar auf Hilbertsudoku): Sei $N \in \mathbb{N}^*, H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ ein nicht-kommutatives Hilbertsudoku und seien $(i_0, j_0), (k_0, l_0) \in [N]^2$, so dass $p_{i_0j_0}p_{k_0l_0} \neq p_{k_0l_0}p_{i_0j_0}$ gilt. Dann heißt $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\}$ *NK-Paar* auf H. $\mathcal{NK}(H)$ bezeichne die Menge der NK-Paare auf H und wird *NK-Struktur* von H genannt.

Bemerkung 5.2.2: Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Wegen Bemerkung 3.1.2 gilt:

$$NK(H) \subset [N]^2_\times.$$

Bemerkung 5.2.3: Seien $N \in \mathbb{N}^*, H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ ein nicht-kommutatives Hilbertsudoku und sei $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in \mathcal{NK}(H)$, dann gilt $p_{i_0j_0}, p_{k_0l_0} \notin \{\mathbb{1}, 0\}$.

Für manche Hilbertsudokus folgt die Nicht-Kommutativität eines Paares von enthaltenen Projektion durch die Summenrelationen Gl. (4) und Gl. (5) zwingend aus der Nicht-Kommutativität eines anderen Paares von enthaltenen Projektionen. Diese wird hier formal durch die beiden folgenden Defintionen und das folgende Lemma 5.2.6 gegeben:

Definition 5.2.4 (Zeilenabhängigkeit auf Hilbertsudokus): Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Existieren $i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N]$, sodass gilt $l_1 \neq l_2, a := \{(i_0, j_0), (k_0, l_1\} \in \mathcal{NK}(H), b := \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\} \in [N]^2_\times, p_{k_0,l_2} \neq 0$ und $p_{k_0n} = 0$ für alle $n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\}$, dann nennen wir b *zeilenabhängig von* a.

Definition 5.2.5 (Spaltenabhängigkeit auf Hilbertsudokus): Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Existieren $i_0, j_0, k_1, k_2, l_0 \in [N]$, sodass gilt $l_1 \neq l_2, a := \{(i_0, j_0), (k_1, l_1\} \in \mathcal{NK}(H), b := \{(i_0, j_0), (k_2, l_0)\} \in [N]^2_\times, p_{k_2l_0} \neq 0$ und $p_{ml_0} = 0$ für alle $n \in [N] \backslash \{i_0, k_1, k_2\}$, dann nennen wir b *spaltenabhängig von* a.

Lemma 5.2.6: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N), a \in \mathcal{NK}(H)$ und $b \in [N]^2_\times$, sodass b zeilen- oder spaltenabhängig von a ist. Dann gilt $b \in \mathcal{NK}(H)$.*

Beweis: Wir zeigen die Aussage nur für die Zeilenabhängigkeit von b von a, da sie für die Spaltenabhängigkeit völlig analog folgt. Sei also b zeilenabhängig von a. Dann existieren $i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N]$

mit $a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, b = \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\}, p_{k_0 l_2} \neq 0$ und $p_{k_0 n} = 0$ für alle $n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\}$. Also folgt:

$$\mathbb{1} = \sum_{s=1}^{N} p_{k_0 s} = p_{k_0 j_0} + p_{k_0 l_1} + p_{k_0 l_2},$$

und somit

$$p_{k_0 l_2} = \mathbb{1} - p_{k_0 j_0} - p_{k_0 l_1}.$$

Es folgt :

$$\begin{aligned} p_{i_0 j_0} p_{k_0 l_2} &= p_{i_0 j_0} - p_{i_0 j_0} p_{k_0 j_0} - p_{i_0 j_0} p_{k_0 l_1} \\ &= p_{i_0 j_0} - p_{i_0 j_0} p_{k_0 l_1} \\ &\neq p_{i_0 j_0} - p_{k_0 l_1} p_{i_0 j_0} \\ &= p_{i_0 j_0} - p_{k_0 j_0} p_{i_0 j_0} - p_{k_0 l_1} p_{i_0 j_0} \\ &= p_{k_0 l_1} p_{i_0 j_0}. \end{aligned}$$

Hierbei wurde Bemerkung 3.1.2 und $a \in \mathcal{NK}(H)$ angewandt. Also gilt $b \in \mathcal{NK}(H)$. ■

Beispiel 5.2.7: Seien $H \in \mathcal{NK}(\mathscr{H})$ ein Hilbertsudoku der Form:

$$H := \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, 4).$$

Für $a := \{(1,1),(3,3)\}, b := \{(1,1),(4,3)\}, c := \{(1,1),(4,4)\}$ nach Lemma 5.2.6:

$$a \in \mathcal{NK}(H) \Leftrightarrow b \in \mathcal{NK}(H) \Leftrightarrow c \in \mathcal{NK}(H),$$

da a und b spaltenabhängig sind (angenommen, eines von beiden ist NK-Paar), und b und c zeilenabhängig sind. Der Name *Spaltennabhängigkeit* kommt daher, dass $a \in \mathcal{NK}(H) \Leftrightarrow b \in \mathcal{NK}(H)$ wegen der Spaltensummenbedingung (5) gilt. Der Name *Zeilennabhängigkeit* kommt daher, dass $b \in \mathcal{NK}(H) \Leftrightarrow c \in \mathcal{NK}(H)$ wegen der Zeilensummenbedingung (4) gilt.

Definition 5.2.8 (Die Relation cr^H auf Hilbertsudokus): Seien $N \in \mathbb{N}^*, H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ und $a, b \in \mathcal{NK}(H)$. Ist b zeilenabhängig von a, dann ist auch a zeilenabhängig von b. Ist b spaltenabhängig von a, dann ist auch a spaltenabhängig von b. Also wird durch

$$\mathrm{cr}^H(a, b) :\Leftrightarrow a \text{ und } b \text{ sind zeilen- oder spaltenabhängig auf } H$$

eine symmetrische Relation auf $\mathcal{NK}(H)$ definiert.

Bemerkung 5.2.9: Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Da für $a, b \in \mathcal{NK}(H)$ äquivalent sind, dass a zeilenabhängig von b ist, und dass b zeilenabhängig von a ist, sagen wir in diesem Fall einfach, dass a und b zeilenabhängig sind. Analoges gilt für Spaltenabhängigkeit.

Es folgt eine zentrale Definition der Sektion:

Definition 5.2.10 (NK-Wurzeln auf Hilbertsudokus): Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$. Dann wird nach Definition 5.2.8 durch cr^H eine symmetrische Relation auf $\mathcal{NK}(H)$ definiert. Nach Lemma 5.1.2 wird also durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{cr}}^H(a,b) :\Leftrightarrow\ & \text{Es existieren ein } n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathcal{NK}(H) \text{ mit} \\ & a_0 = a, a_n = b \text{ und } \mathrm{cr}^H(a_i, a_{i-1}) \text{ für } 1 \le i \le n \\ & \text{oder } a = b, \end{aligned}$$

wobei $a, b \in \mathcal{NK}(H)$ gilt, eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{NK}(H)$ definiert. Die Äquivalenzklassen von $\tilde{\mathrm{cr}}^H$ nennen wir *NK-Wurzeln* auf H. Für ein $a \in \mathcal{NK}(H)$ nennen wir die NK-Wurzel W mit $a \in W$ die *NK-Wurzel von* a auf H.

Notation 5.2.11: Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ nicht-kommutativ. Wir notieren $\mathcal{NK}(H)$ durch die Matrix H, in der die Einträge p_{ij} und p_{kl} durch eine Linie verbunden sind, falls $\{(i,j),(k,l)\} \in \mathcal{NK}(D)$ gilt. Ist $W \subset \mathcal{NK}(H)$ eine NK-Wurzel, dann notieren wir W durch die Matrix H, in der die Einträge p_{ij} und p_{kl} durch eine Linie verbunden sind, falls $\{(i,j),(k,l)\} \in W$ gilt.

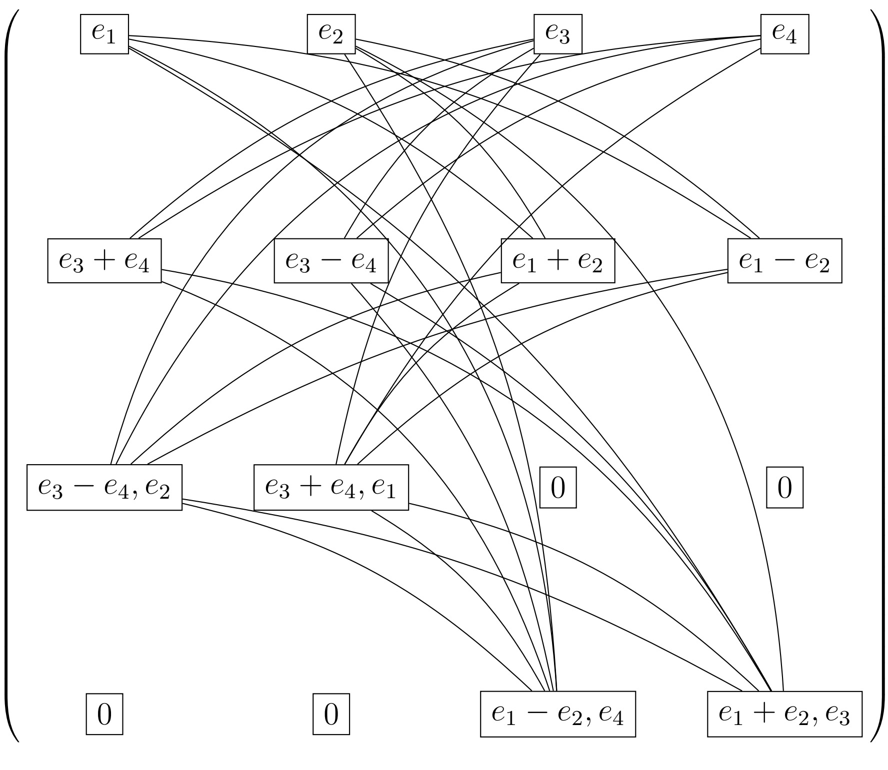
Bemerkung 5.2.12: Sei $H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ nicht-kommutativ und $W \subset \mathcal{NK}(H)$ eine NK-Wurzel. Dann bilden $([N]^2, \mathcal{NK}(H))$ und $([N]^2, W)$ endliche, einfache, ungerichtete Graphen.

Beispiel 5.2.13: Sei

$$H := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_3 + e_4 & e_3 - e_4 & e_1 + e_2 & e_1 - e_2 \\ e_3 - e_4, e_2 & e_3 + e_4, e_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 - e_2, e_4 & e_1 + e_2, e_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^4, 4).$$

Dann gilt:

$\mathcal{NK}(H) =$



$\mathcal{NK}(H)$ zerfällt in drei NK-Wurzeln W_1, W_2 und W_3 mit:

$$W_1 := \begin{pmatrix} \boxed{e_1} & \boxed{e_2} & \boxed{e_3} & \boxed{e_4} \\ \boxed{e_3+e_4} & \boxed{e_3-e_4} & \boxed{e_1+e_2} & \boxed{e_1-e_2} \\ \boxed{e_3-e_4, e_2} & \boxed{e_3+e_4, e_1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{e_1-e_2, e_4} & \boxed{e_1+e_2, e_3} \end{pmatrix}$$

$$W_2 := \begin{pmatrix} \boxed{e_1} & \boxed{e_2} & \boxed{e_3} & \boxed{e_4} \\ \boxed{e_3+e_4} & \boxed{e_3-e_4} & \boxed{e_1+e_2} & \boxed{e_1-e_2} \\ \boxed{e_3-e_4, e_2} & \boxed{e_3+e_4, e_1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{e_1-e_2, e_4} & \boxed{e_1+e_2, e_3} \end{pmatrix}$$

$$W_3 := \begin{pmatrix} \boxed{e_1} & \boxed{e_2} & \boxed{e_3} & \boxed{e_4} \\ \boxed{e_3 + e_4} & \boxed{e_3 - e_4} & \boxed{e_1 + e_2} & \boxed{e_1 - e_2} \\ \boxed{e_3 - e_4, e_2} & \boxed{e_3 + e_4, e_1} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{e_1 - e_2, e_4} & \boxed{e_1 + e_2, e_3} \end{pmatrix}$$

In Beispiel 5.2.13 kann man sehen, wie sich NK-Wurzeln graphisch bestimmen lassen: Man trägt in die Matrix H zunächst ein erstes NK-Paar durch eine Linie ein, die die zwei entsprechenden Einträge verbindet, im Fall von W_1 beispielsweise $\{(1,1),(2,3)\}$, und trägt dann sukzessive die NK-Paare ein, die zeilen- oder spaltenabhängig von den bereits eingetragenen sind, bis der Prozess terminiert. NK-Wurzeln können helfen zu zeigen, dass Hilbertsudokus von einer bestimmten Form immer kommutativ sein müssen:

Beispiel 5.2.14: Ein Hilbertsudoku der Form

$$H = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & 0 & p_{34} \\ p_{41} & 0 & p_{43} & 0 \end{pmatrix}$$

ist immer kommutativ. Denn angenommen, es würde gelten $p_{11}p_{23} \neq p_{23}p_{11}$, also $a := \{(1,1),(2,3)\} \in \mathcal{NK}(H)$ und W wäre die NK-Wurzel von a auf H. Dann würde gelten:

$$W = \begin{pmatrix} \boxed{p_{11}} & \boxed{p_{12}} & \boxed{0} & \boxed{0} \\ \boxed{0} & \boxed{p_{22}} & \boxed{p_{23}} & \boxed{p_{24}} \\ \boxed{p_{31}} & \boxed{p_{32}} & \boxed{0} & \boxed{p_{34}} \\ \boxed{p_{41}} & \boxed{0} & \boxed{p_{42}} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

Da a und $\{(1,2),(4,1)\}$ die selbe NK-Wurzel haben würden, wäre $p_{11}p_{23} \neq p_{23}p_{11}$ also äquivalent zu $p_{12}p_{41} \neq p_{41}p_{12}$, was nicht möglich ist, da dann gelten würde:

$$p_{11}p_{41} = (\mathbb{1} - p_{12})p_{41} \neq (\mathbb{1} - p_{12})p_{41} = p_{41}p_{11},$$

im Widerspruch zu Bemerkung 3.1.2. Für alle $i,j,k,l \in [N]$ mit $b := \{(i,j),(k,l)\} \in [N]^2_\times$, $p_{ij} \neq 0, p_{kl} \neq 0$, außer $\{(i,j),(k,l)\} = \{(2,3),(4,1)\}$, wäre im Fall $b \in \mathcal{NK}(H)$ W die NK-Wurzel von b, und es folgt analog, ein Widerspruch. $\{(2,3),(4,1)\} \in \mathcal{NK}(H)$ führt ebenfalls zu einem Widerspruch , da dann wegen

$$p_{23}(p_{11} + p_{31}) = p_{23}(\mathbb{1} - p_{41}) \neq (\mathbb{1} - p_{41})p_{23} = p_{23}(p_{11} + p_{31})$$

gelten müsste $\{(1,1),(2,3)\} \in \mathcal{NK}(H)$ oder $\{(3,1),(2,3)\} \in \mathcal{NK}(H)$, im Widerspruch zu zuvor gezeigtem. Also ist H kommutativ.

5.3 Die Wirkung von G_N auf nicht-kommutativen Hilbertsudokus

In der folgenden Subsektion zeigen wir, dass die Operation eines Elements g aus G_N auf einem nicht-kommutativen Hilbertsudoku H die NK-Paare und NK-Wurzeln von H in die NK-Paare und NK-Wurzeln von $g \cdot H$ überführt(s.5.3.4).

Lemma 5.3.1: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N), a \in \mathcal{NK}(H)$ und $g \in G_N$. Dann gilt:*

$$a \in \mathcal{NK}(H) \Leftrightarrow g \times g(a) \in \mathcal{NK}(g \cdot H).$$

Insbesondere ist die Abbildung

$$g \times g : \mathcal{NK}(H) \to \mathcal{NK}(g \cdot H), a \mapsto g \times g(a)$$

bijektiv.

Beweis: Seien $H = (p_{ij})$ und $H' := (p'_{ij}) := g \cdot H$. Für $(i, j) \in [N]^2$ gilt dann nach Bemerkung 4.1.8

$$p'_{g(i,j)} = p_{ij}.$$

Seien $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{NK}(H) &\Leftrightarrow \{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in \mathcal{NK}(H) \\ &\Leftrightarrow p_{i_0 j_0} p_{k_0 l_0} \neq p_{k_0 l_0} p_{i_0 j_0} \\ &\Leftrightarrow p'_{g(i_0 j_0)} p'_{g(k_0 l_0)} \neq p'_{g(k_0 l_0)} p'_{g(i_0 j_0)} \\ &\Leftrightarrow g \times g(\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\}) \in \mathcal{NK}(g \cdot H) \\ &\Leftrightarrow g \times g(a) \in \mathcal{NK}(g \cdot H). \end{aligned}$$

Die Abbildung

$$g \times g : \mathcal{NK}(H) \to \mathcal{NK}(g \cdot H), a \mapsto g \times g(a)$$

ist also wohldefiniert. Sie ist injektiv, da nach Proposition 5.1.6 die Abbildung

$$g \times g : [N]^2_\times \to [N]^2_\times, a \mapsto g \times g(a)$$

bijektiv ist. Außerdem gilt für ein $a' \in \mathcal{NK}(g \cdot H)$ nach zuvor gezeigtem:

$$a := g^{-1} \times g^{-1}(a') \in \mathcal{NK}(g^{-1} \cdot (g \cdot H)) = \mathcal{NK}(H),$$

und wegen Bemerkung 5.1.7 somit

$$g \times g(a) = (gg^{-1}) \times (gg^{-1})(a') = a'.$$

Somit ist die Abbildung auch surjektiv und die Aussage folgt. ■

Lemma 5.3.2: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N), \sigma \in S_N$. Dann gilt für $a, b \in \mathcal{NK}(H)$:*

$$\begin{aligned} \mathrm{cr}^H(a, b) &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{\mathrm{r}_\sigma \cdot H}(\mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(a), \mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(b)) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{\mathrm{c}_\sigma \cdot H}(\mathrm{c}_\sigma \times \mathrm{c}_\sigma(a), \mathrm{c}_\sigma \times \mathrm{c}_\sigma(b)) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{\tau_N \cdot H}(\tau_N \times \tau_N(a), \tau_N \times \tau_N(b)) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{\tau'_N \cdot H}(\tau'_N \times \tau'_N(a), \tau'_N \times \tau'_N(b)) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{\mathrm{rot}_N \cdot H}(\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(a), \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(b)) \end{aligned}$$

Beweis: Sei $(p'_{mn}) := \mathrm{r}_\sigma \cdot H$. Nach Bemerkung 4.1.8 gilt dann $p'_{\sigma(m)n} = p_{mn}$ für alle $m, n \in [N]$. Für $a, b \in \mathcal{NK}(H)$ gilt also:

$$
\begin{aligned}
& a, b \text{ sind zeilenabhängig auf } H \\
\Leftrightarrow & \text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, b = \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\}, \\
& l_1 \neq l_2, p_{k_0 n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\} \\
\Leftrightarrow & \text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit} \\
& \mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(a) = \{(\sigma(i_0), j_0), (\sigma(k_0), l_1)\}, \mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(b) = \{(\sigma(i_0), j_0), (\sigma(k_0), l_2)\}, \\
& l_1 \neq l_2, p'_{\sigma(k_0) n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\} \\
\Leftrightarrow & \mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(a), \mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(b) \text{ sind zeilenabhängig auf } \mathrm{r}_\sigma \cdot H.
\end{aligned}
$$

Sei nun $(p'_{mn}) := \tau_N \cdot H$. Nach Bemerkung 4.1.8 gilt dann $p'_{nm} = p_{mn}$ für alle $m, n \in [N]$. Für $a, b \in \mathcal{NK}(H)$ gilt also:

$$
\begin{aligned}
& a, b \text{ sind zeilenabhängig auf } H \\
\Leftrightarrow & \text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, b = \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\}, \\
& l_1 \neq l_2, p_{k_0 n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\} \\
\Leftrightarrow & \text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit} \\
& \tau_N \times \tau_N(a) = \{(j_0, i_0), (l_1, k_0)\}, \tau_N \times \tau_N(b) = \{(j_0, i_0), (l_2, k_0)\}, \\
& l_1 \neq l_2, p'_{m k_0} = 0 \text{ für alle } m \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\} \\
\Leftrightarrow & \tau_N \times \tau_N(a), \tau_N \times \tau_N(b) \text{ sind spaltenabhängig auf } \tau_N \cdot H.
\end{aligned}
$$

Sei nun $(p'_{mn}) := \tau'_N \cdot H$. Nach Bemerkung 4.1.8 gilt dann $p'_{N+1-n, N+1-m} = p_{mn}$ für alle $m, n \in [N]$. Für $a, b \in \mathcal{NK}(H)$ gilt also:

$$
\begin{aligned}
& a, b \text{ sind zeilenabhängig auf } H \\
\Leftrightarrow & \text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, b = \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\}, \\
& l_1 \neq l_2, p_{k_0 n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\} \\
\Leftrightarrow & \text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit} \\
& \tau'_N \times \tau'_N(a) = \{(N+1-j_0, N+1-i_0), (N+1-l_1, N+1-k_0)\}, \\
& \tau'_N \times \tau'_N(b) = \{(N+1-j_0, N+1-i_0), (N+1-l_2, N+1-k_0)\}, \\
& N+1-l_1 \neq N+1-l_2, p'_{m, N+1-k_0} = 0 \text{ für alle } m \in [N] \backslash \{N+1-j_0, N+1-l_1, N+1-l_2\} \\
\Leftrightarrow & \tau'_N \times \tau'_N(a), \tau'_N \times \tau'_N(b) \text{ sind spaltenabhängig auf } \tau'_N \cdot H.
\end{aligned}
$$

Sei nun $(p'_{mn}) := \mathrm{rot}_N \cdot H$. Nach Bemerkung 4.1.8 gilt dann $p'_{n, N+1-m} = p_{mn}$ für alle $m, n \in [N]$. Für $a, b \in \mathcal{NK}(H)$ gilt also:

$$
\begin{aligned}
&a, b \text{ sind zeilenabhängig auf } H\\
\Leftrightarrow &\text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, b = \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\},\\
&l_1 \neq l_2, p_{k_0 n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\}\\
\Leftrightarrow &\text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit}\\
&\mathrm{rot}_\sigma \times \mathrm{rot}_N(a) = \{j_0, N+1-i_0), (l_1, N+1-k_0)\}, \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(b) = \{(j_0, N+1-i_0), (l_2, N+1-k_0)\},\\
&l_1 \neq l_2, p'_{m, N+1-k_0} = 0 \text{ für alle } m \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\}\\
\Leftrightarrow &\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(a), \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(b) \text{ sind spaltenabhängig auf } \mathrm{rot}_N \cdot H.
\end{aligned}
$$

Analog zeigt man

$$
\begin{aligned}
&a, b \text{ sind spaltenabhängig auf } H\\
\Leftrightarrow &\mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(a), \mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(b) \text{ sind spaltenabhängig auf } \mathrm{r}_\sigma \cdot H,\\
\Leftrightarrow &\mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(a), \mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(b) \text{ sind spaltenabhängig auf } \mathrm{r}_\sigma \cdot H,\\
\Leftrightarrow &\tau_N \times \tau_N(a), \tau_N \times \tau_N(b) \text{ sind zeilenabhängig auf } \tau_N \cdot H,\\
\Leftrightarrow &\tau'_N \times \tau'_N(a), \tau'_N \times \tau'_N(b) \text{ sind zeilenabhängig auf } \tau'_N \cdot H,\\
\Leftrightarrow &\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(a), \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(b) \text{ sind zeilenabhängig auf } \mathrm{rot}_N \cdot H.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Aussage bewiesen. ■

Lemma 5.3.3: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N), g \in G_N, a, b \in \mathcal{NK}(H)$. Dann gilt:*

$$\mathrm{cr}^H(a, b) \Leftrightarrow \mathrm{cr}^{g \cdot H}(g \times g(a), g \times g(b)).$$

Beweis: Sei $\sigma \in S_N$. Wegen Bemerkung 4.1.3 gilt dann nach Lemma 5.3.2:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cr}^H(a, b)\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{r}_{\sigma^{-1}} \cdot H}(\mathrm{r}_{\sigma^{-1}} \times \mathrm{r}_{\sigma^{-1}}(a), \mathrm{r}_{\sigma^{-1}} \times \mathrm{r}_{\sigma^{-1}}(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{r}_\sigma^{-1} \cdot H}(\mathrm{r}_\sigma^{-1} \times \mathrm{r}_\sigma^{-1}(a), \mathrm{r}_\sigma^{-1} \times \mathrm{r}_\sigma^{-1}(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{c}_{\sigma^{-1}} \cdot H}(\mathrm{c}_{\sigma^{-1}} \times \mathrm{c}_{\sigma^{-1}}(a), \mathrm{c}_{\sigma^{-1}} \times \mathrm{c}_{\sigma^{-1}}(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{c}_\sigma^{-1} \cdot H}(\mathrm{c}_\sigma^{-1} \times \mathrm{c}_\sigma^{-1}(a), \mathrm{c}_\sigma^{-1} \times \mathrm{c}_\sigma^{-1}(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\tau_N \cdot H}(\tau_N \times \tau_N(a), \tau_N \times \tau_N(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\tau_N^{-1} \cdot H}(\tau_N^{-1} \times \tau_N^{-1}(a), \tau_N^{-1} \times \tau_N^{-1}(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\tau'_N \cdot H}(\tau'_N \times \tau'_N(a), \tau'_N \times \tau'_N(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\tau'^{-1}_N \cdot H}(\tau'^{-1}_N \times \tau'^{-1}_N(a), \tau'^{-1}_N \times \tau'^{-1}_N(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{rot}_N \cdot H}(\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(a), \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{rot}_N \cdot (\mathrm{rot}_N \cdot H)}(\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(a)), \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(b)))\\
\overset{(*)}{\Leftrightarrow} &\mathrm{cr}^{\mathrm{rot}^2 \cdot H}(\mathrm{rot}_N^2 \times \mathrm{rot}_N^2(a), \mathrm{rot}_N^2 \times \mathrm{rot}_N^2(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{rot}_N \cdot (\mathrm{rot}^2 \cdot H)}(\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(\mathrm{rot}_N^2 \times \mathrm{rot}_N^2(a)), \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(\mathrm{rot}_N^2 \times \mathrm{rot}_N^2(b))),\\
\overset{(*)}{\Leftrightarrow} &\mathrm{cr}^{\mathrm{rot}_N^3 \cdot H}(\mathrm{rot}_N^3 \times \mathrm{rot}_N^3(a), \mathrm{rot}_N^3 \times \mathrm{rot}_N^3(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{rot}_N^{-1} \cdot H}(\mathrm{rot}_N^{-1} \times \mathrm{rot}_N^{-1}(a), \mathrm{rot}_N^{-1} \times \mathrm{rot}_N^{-1}(b)),
\end{aligned}
$$

wobei $(*)$ wegen Bemerkung 5.1.7 und, da G_N auf $[N]^2$ operiert, gilt.
Also gilt für $g' \in \{\mathrm{id}, \mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_N, \tau'_N, \mathrm{rot}_N, \mathrm{r}_\sigma^{-1}, \mathrm{c}_\sigma^{-1}, \tau_N^{-1}, \tau_N'^{-1}, \mathrm{rot}_N^{-1}\}$:

$$\mathrm{cr}^H(a,b) \Leftrightarrow \mathrm{cr}^{g' \cdot H}(g' \times g'(a), g' \times g'(b)).$$

Da für $g'_1, g'_2 \in B := \{\mathrm{id}, \mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_N, \tau'_N, \mathrm{rot}_N, \mathrm{r}_\sigma^{-1}, \mathrm{c}_\sigma^{-1}, \tau_N^{-1}, \tau_N'^{-1}, \mathrm{rot}_N^{-1}\}$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{cr}^H(a,b) &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{g'_2 \cdot D}(g'_2 \times g'_2(a), g'_2 \times g'_2(b)),\\ &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{g'_1(g'_2 \cdot H)}(g'_1 \times g'_1((g'_2 \times g'_2(a))), g'_1 \times g'_1((g'_2 \times g'_2(b)))),\\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \mathrm{cr}^{(g'_1 g'_2) \cdot H}((g'_1 g'_2) \times (g'_1 g'_2)(a), (g'_1 g'_2) \times (g'_1 g'_2)(b)),\end{aligned}$$

wobei $(*)$ wegen Bemerkung 5.1.7 und, da G_N auf $[N]^2$ operiert, gilt. Induktiv folgt für $n \in \mathbb{N}^*, g'_1, \dots, g'_n \in B$:

$$\mathrm{cr}^H(a,b) \Leftrightarrow \mathrm{cr}^{(g'_1 \cdot \dots \cdot g'_n) \cdot H}((g'_1 \cdot \dots \cdot g'_n) \times (g'_1 \cdot \dots \cdot g'_n)(a), (g'_1 \cdot \dots \cdot g'_n) \times (g'_1 \cdot \dots \cdot g'_n)(b)),$$

wobei Bemerkung 5.1.7 und, dass G_N auf $[N]^2$ operiert, n-fach angewandt wurde,. Da für jedes $g \in G_N$ ein $n \in \mathbb{N}^*$ und $g'_1, \dots, g'_n \in B$ existieren mit

$$g = g'_1 \cdot \dots \cdot g'_2$$

folgt damit die Aussage. ■

Zentrale Aussage dieser Subsektion ist die folgende:

Proposition 5.3.4: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ und $g \in G_N$. Für eine Teilmenge $W \subset [N]^2_\times$ gilt:*

$$W \textit{ ist NK-Wurzel auf } H \Leftrightarrow g \times g(W) \textit{ ist NK-Wurzel auf } g \cdot H.$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned}&\{W' \mid W' \subset \mathcal{NK}(g \cdot H) \textit{ ist NK-Wurzel auf } g \cdot H\}\\ =&\{g \times g(W) \mid W \subset \mathcal{NK}(H) \textit{ ist NK-Wurzel auf } H\}.\end{aligned}$$

Beweis: Angenommen, W sei eine NK-Wurzel auf H. Seien $a, b \in W$. Dann gilt nach Lemma 5.3.1 $g \times g(a), g \times g(b) \in \mathcal{NK}(g \cdot H)$. Sei W' die NK-Wurzel von $g \times g(a)$ auf $g \cdot H$. Im Fall $a = b$ gilt dann trivialerweise $g \times g(b) \in W'$. Angenommen also, $a \neq b$. Dann existieren ein $n \in \mathbb{N}^*$ und $a_0, \dots, a_n \in \mathcal{NK}(H)$ mit

$$a_0 = a, a_n = b, \mathrm{cr}^H(a_i, a_{i-1}) \text{ für } i \in [n].$$

Nach Lemma 5.3.1 gilt dann $g \times g(a_i) \in \mathcal{NK}(g \cdot H)$ für $i \in \{0, \dots, n\}$ und nach Lemma 5.3.3 gilt $\mathrm{cr}^{g \cdot H}(g \times g(a_i), g \times g(a_{i-1}))$ für $i \in [n]$. Also gilt $g \times g(a_n) = g \times g(b) \in W'$. Somit folgt:

$$g \times g(W) \subset W'.$$

Sei nun andererseits $c \in W'$. Im Fall $c = g \times g(a)$ gilt klarerweise $c \in \{g \times g(a') | a' \in W\}$. Angenommen nun, es gelte $c \neq g \times g(a)$. Dann existieren ein $m \in \mathbb{N}^*$ und $c_0, \dots, c_m \in \mathcal{NK}(g \cdot H)$ mit

$$c_0 = g \times g(a), c_m = c \text{ und } \mathrm{cr}^{g \cdot H}(c_i, c_{i-1}) \text{ für } i \in [m].$$

Nach Bemerkung 5.2.2 existiert dann zu $i \in \{0, \dots, m\}$ ein $b_i \in \mathcal{NK}(H)$ mit $g \times g(b_i) = c_i$, und nach Lemma 5.3.3 gilt $\mathrm{cr}^H(b_i, b_{i-1})$ für $i \in [m]$. Es gilt $b_0 = g^{-1} \times g^{-1}(g \times g(a)) = a$ und $b_m = g^{-1} \times g^{-1}(c)$. Also gilt $g^{-1} \times g^{-1}(c) \in W$, und damit $c \in g \times g(W)$. Also gilt

$$W' \subset g \times g(W),$$

und damit

$$g \times g(W) = W'.$$

Also ist $g \times g(W)$ eine NK-Wurzel auf $g \cdot H$. Sei nun $W \subset [N]^2_\times$ sodass $\tilde{W} := g \times g(W)$ eine NK-Wurzel auf $g \cdot H$ ist. Wegen $H = g^{-1} \cdot (g \cdot H)$, dem ersten Teil des Beweises und Bemerkung 5.1.3 ist dann $W = g^{-1} \times g^{-1}(\tilde{W}) \subset \mathcal{NK}(H)$ eine NK-Wurzel auf H. Somit folgt die erste Aussage. Die zweite Aussage folgt direkt nach Lemma 5.3.1 direkt aus der Bijektivität von $g \times g : \mathcal{NK}(H) \to \mathcal{NK}(g \cdot H)$. ■

Aus Proposition 5.3.4 ergibt sich direkt, dass die Operation von G_N die Anzahl der NK-Wurzeln eines Hilbertsudokus, wie auch deren Mächtigkeit erhält.

Definition 5.3.5: Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ ein nicht-kommutatives Hilbertsudoku. Wir definieren:

$$\begin{aligned} W^H : &\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}, \\ &n \mapsto |\{W \subset [N]^2_\times \mid W \text{ ist NK-Wurzel auf } H, |W| = n\}|. \end{aligned}$$

Lemma 5.3.6: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ und $g \in G_N$. Dann gilt:*

$$W^H(n) = W^{g \cdot H}(n) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}^*.$$

Beweis: Nach Proposition 5.3.4 bildet $g \times g$ die Menge der NK-Wurzeln von H bijektiv auf die Menge der NK-Wurzeln auf $g \cdot H$ ab. Da $g \times g$ nach Lemma 5.3.1 $\mathcal{NK}(H)$ bijektiv auf $\mathcal{NK}(g \cdot H)$ abbildet, gilt für eine NK-Wurzel $W \subset \mathcal{NK}(H)$:

$$|W| = |g \times g(W)|.$$

Somit folgt die Aussage. ■

5.4 Eigenschaften von NK-Wurzeln auf Hilbertsudokus unter Isotopietransformationen

Im folgenden zeigen wir zunächst, dass die Operation von $\mathcal{U}(\mathscr{H})$ auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ NK-Paare und NK-Wurzeln erhält. Zusammen mit den Ergebnissen aus 5.3 zeigen wir dann, dass Isotopietransformationen auf Hilbertsudokus bijektiv. NK-Paare in NK-Paare und NK-Wurzeln in NK-Wurzeln überführen (s.5.4.4). Daraus ergibt sich auch eine Isotopieinvariante für nicht-kommutative Hilbertsudokus (s.5.4.5)

Lemma 5.4.1: *Sei $N \in \mathbb{N}^*, H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ und $T \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$. Dann gilt:*

$$\mathcal{NK}(H) = \mathcal{NK}(THT^*).$$

Beweis: Seien $H := (p_{ij})$ und $(i_0, j_0), (k_0, l_0) \in [N]^2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & p_{i_0 j_0} \cdot p_{k_0 l_0} = p_{k_0 l_0} \cdot p_{i_0 j_0} \\ \Leftrightarrow\ & (T p_{i_0 j_0} T^*) \cdot (T p_{k_0 l_0} T^*) = (T p_{k_0 l_0} T^*) \cdot (T p_{i_0 j_0} T^*). \end{aligned}$$

Somit folgt direkt die Aussage. ■

Lemma 5.4.2: *Sei $N \in \mathbb{N}^*, H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N), T \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$ und $a, b \in \mathcal{NK}(H)$. Dann gilt:*

$$\mathrm{cr}^H(a, b) \Leftrightarrow \mathrm{cr}^{THT^*}(a, b).$$

Beweis: Sei $H =: (p_{ij})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a, b \text{ sind zeilenabhängig auf } H \Leftrightarrow\ & \text{Es gibt } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } a = (i_0, j_0) \in [N]^2_\times, \\ & b = (k_0, l_0), (k_0, l_0') \in [N]^2_\times, l_0 \neq l_0', \\ & p_{k_0 n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_0, l_0'\} \\ \Leftrightarrow\ & \text{Es gibt } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } a = (i_0, j_0) \in [N]^2_\times, \\ & b = (k_0, l_0), (k_0, l_0') \in [N]^2_\times, l_0 \neq l_0', \\ & T p_{k_0 n} T^* = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_0, l_0'\} \\ \Leftrightarrow\ & a, b \text{ sind zeilenabhängig auf } THT^* \end{aligned}$$

Analog folgt für $a, b \in \mathcal{NK}(H)$

$$a \text{ und } b \text{ sind spaltenabhängig auf } H \Leftrightarrow a \text{ und } b \text{ sind spaltenabhängig auf } THT^*.$$ ■

Proposition 5.4.3: *Seien $N \in \mathbb{N}^*, H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ und $T \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$. Für eine Teilmenge $W \subset [N]^2_\times$ gilt:*

$$W \textit{ ist NK-Wurzel auf } H \Leftrightarrow W \textit{ ist NK-Wurzel auf } THT^*.$$

Beweis: Angenommen, $W \subset \mathcal{NK}(H)$ ist eine NK-Wurzel auf H. Seien $a, b \in W$. Nach Lemma 5.4.1 gilt dann auch $a, b \in \mathcal{NK}(THT^*)$. Sei $W' \subset \mathcal{NK}(T^*HT)$ die NK-Wurzel von a auf THT^*. Im Fall $a = b$ gilt trivialerweise $b \in W'$. Angenommen also, es gelte $a \neq b$. Dann existieren ein $n \in \mathbb{N}^*$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{NK}(H)$ mit $a_0 = a, a_n = b$ und $\mathrm{cr}^H(a_i, a_{i-1})$ für $i \in [n]$. Nach Lemma 5.4.1 gilt $a_i \in \mathcal{NK}(THT^*)$ und nach Lemma 5.4.2 $\mathrm{cr}^{THT^*}(a_i, a_{i-1})$ für $i \in [n]$. Also gilt $b \in W'$ und damit $W \subset W'$. Sei andererseits $c \in W'$. Im Fall $c = a$ gilt trivialerweise $c \in W$. Angenommen also, es gelte $c \neq a$. Dann existieren ein $m \in \mathbb{N}^*$ und $c_0, \ldots, c_m \in \mathcal{NK}(THT^*)$ mit $c_0 = a, c_m = c$ und $\mathrm{cr}^{THT^*}(c_i, c_{i-1})$ für $i \in [m]$. Nach Lemma 5.4.1 gilt $c_i \in \mathcal{NK}(H)$ und nach Lemma 5.4.2 $\mathrm{cr}^H(c_i, c_{i-1})$ für alle $i \in [m]$. Also gilt auch $c \in W$, also $W' \subset W$ und somit:

$$W = W'.$$

Sei nun $\tilde{W} \subset \mathcal{NK}(T^*HT)$ eine NK-Wurzel auf THT^*. Dann ist nach dem ersten Teil des Beweises, $\tilde{W}$ eine NK-Wurzel auf $T^*(THT^*)T = H$. Somit ist die Aussage bewiesen. ■

Zentrale Aussage der Subsektion ist die folgende:

Proposition 5.4.4: *Seien $N \in \mathbb{N}^*$, $g \in G_N$, $T \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$ und $H_1, H_2 \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ isotop mit $H_2 = (T, g) * H_1$. Für $a \in [N]^2_\times$ und $W \subset [N]^2_\times$ gilt:*

$$a \in \mathcal{NK}(H_1) \Leftrightarrow g \times g(a) \in \mathcal{NK}(H_2),$$
$$W \text{ ist NK-Wurzel auf } H_1 \Leftrightarrow g \times g(W) \text{ ist NK-Wurzel auf } H_2.$$

Insbesondere gilt dann:

$$\begin{aligned}&\{W' \mid W' \subset \mathcal{NK}(H_2) \text{ ist NK-Wurzel auf } H_2\}\\ =&\{g \times g(W) \mid W \subset \mathcal{NK}(H_1) \text{ ist NK-Wurzel auf } H_1\}.\end{aligned}$$

Beweis: Nach Bemerkung 4.2.5 gilt $H_2 = T(g \cdot H_1)T^*$. Für ein $a \in [N]^2_\times$ gilt nach Lemma 5.3.1 und Lemma 5.4.1 also:

$$\begin{aligned}a \in \mathcal{NK}(H_1) &\Leftrightarrow g \times g(a) \in \mathcal{NK}(g \cdot H_1)\\ &\Leftrightarrow g \times g(a) \in \mathcal{NK}(T(g \cdot H_1)T^*)\\ &\Leftrightarrow g \times g(a) \in \mathcal{NK}(H_2).\end{aligned}$$

Analog gilt nach Proposition 5.3.4 und Proposition 5.4.3:

$$\begin{aligned}W \text{ ist NK-Wurzel auf } H_1 &\Leftrightarrow g \times g(W) \text{ ist NK-Wurzel auf } g \cdot H_1\\ &\Leftrightarrow g \times g(W) \text{ ist NK-Wurzel auf } T(g \cdot H_1)T^*\\ &\Leftrightarrow g \times g(W) \text{ ist NK-Wurzel auf } H_2.\end{aligned}$$

Somit folgt die ersten beiden Aussagen. Nach Lemma 5.3.1 und Lemma 5.4.1 ist die Abbildung

$$g \times g : \mathcal{NK}(H_1) \mapsto \mathcal{NK}(H_2)$$

bijektiv. Somit folgt mit der zweiten Aussage auch die dritte Aussage. ■

Korollar 5.4.5: *Seien $N \in \mathbb{N}^*$ und $H_1, H_2 \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ zwei isotope, nicht-kommutative Hilbertsudokus. Dann gilt:*

$$W^{H_1}(n) = W^{H_2}(n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

Beweis: Da H_1 und H_2 isotop sind, existieren ein $g \in G_N$ und ein $T \in \mathcal{U}(\mathscr{H})$ mit $H_2 = (T, g) * H_1$. Nach Proposition 5.4.4 bildet $g \times g$ die NK-Wurzeln auf H_1 bijektiv auf die NK-Wurzeln auf H_2 ab, und da nach Lemma 5.3.1 $\mathcal{NK}(H_1)$ von $g \times g$ bijektiv auf $\mathcal{NK}(g \cdot H_1)$ abbildet wird, gilt für eine NK-Wurzel $W \subset \mathcal{NK}(H_1)$:

$$|W| = |g \times g(W)|.$$

Damit ist die Aussage bewiesen. ■

Bemerkung 5.4.6: Damit ein gegebenes Hilbertsudoku H nicht nur NK-Wurzeln der Mächtigkeit 1 besitzt, muss es mindestens zwei NK-Paare auf H geben, die zeilen - beziehungsweise spaltenabhängig sind. Angenommen $\{(i_0, j_0), (k_0, l_1\}, \{(i_0, j_0), (k_0, l_2\}$ wären zeilenabhängig auf $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Dann muss nach Definition 5.2.4 gelten $p_{k_0,n} = 0$ für alle $n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\}$. Korollar 5.4.5 dient daher tendenziell eher bei Hilbertsudokus, die viele 0-Einträge haben, als Hilfsmittel zur Unterscheidung der Isotopieklassen.

5.5 NK-Wurzeln auf Dimensionssudokus

In dieser Subsektion führen wir NK-Wurzeln auf Dimensionssudokus ein. Es wird das zentrale Ergebnis der Sektion gezeigt, dass eine NK-Wurzel auf einem Hilbersudoku auf $\mathbb{C}^d$ auch NK-Wurzel auf dem zugehörigen Dimensionssudoku ist (5.5.10). Um NK-Wurzeln auf Dimensionssudokus zu definieren, gehen wir völlig analog wie in 5.2 vor und definieren als erstes NK-Paare auf Dimensionssudokus. Zwei Einträge eines Dimensionssudoku D werden dabei als *nicht-kommutativ* aufgefasst, wenn die Nicht-Kommutativität der entsprechenden Einträge einer Lösung von D nicht dadurch ausgeschlossen ist, dass sie gleichen Zeilen- und Spaltenindex haben, oder einer der beiden Einträge gleich $\mathbb{1}$ bzw. 0 ist:

Definition 5.5.1 (NK-Paar auf Dimensionssudoku): Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D = (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$ ein Dimensionssudoku und seien $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$, sodass $a := \{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$ und $d_{i_0j_0}, d_{k_0l_0} \notin \{0, d\}$ gilt. Dann heißt a *NK-Paar auf* D. $\mathcal{NK}(D)$ bezeichne die Menge der NK-Paare auf D.

Wie das folgende Lemma zeigt, umfasst $\mathcal{NK}(D)$ für ein Dimensionssudoku D die Menge der NK-Paare, die auf einem Hilbertsudoku, das D löst, möglich sind:

Lemma 5.5.2: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, H = (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ ein nicht-kommutatives Hilbertsudoku und $D := \mathrm{Dim}(H) = (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$ das zugehörige Dimensionssudoku. Dann gilt $\mathcal{NK}(H) \subset \mathcal{NK}(\mathrm{Dim}(H))$.*

Beweis: Seien $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$, so dass $a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\}$ gilt. Dann gilt wegen Bemerkung 3.1.2 $i_0 \neq k_0$ und $j_0 \neq l_0$. Nach Bemerkung 5.2.3 gilt $d_{i_0j_0}, d_{k_0l_0} \notin \{0, d\}$. ■

Formal völlig analog zum Fall von Hilbertsudokus (5.2.4, 5.2.5) lassen sich Zeilen- und Spaltenabhängigkeit auf Dimensionssudokus definieren:

Definition 5.5.3 (Zeilenabhängigkeit auf Dimensionssudokus): Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$. Existieren $i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N]$ mit $l_1 \neq l_2, a := \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, b := \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\} \in \mathcal{NK}(D)$, sodass für alle $n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\}$ gilt $d_{k_0n} = 0$, dann nennen wir a und b *zeilenabhängig auf* D.

Definition 5.5.4 (Spaltenabhängigkeit auf Dimensionssudokus): Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$. Existieren $i_0, j_0, k_1, k_2, l_0 \in [N]$ mit $k_1 \neq k_2, a := \{(i_0, j_0), (k_1, l_0)\}, b := \{(i_0, j_0), (k_2, l_0)\} \in \mathcal{NK}(D)$, sodass für alle $m \in [N] \backslash \{i_0, k_1, k_2\}$ gilt $d_{ml_0} = 0$, dann nennen wir a und b *spaltenabhängig auf* D.

Auch die Relation der Zeilen- bzw. Spaltenabhängigkeit auf Dimensionssudokus erweitert die Relation der Zeilen- bzw. Spaltenabhängigkeit auf Hilbertsudokus aus $\mathbb{C}^d$:

Lemma 5.5.5: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, H = (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ und $D := \mathrm{Dim}(H) = (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$. Seien $a, b \in \mathcal{NK}(H)$ zeilenabhängig (bzw. spaltenabhängig) auf H. Dann sind a und b auch als NK-Paare auf D zeilenabhängig (bzw. spaltenabhängig).*

Beweis: Seien $a, b \in \mathcal{NK}(H)$ zeilenabhängig auf H. Nach Lemma 5.5.2 gilt $a, b \in \mathcal{NK}(D)$. Seien $i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N]$, so dass $a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}$ und $b = \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\}$ gilt. Wegen Bemerkung 5.2.3 gilt $d_{i_0j_0}, d_{k_0l_1}, d_{k_0l_2} \notin \{0, d\}$. Wegen der Zeilenabhängigkeit von a und b auf H gilt $l_1 \neq l_2$ und $d_{k_0n} = 0$ für alle $n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\}$. Also sind a und b zeilenabhängig auf D. Analog folgt für $a', b' \in \mathcal{NK}(H)$, die spaltenabhängig auf H sind, dass diese auch spaltenabhängig auf D sind. ■

In Analogie zu Lemma 5.2.6 beschreibt das folgende Lemma, dass für zwei zeilen/-spaltenabhängige NK-Paare a und b auf D die Eigenschaft, NK-Paar auf einer Lösung von D zu sein für a bzw. b zwingend aus der Eigenschaft für b bzw. a folgt, und dass a und b dann auf der Lösung von D auch zeilen/-spaltenabhängig sind.

Lemma 5.5.6: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N), D := \mathrm{Dim}(H) = (d_{ij})$ und $a \in \mathcal{NK}(H)$. Nach Lemma 5.5.2 gilt dann auch $a \in \mathcal{NK}(D)$. Seien $b \in \mathcal{NK}(D)$, sodass a und b zeilenabhängig (bzw. spaltenabhängig) auf D sind. Dann gilt $b \in \mathcal{NK}(H)$ und a und b sind zeilenabhängig (bzw. spaltenabhängig) auf H.*

Beweis: Seien a und b zeilenabhängig auf D und seien $i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N]$ mit $a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}$ und $b = \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\}$. Ohne Einschränkung gelte $d \geq 2$. Wegen der Zeilenabhängigkeit von a und b auf D gilt $l_1 \neq l_2, 0 < d_{k_0 l_2} < d$, also $p_{k_0 l_2 \neq 0}$ und $d_{k_0 n} = 0$ für alle $n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\}$, also $p_{k_0 n} = 0$ für alle $n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\}$. Also ist b zeilenabhängig von a auf H, und somit gilt nach Lemma 5.2.6 $b \in \mathcal{NK}(H)$. Analog folgt die Aussage, falls a und b spaltenabhängig auf D sind. ■

Definition 5.5.7 (Die Relation cr^D auf Dimensionssudokus): Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$ ein Hilbertsudoku und $a, b \in \mathcal{NK}(D)$. Dann wird durch

$$\mathrm{cr}^D(a, b) :\Leftrightarrow a \text{ und } b \text{ sind zeilenabhängig oder spaltenabhängig auf } D$$

eine symmetrische Relation auf $\mathcal{NK}(D)$ definiert.

Analog zum Fall von Hilbertsudokus definieren NK-Wurzeln auf Dimensionssudokus:

Definition 5.5.8 (NK-Wurzeln auf Dimensionssudokus): Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $D \in \mathcal{D}(N, d)$. Dann wird nach Definition 5.5.7 durch cr^D eine symmetrische Relation auf $\mathcal{NK}(D)$ definiert. Nach Lemma 5.1.2 wird also durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathrm{cr}}^D(a, b) :\Leftrightarrow\ & \text{Es existieren ein } n \in \mathbb{N}, a_0, \dots, a_n \in \mathcal{NK}(D) \text{ mit} \\ & a_0 = a, a_n = b \text{ und } \mathrm{cr}^D(a_i, a_{i-1}) \text{ für } 1 \leq i \leq n \\ & \text{oder } a = b, \end{aligned}$$

wobei $a, b \in \mathcal{NK}(D)$ gilt, eine Äquivalenzrelation auf $\mathcal{NK}(D)$ definiert. Die Äquivalenzklassen von $\tilde{\mathrm{cr}}^D$ nennen wir *NK-Wurzeln* auf D.

Bemerkung 5.5.9: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$. Für $a, b \in \mathcal{NK}(D)$ gilt dann:

$$\begin{aligned} & a \text{ und } b \text{ sind zeilenabhängig auf } D \\ \Leftrightarrow & \text{Es gibt } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } l_1 \neq l_2, a := \{(i_0, j_0)(k_0, l_1)\}, b := \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\} \in \mathcal{NK}(D), \\ & d_{k_0 n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\}, \\ \Leftrightarrow & \text{Es gibt } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } l_1 \neq l_2, a := \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, b := \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\} \in \mathcal{NK}(D), \\ & \{(i_0, j_0), (k_0, n)\} \notin \mathcal{NK}(D) \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{l_1, l_2\}, \end{aligned}$$

Analog gilt:

$$\begin{aligned} & a \text{ und } b \text{ sind spaltenabhängig auf } D \\ \Leftrightarrow & \text{Es gibt } i_0, j_0, k_1, k_2, l_0 \in [N] \text{ mit } a := \{(i_0, j_0), (k_1, l_0)\}, b := \{(i_0, j_0), (k_2, l_0)\} \in \mathcal{NK}(D), \\ & \{(i_0, j_0), (m, l_0)\} \notin \mathcal{NK}(D) \text{ für alle } m \in [N] \backslash \{k_1, k_2\}. \end{aligned}$$

Es folgt der zentrale Satz der Sektion:

Satz 5.5.10: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$. Sei $W \subset \mathcal{NK}(H)$ eine NK-Wurzel auf H. Dann ist W auch eine NK-Wurzel auf* $\mathrm{Dim}(H)$.

Beweis: Sei $D := \mathrm{Dim}(H)$ und $a \in W \subset \mathcal{NK}(H)$. Nach Lemma 5.5.2 gilt dann auch $a \in \mathcal{NK}(D)$. Sei W' die NK-Wurzel von a auf D und sei $b \in W$. Im Fall $a = b$ gilt dann trivialerweise $b \in W'$. Angenommen also, es gelte $a \neq b$. Dann existieren ein $n \in \mathbb{N}^*, a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{NK}(H)$ mit $a_0 = a, a_n = b$ und $\mathrm{cr}^H(a_i, a_{i-1})$ für $1 \leq i \leq n$. Nach Lemma 5.5.2 gilt dann $a_i \in \mathcal{NK}(D)$ für $0 \leq i \leq n$ und nach Lemma 5.5.5 gilt $\mathrm{cr}^D(a_i, a_{i-1})$ für $1 \leq i \leq n$. Somit gilt auch $b = a_n \in W'$. Also gilt $W \subset W'$. Sei nun $c \in W'$. Im Fall $c = a$ gilt trivialerweise $c \in W$. Angenommen also $c \neq a$. Dann existieren ein $n' \in \mathbb{N}^*$ und $c_0, \ldots, c_{n'} \in \mathcal{NK}(D)$ mit $c_0 = a, c_{n'} = c$ und $\mathrm{cr}^D(c_i, c_{i-1})$ für $1 \leq i \leq n'$. Nach Lemma 5.5.6 folgt dann induktiv $c_i \in \mathcal{NK}(H)$ und $\mathrm{cr}^H(c_i, c_{i-1})$ für $1 \leq i \leq n'$. Also gilt auch $c = c_{n'} \in W$. Somit gilt $W = W'$ und die Aussage ist bewiesen. ■

Definition 5.5.11: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D \in \mathcal{D}(N, d), W \subset \mathcal{NK}(D)$ eine NK-Wurzel von D, und $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ mit $\mathrm{Dim}(H) = D$ und $W \subset \mathcal{NK}(H)$. Dann sagen wir, H ist *eine Lösung von* W.

Bemerkung 5.5.12: Um die nicht-kommutativen Lösungen eines Dimensionssudokus $D \in \mathcal{D}(N, d)$ zu berechnen, kann man also zuerst die NK-Wurzeln von D berechnen und anschließend berechnen welche NK-Wurzeln von D welche Lösungsmengen in $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ zulassen (s.5.8.12 für ein Beispiel).

Für ein Dimensionssudoku D notieren wir völlig analog zum Fall von nicht-kommutativen Hilbertsudokus (s.5.2.11) $\mathcal{NK}(D)$ und eine NK- Wurzel W auf D:

Notation 5.5.13: Sei $D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$ nicht-kommutativ. Wir notieren $\mathcal{NK}(D)$ durch die Matrix D, in der die Einträge d_{ij} und d_{kl} durch eine Linie verbunden sind, falls $\{(i, j), (k, l)\} \in \mathcal{NK}(D)$ gilt. Ist $W \subset \mathcal{NK}(D)$ eine NK-Wurzel, dann notieren wir W durch die Matrix D, in der die Einträge d_{ij} und d_{kl} durch eine Linie verbunden sind, falls $\{(i, j), (k, l)\} \in W$ gilt.

Bemerkung 5.5.14: Sei $D \in \mathcal{D}(N, d)$ nicht-kommutativ und $W \subset \mathcal{NK}(D)$ eine NK-Wurzel. Dann bilden $([N]^2, \mathcal{NK}(D))$ und $([N]^2, W)$ endliche, einfache, ungerichtete Graphen.

Es folgt eine Hilfsaussage, die aussagt, welche Art von NK-Paaren eines Dimensionssudokus D bei der Suche nach einer nicht-kommutativen Lösung von D vernächlässigt werden können.

Lemma 5.5.15: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$. Angenommen, es existieren $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$, sodass*

$$d_{i_0 j_0} \neq 0, d_{i_0 l_0} \neq 0, d_{k_0 j_0} \neq 0, d_{k_0 l_0} \neq 0,$$
$$d_{mn} = 0 \textit{ für alle } (m, n) \in [N]^2 \textit{ mit } m \in \{i_0, k_0\} n \notin \{j_0, l_0\} \textit{ oder mit } m \notin \{i_0, k_0\}, n \in \{j_0, l_0\}$$

Dann existiert kein $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$, das D löst, und für das $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in \mathcal{NK}(H)$ oder $\{(i_0, l_0), (k_0, j_0)\} \in \mathcal{NK}(H)$ gilt.

Beweis: Angenommen, es existiere eine Lösung $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ von D. Dann gilt nach Bemerkung 3.1.2:

$$\begin{aligned}
p_{i_0j_0}p_{k_0l_0} &= p_{i_0j_0}p_{i_0l_0} + p_{i_0j_0}p_{k_0l_0} \\
&= p_{i_0j_0}(p_{i_0l_0} + p_{k_0l_0}) \\
&= p_{i_0j_0}(\sum_{s=1}^{N} p_{sl_0}) \\
&= p_{i_0j_0}\mathbb{1} \\
&= \mathbb{1}p_{i_0j_0} \\
&= (p_{i_0l_0} + p_{k_0l_0})p_{i_0j_0} \\
&= p_{k_0l_0}p_{i_0j_0}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_{i_0l_0}p_{k_0j_0} &= p_{i_0l_0}p_{i_0j_0} + p_{i_0l_0}p_{k_0j_0} \\
&= p_{i_0l_0}(p_{i_0j_0} + p_{k_0j_0}) \\
&= p_{i_0l_0}(\sum_{s=1}^{N} p_{sj_0}) \\
&= p_{i_0l_0}\mathbb{1} \\
&= \mathbb{1}p_{i_0l_0} \\
&= (p_{i_0j_0} + p_{k_0j_0})p_{i_0l_0} \\
&= p_{i_0l_0}p_{k_0j_0}
\end{aligned}$$

Also gilt $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\}, \{(i_0, l_0), (k_0, j_0)\} \notin \mathcal{NK}(H)$. ■

Bemerkung 5.5.16: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $D \in \mathcal{D}(N, d)$. Dann bildet $([N]^2, \mathcal{NK}(D))$ einen endlichen, einfachen, ungerichteten Graphen.

5.6 Eigenschaften von NK-Wurzeln auf Dimensionssudokus unter der Wirkung von G_N

In Section 5.3 wurde beschrieben, wie sich die Operation von G_N auf NK-Paare und NK-Wurzeln auf Hilbertsudokus aus $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ auswirkt. Die Aussagen dort lassen sich völlig analog auf den Fall der Operation von G_N auf $\mathcal{D}(N, d)$ übertragen und werden in der folgenden Subsektion aufgeführt. Analog wie in 5.3 für den Fall der Isotopie von Hilbertsudokus liefern NK-Wurzeln auch ein Mittel zur Unterscheidung der Äquivalenzklassen von Dimensionssudokus (s.5.6.5).

Lemma 5.6.1: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d), g \in G_N$ und $a \in [N]^2_\times$. Dann gilt:*

$$a \in \mathcal{NK}(D) \Leftrightarrow g \times g(a) \in \mathcal{NK}(g \cdot D).$$

Insbesondere ist die Abbildung

$$g \times g : \mathcal{NK}(D) \to \mathcal{NK}(g \cdot D), a \mapsto g \times g(a)$$

bijektiv.

Beweis: Sei $D' := (d'_{ij}) := g \cdot D$. Für $(i,j) \in [N]^2$ gilt dann nach Bemerkung 4.1.8:

$$d'_{g(i,j)} = d_{ij}.$$

Seien $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} a \in \mathcal{NK}(H) &\Leftrightarrow \{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in \mathcal{NK}(H) \\ &\Leftrightarrow d_{i_0 j_0}, d_{k_0 l_0} \notin \{0, d\} \\ &\Leftrightarrow d'_{g(i_0,j_0)}, d'_{g(k_0,l_0)} \notin \{0, d\} \\ &\Leftrightarrow g \times g(\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\}) \in \mathcal{NK}(g \cdot H) \\ &\Leftrightarrow g \times g(a) \in \mathcal{NK}(g \cdot H). \end{aligned}$$

Somit folgt die erste Aussage. Die Abbildung aus der zweiten Aussage ist also wohldefiniert. Sie ist injektiv, da nach Proposition 5.1.6 die Abbildung

$$g \times g : [N]^2_\times \to [N]^2_\times, a \mapsto g \times g(a)$$

bijektiv ist. Außerdem gilt für ein $a' \in \mathcal{NK}(g \cdot D)$ nach zuvor gezeigtem:

$$a := g^{-1} \times g^{-1}(a') \in \mathcal{NK}(g^{-1} \cdot (g \cdot D)) = \mathcal{NK}(D),$$

und wegen Bemerkung 5.1.7 somit

$$g \times g(a) = (gg^{-1}) \times (gg^{-1})(a') = a'.$$

Somit ist die Abbildung auch surjektiv und die Aussage folgt. ■

Lemma 5.6.2: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$, $D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$, $\sigma \in S_N$. Dann gilt für $a, b \in \mathcal{NK}(D)$:*

$$\begin{aligned} \mathrm{cr}^D(a, b) &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{\mathrm{r}_\sigma \cdot D}(\mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(a), \mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(b)) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{\mathrm{c}_\sigma \cdot D}(\mathrm{c}_\sigma \times \mathrm{c}_\sigma(a), \mathrm{c}_\sigma \times \mathrm{c}_\sigma(b)) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{\tau_N \cdot D}(\tau_N \times \tau_N(a), \tau_N \times \tau_N(b)) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{\tau'_N \cdot D}(\tau'_N \times \tau'_N(a), \tau'_N \times \tau'_N(b)) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{\mathrm{rot}_N \cdot D}(\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(a), \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(b)) \end{aligned}$$

Beweis: Seien $(d'_{mn}) := \mathrm{r}_\sigma \cdot D$. Nach Bemerkung 4.1.8 gilt dann $d'_{\sigma(m)n} = d_{mn}$ für alle $m, n \in [N]$. Für $a, b \in \mathcal{NK}(H)$ gilt also:

$$\begin{aligned} &a, b \text{ sind zeilenabhängig auf } D \\ \Leftrightarrow &\text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, b = \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\}, \\ &l_1 \neq l_2, d_{k_0 n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\} \\ \Leftrightarrow &\text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit} \\ &\mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(a) = \{(\sigma(i_0), j_0), (\sigma(k_0), l_1)\}, \mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(b) = \{(\sigma(i_0), j_0), (\sigma(k_0), l_2)\}, \\ &l_1 \neq l_2, d'_{\sigma(k_0)n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\} \\ \Leftrightarrow &\mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(a), \mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(b) \text{ sind zeilenabhängig auf } \mathrm{r}_\sigma \cdot D. \end{aligned}$$

Sei nun $(d'_{mn}) := \mathrm{c}_\sigma \cdot D$. Nach Bemerkung 4.1.8 gilt dann $d'_{m\sigma(n)} = p_{mn}$ für alle $m, n \in [N]$. Für $a, b \in \mathcal{NK}(H)$ gilt also:

$$
\begin{aligned}
&a, b \text{ sind zeilenabhängig auf } D \\
\Leftrightarrow &\text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, b = \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\}, \\
&l_1 \neq l_2, d_{k_0 n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\} \\
\Leftrightarrow &\text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit} \\
&\mathrm{c}_\sigma \times \mathrm{c}_\sigma(a) = \{(i_0, \sigma(j_0)), (k_0, \sigma(l_1))\}, \mathrm{c}_\sigma \times \mathrm{c}_\sigma(b) = \{(i_0, \sigma(j_0)), (k_0, \sigma(l_2))\}, \\
&\sigma(l_1) \neq \sigma(l_2), d'_{k_0 n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{\sigma(j_0), \sigma(l_1), \sigma(l_2)\} \\
\Leftrightarrow &\mathrm{c}_\sigma \times \mathrm{c}_\sigma(a), \mathrm{c}_\sigma \times \mathrm{c}_\sigma(b) \text{ sind zeilenabhängig auf } \mathrm{c}_\sigma \cdot D.
\end{aligned}
$$

Sei nun $(d'_{mn}) := \tau_N \cdot D$. Nach Bemerkung 4.1.8 gilt dann $d'_{nm} = p_{mn}$ für alle $m, n \in [N]$. Für $a, b \in \mathcal{NK}(D)$ gilt also:

$$
\begin{aligned}
&a, b \text{ sind zeilenabhängig auf } D \\
\Leftrightarrow &\text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, b = \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\}, \\
&l_1 \neq l_2, d_{k_0 n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\} \\
\Leftrightarrow &\text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit} \\
&\tau_N \times \tau_N(a) = \{(j_0, i_0), (l_1, k_0)\}, \tau_N \times \tau_N(b) = \{(j_0, i_0), (l_2, k_0)\}, \\
&l_1 \neq l_2, d'_{mk_0} = 0 \text{ für alle } m \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\} \\
\Leftrightarrow &\tau_N \times \tau_N(a), \tau_N \times \tau_N(b) \text{ sind spaltenabhängig auf } \tau_N \cdot D.
\end{aligned}
$$

Sei nun $(d'_{mn}) := \tau'_N \cdot D$. Nach Bemerkung 4.1.8 gilt dann $d'_{N+1-n, N+1-m} = d_{mn}$ für alle $m, n \in [N]$. Für $a, b \in \mathcal{NK}(D)$ gilt also:

$$
\begin{aligned}
&a, b \text{ sind zeilenabhängig auf } D \\
\Leftrightarrow &\text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, b = \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\}, \\
&l_1 \neq l_2, d_{k_0 n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\} \\
\Leftrightarrow &\text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit} \\
&\tau'_N \times \tau'_N(a) = \{(N+1-j_0, N+1-i_0), (N+1-l_1, N+1-k_0)\}, \\
&\tau'_N \times \tau'_N(b) = \{(N+1-j_0, N+1-i_0), (N+1-l_2, N+1-k_0)\}, \\
&N+1-l_1 \neq N+1-l_2, d'_{m, N+1-k_0} = 0 \text{ für alle } m \in [N] \backslash \{N+1-j_0, N+1-l_1, N+1-l_2\} \\
\Leftrightarrow &\tau'_N \times \tau'_N(a), \tau'_N \times \tau'_N(b) \text{ sind spaltenabhängig auf } \tau'_N \cdot D.
\end{aligned}
$$

Sei nun $(d'_{mn}) := \mathrm{rot}_N \cdot D$. Nach Bemerkung 4.1.8 gilt dann $d'_{n, N+1-m} = d_{mn}$ für alle $m, n \in [N]$. Für $a, b \in \mathcal{NK}(D)$ gilt also:

$$
\begin{aligned}
&a, b \text{ sind zeilenabhängig auf } D\\
\Leftrightarrow &\text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit } a = \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, b = \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\},\\
&l_1 \neq l_2, d_{k_0 n} = 0 \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\}\\
\Leftrightarrow &\text{Es existieren } i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N] \text{ mit}\\
&\mathrm{rot}_\sigma \times \mathrm{rot}_N(a) = \{j_0, N+1-i_0), (l_1, N+1-k_0)\}, \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(b) = \{(j_0, N+1-i_0), (l_2, N+1-k_0)\},\\
&l_1 \neq l_2, d'_{m,N+1-k_0} = 0 \text{ für alle } m \in [N] \backslash \{j_0, l_1, l_2\}\\
\Leftrightarrow &\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(a), \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(b) \text{ sind spaltenabhängig auf } \mathrm{rot}_N \cdot D.
\end{aligned}
$$

Analog zeigt man

$$
\begin{aligned}
&a, b \text{ sind spaltenabhängig auf } D\\
\Leftrightarrow &\mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(a), \mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(b) \text{ sind spaltenabhängig auf } \mathrm{r}_\sigma \cdot D,\\
\Leftrightarrow &\mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(a), \mathrm{r}_\sigma \times \mathrm{r}_\sigma(b) \text{ sind spaltenabhängig auf } \mathrm{r}_\sigma \cdot D,\\
\Leftrightarrow &\tau_N \times \tau_N(a), \tau_N \times \tau_N(b) \text{ sind zeilenabhängig auf } \tau_N \cdot H,\\
\Leftrightarrow &\tau'_N \times \tau'_N(a), \tau'_N \times \tau'_N(b) \text{ sind zeilenabhängig auf } \tau'_N \cdot D,\\
\Leftrightarrow &\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(a), \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(b) \text{ sind zeilenabhängig auf } \mathrm{rot}_N \cdot D.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Aussage bewiesen. ■

Lemma 5.6.3: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D \in \mathcal{D}(N, d), g \in G_N, a, b \in \mathcal{NK}(D)$. Dann gilt:*

$$\mathrm{cr}^D(a, b) \Leftrightarrow \mathrm{cr}^{g \cdot D}(g \times g(a), g \times g(b)).$$

Beweis: Sei $\sigma \in S_N$. Wegen Bemerkung 4.1.3 gilt dann nach Lemma 5.6.2:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{cr}^D(a, b)\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{r}_{\sigma^{-1}} \cdot D}(\mathrm{r}_{\sigma^{-1}} \times \mathrm{r}_{\sigma^{-1}}(a), \mathrm{r}_{\sigma^{-1}} \times \mathrm{r}_{\sigma^{-1}}(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{r}_\sigma^{-1} \cdot D}(\mathrm{r}_\sigma^{-1} \times \mathrm{r}_\sigma^{-1}(a), \mathrm{r}_\sigma^{-1} \times \mathrm{r}_\sigma^{-1}(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{c}_{\sigma^{-1}} \cdot D}(\mathrm{c}_{\sigma^{-1}} \times \mathrm{c}_{\sigma^{-1}}(a), \mathrm{c}_{\sigma^{-1}} \times \mathrm{c}_{\sigma^{-1}}(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{c}_\sigma^{-1} \cdot D}(\mathrm{c}_\sigma^{-1} \times \mathrm{c}_\sigma^{-1}(a), \mathrm{c}_\sigma^{-1} \times \mathrm{c}_\sigma^{-1}(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\tau_N \cdot D}(\tau_N \times \tau_N(a), \tau_N \times \tau_N(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\tau_N^{-1} \cdot D}(\tau_N^{-1} \times \tau_N^{-1}(a), \tau_N^{-1} \times \tau_N^{-1}(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\tau'_N \cdot D}(\tau'_N \times \tau'_N(a), \tau'_N \times \tau'_N(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\tau'^{-1}_N \cdot D}(\tau'^{-1}_N \times \tau'^{-1}_N(a), \tau'^{-1}_N \times \tau'^{-1}_N(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{rot}_N \cdot D}(\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(a), \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{rot}_N \cdot (\mathrm{rot}_N \cdot D)}(\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(a)), \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(b)))\\
\overset{(*)}{\Leftrightarrow} &\mathrm{cr}^{\mathrm{rot}^2 \cdot D}(\mathrm{rot}_N^2 \times \mathrm{rot}_N^2(a), \mathrm{rot}_N^2 \times \mathrm{rot}_N^2(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{rot}_N \cdot (\mathrm{rot}^2 \cdot D)}(\mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(\mathrm{rot}_N^2 \times \mathrm{rot}_N^2(a)), \mathrm{rot}_N \times \mathrm{rot}_N(\mathrm{rot}_N^2 \times \mathrm{rot}_N^2(b))),\\
\overset{(*)}{\Leftrightarrow} &\mathrm{cr}^{\mathrm{rot}_N^3 \cdot D}(\mathrm{rot}_N^3 \times \mathrm{rot}_N^3(a), \mathrm{rot}_N^3 \times \mathrm{rot}_N^3(b)),\\
\Leftrightarrow &\mathrm{cr}^{\mathrm{rot}_N^{-1} \cdot D}(\mathrm{rot}_N^{-1} \times \mathrm{rot}_N^{-1}(a), \mathrm{rot}_N^{-1} \times \mathrm{rot}_N^{-1}(b)),
\end{aligned}
$$

wobei $(*)$ wegen Bemerkung 5.1.7 und, da G_N auf $[N]^2$ operiert, gilt.
Also gilt für $g' \in \{\mathrm{id}, \mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_N, \tau'_N, \mathrm{rot}_N, \mathrm{r}_\sigma^{-1}, \mathrm{c}_\sigma^{-1}, \tau_N^{-1}, \tau_N'^{-1}, \mathrm{rot}_N^{-1}\}$:

$$\mathrm{cr}^D(a,b) \Leftrightarrow \mathrm{cr}^{g' \cdot D}(g' \times g'(a), g' \times g'(b)).$$

Da für $g'_1, g'_2 \in B := \{\mathrm{id}, \mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_N, \tau'_N, \mathrm{rot}_N, \mathrm{r}_\sigma^{-1}, \mathrm{c}_\sigma^{-1}, \tau_N^{-1}, \tau_N'^{-1}, \mathrm{rot}_N^{-1}\}$ gilt:

$$\begin{aligned}\mathrm{cr}^D(a,b) &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{g'_2 \cdot D}(g'_2 \times g'_2(a), g'_2 \times g'_2(b)),\\ &\Leftrightarrow \mathrm{cr}^{g'_1(g'_2 \cdot D)}(g'_1 \times g'_1((g'_2 \times g'_2(a))), g'_1 \times g'_1((g'_2 \times g'_2(b)))),\\ &\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \mathrm{cr}^{(g'_1 g'_2) \cdot D}((g'_1 g'_2) \times (g'_1 g'_2)(a), (g'_1 g'_2) \times (g'_1 g'_2)(b)),\end{aligned}$$

wobei $(*)$ wegen Bemerkung 5.1.7 und, da G_N auf $[N]^2$ operiert, gilt. Induktiv folgt für $n \in \mathbb{N}^*, g'_1, \ldots, g'_n \in B$:

$$\mathrm{cr}^D(a,b) \Leftrightarrow \mathrm{cr}^{(g'_1 \cdot \ldots \cdot g'_n) \cdot D}((g'_1 \cdot \ldots \cdot g'_n) \times (g'_1 \cdot \ldots \cdot g'_n)(a), (g'_1 \cdot \ldots \cdot g'_n) \times (g'_1 \cdot \ldots \cdot g'_n)(b)),$$

wobei Bemerkung 5.1.7 und, dass G_N auf $[N]^2$ operiert, n-fach angewandt wurde,. Da für jedes $g \in G_N$ ein $n \in \mathbb{N}^*$ und $g'_1, \ldots, g'_n \in B$ existieren mit

$$g = g'_1 \cdot \ldots \cdot g'_2$$

folgt damit die Aussage. ■

Proposition 5.6.4: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D \in \mathcal{D}(N,d)$ und $g \in G_N$. Für eine Teilmenge $W \subset [N]^2_\times$ gilt:*

$$W \text{ ist NK-Wurzel auf } D \Leftrightarrow g \times g(D) \text{ ist NK-Wurzel auf } g \cdot D.$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned}&\{W' \mid W' \subset \mathcal{NK}(g \cdot D) \text{ ist NK-Wurzel auf } g \cdot D\}\\ =&\{g \times g(W) \mid W \subset \mathcal{NK}(D) \text{ ist NK-Wurzel auf } D\}.\end{aligned}$$

Beweis: Angenommen, W sei eine NK-Wurzel auf D. Seien $a, b \in W$. Dann gilt nach Lemma 5.6.1 $g \times g(a), g \times g(b) \in \mathcal{NK}(g \cdot H)$. Sei W' die NK-Wurzel von $g \times g(a)$ auf $g \cdot D$. Im Fall $a = b$ gilt dann trivialerweise $g \times g(b) \in W'$. Angenommen also, $a \neq b$. Dann existieren ein $n \in \mathbb{N}^*$ und $a_0, \ldots, a_n \in \mathcal{NK}(H)$ mit

$$a_0 = a, a_n = b, \mathrm{cr}^D(a_i, a_{i-1}) \text{ für } i \in [n].$$

Nach Lemma 5.6.1 gilt dann $g \times g(a_i) \in \mathcal{NK}(g \cdot D)$ für $i \in \{0, \ldots, n\}$ und nach Lemma 5.6.3 gilt $\mathrm{cr}^{g \cdot D}(g \times g(a_i), g \times g(a_{i-1}))$ für $i \in [n]$. Also gilt $g \times g(a_n) = g \times g(b) \in W'$. Somit folgt:

$$g \times g(W) \subset W'.$$

Sei nun andererseits $c \in W'$. Im Fall $c = g \times g(a)$ gilt klarerweise $c \in \{g \times g(a') | a' \in W\}$. Angenommen nun, es gelte $c \neq g \times g(a)$. Dann existieren ein $m \in \mathbb{N}^*$ und $c_0, \ldots, c_m \in \mathcal{NK}(g \cdot D)$ mit

$$c_0 = g \times g(a), c_m = c \text{ und } \mathrm{cr}^{g \cdot D}(c_i, c_{i-1}) \text{ für } i \in [m].$$

Nach Bemerkung 5.2.2 existiert dann zu $i \in \{0, \ldots, m\}$ ein $b_i \in \mathcal{NK}(D)$ mit $g \times g(b_i) = c_i$, und nach Lemma 5.3.3 gilt $\mathrm{cr}^D(b_i, b_{i-1})$ für $i \in [m]$. Es gilt $b_0 = g^{-1} \times g^{-1}(g \times g(a)) = a$ und $b_m = g^{-1} \times g^{-1}(c)$.

Also gilt $g^{-1} \times g^{-1}(c) \in W$, und damit $c \in g \times g(W)$. Also gilt

$$W' \subset g \times g(W),$$

und damit

$$g \times g(W) = W'.$$

Also ist $g \times g(W)$ eine NK-Wurzel auf $g \cdot D$. Sei nun $W \subset [N]^2_\times$ sodass $\tilde{W} := g \times g(W)$ eine NK-Wurzel auf $g \cdot D$ ist. Nach dem ersten Teil des Beweises und Bemerkung 5.1.3 ist dann $W = g^{-1} \times g^{-1}(\tilde{W}) \subset \mathcal{NK}(D)$ eine NK-Wurzel auf $g^{-1} \cdot (g \cdot D)$. Die zweite Aussage folgt nach Lemma 5.6.1 direkt aus der Bijektivität von $g \times g : \mathcal{NK}(D) \to \mathcal{NK}(g \cdot D)$. ■

Lemma 5.6.5: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D \in \mathcal{D}(N,d)$ und $g \in G_N$. Dann gilt:*

$$W^D(n) = W^{g \cdot D}(n) \textit{ für alle } n \in \mathbb{N}^*.$$

Beweis: Nach Proposition 5.6.4 bildet $g \times g$ die Menge der NK-Wurzeln von D bijektiv auf die Menge der NK-Wurzeln auf $g \cdot D$ ab. Da $g \times g$ nach Lemma 5.6.1 $\mathcal{NK}(D)$ bijektiv auf $\mathcal{NK}(g \cdot D)$ abbildet, gilt für eine NK-Wurzel $W \subset \mathcal{NK}(D)$:

$$|W| = |g \times g(W)|.$$

Somit folgt die Aussage. ■

5.7 Bestimmung von NK-Wurzeln durch Adjazenzmatrizen von $\mathcal{NK}(D)$

Man kann für ein Dimensionssudoku $D \in \mathcal{D}(N,d)$ die Indexmenge $[N]^2$ als Ecken eines Graphen mit Kantenmenge $\mathcal{NK}(D)$ auffassen. Analoges gilt für $[N]^2$ und eine NK-Wurzel W. In dieser Subsektion wird gezeigt, wie man die NK-Wurzeln von D dann anhand der Adjazenzmatrix des Graphen $([N]^2, \mathcal{NK}(D))$ bestimmt. Die Ergebnisse dieser Subsektion lassen sich völlig analog auch auf den Fall von Hilbertsudokus übertragen.

Definition 5.7.1: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D \in \mathcal{D}(N,d), \iota : [N]^2 \to [N^2]$ eine Bijektion. Wir definieren $A_D^\iota := (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}(\{0,1\}, N^2)$ mit

$$a_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } \{\iota^{-1}(i), \iota^{-1}(j)\} \in \mathcal{NK}(D), \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und nennen A_D^ι die *ι-Adjazenzmatrix* von $\mathcal{NK}(D)$.

Bemerkung 5.7.2: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D \in \mathcal{D}(N,d), \iota : [N]^2 \to [N^2]$ eine Bijektion, $A_D^\iota := (a_{ij})$ die ι-Adjazenzmatrix von D. Für $i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N]$ mit $l_1 \neq l_2, a := \{(i_0,j_0),(k_0,l_1)\}, b := \{(i_0,j_0),(k_0,l_2)\} \in [N]^2_\times$ gilt dann nach Bemerkung 5.5.9:

$$\begin{aligned}
&\{(i_0,j_0),(k_0,l_1)\}, \{(i_0,j_0),(k_0,l_2)\} \in \mathcal{NK}(D) \text{ sind zeilenabhängig auf } D \\
\Leftrightarrow &\{(i_0,j_0),(k_0,l_1)\}, \{(i_0,j_0),(k_0,l_2)\} \in \mathcal{NK}(D), \\
&\{(i_0,j_0),(k_0,n)\} \notin \mathcal{NK}(D) \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{l_1, l_2\} \\
\Leftrightarrow &a_{\iota(i_0,j_0),\iota(k_0,l_1)} = a_{\iota(i_0,j_0),\iota(k_0,l_2)} = a_{\iota(k_0,l_1),\iota(i_0,j_0)} = a_{\iota(k_0,l_2),\iota(i_0,j_0)} = 1, \\
&a_{\iota(i_0,j_0),\iota(k_0,n)} = a_{\iota(k_0,n),\iota(i_0,j_0)} = 0, \text{ für alle } n \in [N] \backslash \{l_1, l_2\}.
\end{aligned}$$

Analog gilt für $i_0, j_0, k_1, k_2, l_0 \in [N]$ mit $k_1 \neq k_2, \{(i_0, j_0), (k_1, l_0)\}, \{(i_0, j_0), (k_2, l_0)\} \in [N]^2_\times$:

$$\begin{aligned}
&\{(i_0, j_0), (k_1, l_0)\}, \{(i_0, j_0), (k_2, l_0)\} \text{ sind spaltenabhängig auf } D \\
\Leftrightarrow &a_{\iota(i_0,j_0),\iota(k_1,l_0)} = a_{\iota(i_0,j_0),\iota(k_2,l_0)} = a_{\iota(k_1,l_0),\iota(i_0,j_0)} = a_{\iota(k_2,l_0),\iota(i_0,j_0)} = 1, \\
&a_{\iota(i_0,j_0),\iota(m,l_0)} = a_{\iota(m,l_0),\iota(i_0,j_0)} = 0 \text{ für alle } m \in [N]\backslash\{k_1, k_2\}.
\end{aligned}$$

Beispiel 5.7.3: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D \in \mathcal{D}(N, d)$ und

$$\iota : [N]^2 \to [N^2], (i, j) \mapsto (i - 1) \cdot N + j.$$

Werden die $(i, j) \in [N]^2$ in kanonischer Weise in einer $N \times N$-Matrix aufgetragen, dann nummeriert ι die Einträge dieser Matrix zeilenweise von oben nach unten und pro Zeile eintragsweise von links nach rechts von 1 bis N^2 durch. Sei $A^\iota_D := (a_{ij})$ die ι-Adjazenzmatrix von D. In diesem Fall gilt dann nach Bemerkung 5.7.2 für $i_0, j_0, k_0, l_1, l_2 \in [N]$ mit $l_1 \neq l_2, \{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\} \in [N]^2_\times$:

$$\begin{aligned}
&\{(i_0, j_0), (k_0, l_1)\}, \{(i_0, j_0), (k_0, l_2)\} \in \mathcal{NK}(D) \text{ sind zeilenabhängig auf } D \\
\Leftrightarrow &a_{(i_0-1)N+j_0,(k_0-1)N+l_1} = a_{(i_0-1)N+j_0,(k_0-1)N+l_2} = a_{(k_0-1)N+l_1,(i_0-1)N+j_0} = a_{(k_0-1)N+l_2,(i_0-1)N+j_0} = 1, \\
&a_{(i_0-1)N+j_0,(k_0-1)N+n} = a_{(k_0-1)N+n,(i_0-1)N+j_0} = 0 \text{ für } n \in [N]\backslash\{l_1, l_2\},
\end{aligned}$$

und für $i_0, j_0, k_1, k_2, l_0 \in [N]$ mit $k_1 \neq k_2, \{(i_0, j_0), (k_1, l_0)\}, \{(i_0, j_0), (k_2, l_0)\} \in [N]^2_\times$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\{(i_0, j_0), (k_1, l_0)\}, \{(i_0, j_0), (k_2, l_0)\} \text{ sind spaltenabhängig auf } D \\
\Leftrightarrow &a_{(i_0-1)N+j_0,(k_1-1)N+l_0} = a_{(i_0-1)N+j,(k_2-1)N+l_0} = a_{(k_1-1)N+l_0,(i_0-1)N+j_0} = a_{(k_2-1)N+l_0,(i_0-1)N+j_0} = 1, \\
&a_{(i_0-1)N+j_0,(m-1)N+l_0} = a_{(m-1)N+l_0,(i-1)N+j_0} = 0 \text{ für alle } m \in [N]\backslash\{k_1, k_2\}.
\end{aligned}$$

Definition 5.7.4: Wir bezeichnen

$$\iota_N : [N]^2 \to [N^2], (i, j) \mapsto (i - 1)N + j$$

als *kanonisch gewählt*.

Proposition 5.7.5: *(s. [7]) Seien $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $b > 0$. Dann existieren eindeutig bestimmte Zahlen $q, r \in \mathbb{Z}$ mit*

$$a = qb + r, \ 0 \leq r < b.$$

Bemerkung 5.7.6: Seien a, b, q, r wie in Proposition 5.7.5. Ist $a \geq 0$, so ist auch $q \geq 0$. Wir nennen q den *Ganzzahlquotienten von a bezüglich b* und schreiben $q := \mathrm{gq}_b(a)$.

Das folgende Lemma zeigt eine Möglichkeit, für gegebene $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $D \in \mathcal{D}(N, d)$ die NK-Wurzeln von D graphisch anhand der ι-Adjazenzmatrix von D zu bestimmen, wenn ι kanonisch gewählt ist.

Lemma 5.7.7: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D \in \mathcal{D}(N, d), \iota : [N]^2 \mapsto [N^2], (i, j) \mapsto (i - 1)N + j, A^\iota_D := (a_{ij})$ die ι-Adjazenzmatrix von D. Unterteilt man A^ι_D in N^2 viele $N \times N$-Blöcke der Form*

$$\{(i_0 - 1)N + i, (j_0 - 1)N + j \mid i, j \in [N]\}, i_0, j_0 \in [N]$$

dann gilt für $(s_1, t_1), (s_2, t_2) \in [N^2]^2$*:*

$$\mathrm{cr}^D(\{\iota^{-1}(s_1), \iota^{-1}(t_1)\}, \{\iota^{-1}(s_2), \iota^{-1}(t_2)\})$$

genau dann, wenn einer der folgenden acht Fälle gilt:

1. $s_1 = s_2, t_1 \neq t_2, a_{s_1 t_1}, a_{s_2 t_2}$ *stehen im gleichen Block und sind im Durchschnitt ihrer Zeile mit diesem Block die einzigen Nicht-Null-Einträge,*

2. $t_1 = t_2, s_1 \neq s_2, a_{s_1 t_1}, a_{s_2 t_2}$ *stehen im gleichen Block und sind im Durchschnitt ihrer Spalte mit diesem Block die einzigen Nicht-Null-Einträge.*

3. $t_1 = s_2, s_1 \neq t_2, a_{t_1 s_1}, a_{s_2 t_2}$ *stehen im gleichen Block und sind im Durchschnitt ihrer Zeile mit diesem Block die einzigen Nicht-Null-Einträge,*

4. $s_1 = t_2, t_1 \neq s_2, a_{t_1 s_1}, a_{s_2 t_2}$ *stehen im gleichen Block und sind im Durchschnitt ihrer Spalte mit diesem Block die einzigen Nicht-Null-Einträge,*

5. $s_1 = s_2, t_1 \neq t_2, t_1 \equiv t_2 \mod N$*, und* $a_{s_1 t_1}, a_{s_2 t_2}$ *sind die einzigen Nicht-Null-Einträge in ihrer Zeile mit Spaltenindex kongruent* $t_1 \mod N$*,*

6. $t_1 = t_2, s_1 \neq s_2, s_1 \equiv s_2 \mod N$*, und* $a_{s_1 t_1}, a_{s_2 t_2}$ *sind die einzigen Nicht-Null-Einträge in ihrer Spalte mit Zeilenindex kongruent* $s_1 \mod N$*,*

7. $t_1 = s_2, s_1 \neq t_2, s_1 \equiv t_2 \mod N$*, und* $a_{t_1 s_1}, a_{s_2 t_2}$ *sind die einzigen Nicht-Null-Einträge in ihrer Zeile mit Spaltenindex kongruent* $s_1 \mod N$*,*

8. $s_1 = t_2, t_1 \neq s_2, t_1 \equiv s_2 \mod N$*, und* $a_{t_1 s_1}, a_{s_2 t_2}$ *sind die einzigen Nicht-Null-Einträge in ihrer Spalte mit Zeilenindex kongruent* $t_1 \mod N$*.*

Beweis: Für $s_1, t_1, s_2, t_2 \in [N^2]$ ist

$$\{\iota^{-1}(s_1), \iota^{-1}(t_1)\}, \{\iota^{-1}(s_2), \iota^{-1}(t_2)\} \text{ sind zeilenabhängig auf } D$$

nach Beispiel 5.7.3 wegen der Symmetrie von A_D^ι äquivalent dazu, dass einer der folgenden Fälle vorliegt:

1. $a_{s_1 t_1} = a_{s_2 t_2} = 1, \iota^{-1}(s_1) = \iota^{-1}(s_2)$, es existieren $k_0, l_1, l_2 \in [N]$ mit $l_1 \neq l_2$, $\iota^{-1}(t_1) = (k_0, l_1), \iota^{-1}(t_2) = (k_0, l_2), a_{s_1,(k_0-1)N+n} = 0$ für alle $n \in [N] \backslash \{l_1, l_2\}$,

2. $a_{s_1 t_1} = a_{s_2 t_2} = 1, \iota^{-1}(t_1) = \iota^{-1}(t_2)$, es existieren $k_0, l_1, l_2 \in [N]$ mit $l_1 \neq l_2$, $\iota^{-1}(s_1) = (k_0, l_1), \iota^{-1}(s_2) = (k_0, l_2), a_{(k_0-1)N+n,t_1} = 0$ für alle $n \in [N] \backslash \{l_1, l_2\}$,

3. $a_{s_1 t_1} = a_{s_2 t_2} = 1, \iota^{-1}(t_1) = \iota^{-1}(s_2)$, es existieren $k_0, l_1, l_2 \in [N]$ mit $l_1 \neq l_2$, $\iota^{-1}(s_1) = (k_0, l_1), \iota^{-1}(t_2) = (k_0, l_2), a_{(k_0-1)N+n,t_1} = 0$ für alle $n \in [N] \backslash \{l_1, l_2\}$,

4. $a_{s_1 t_1} = a_{s_2 t_2} = 1, \iota^{-1}(s_1) = \iota^{-1}(t_2)$, es existieren $k_0, l_1, l_2 \in [N]$ mit $l_1 \neq l_2$, $\iota^{-1}(t_1) = (k_0, l_1), \iota^{-1}(s_2) = (k_0, l_2), a_{s_1,(k_0-1)N+n} = 0$ für alle $n \in [N] \backslash \{l_1, l_2\}$.

Es gilt:

1. $\Leftrightarrow a_{s_1t_1} = a_{s_2t_2} = 1, s_1 = s_2, t_1 \neq t_2, \mathrm{gq}_N(t_1) = \mathrm{gq}_N(t_2),$
   $a_{s_1n} = 0$ für alle $n \in [N^2]\backslash\{t_1, t_2\}$ mit $\mathrm{gq}_N(n) = \mathrm{gq}_N(t_1)$
   $\Leftrightarrow s_1 = s_2, t_1 \neq t_2, a_{s_1t_1}, a_{s_2t_2}$ stehen im gleichen Block und sind im Durchschnitt ihrer Zeile mit diesem Block die einzigen Nicht-Null-Einträge.

Dabei gilt die erste Äquivalenz wegen Bemerkung 5.5.9. Analog folgt:

2. $\Leftrightarrow t_1 = t_2, s_1 \neq s_2, a_{s_1t_1}, a_{s_2t_2}$ stehen im gleichen Block und sind im Durchschnitt ihrer Spalte mit diesem Block die einzigen Nicht-Null-Einträge.

Außerdem gilt:

3. $\Leftrightarrow a_{s_1t_1} = a_{s_2t_2} = 1, t_1 = s_2, s_1 \neq t_2, \mathrm{gq}_N(s_1) = \mathrm{gq}_N(t_2),$
   $a_{mt_1} = 0$ für alle $m \in [N^2]\backslash\{s_1, t_2\}$ mit $\mathrm{gq}_N(m) = \mathrm{gq}_N(s_1)$
   $\Leftrightarrow t_1 = s_2, s_1 \neq t_2, a_{t_1s_1}, a_{s_2t_2}$ stehen im gleichen Block und sind im Durchschnitt ihrer Zeile mit diesem Block die einzigen Nicht-Null-Einträge.

Analog folgt:

4. $\Leftrightarrow s_1 = t_2, t_1 \neq s_2, a_{t_1s_1}, a_{s_2t_2}$ stehen im gleichen Block und sind im Durchschnitt ihrer Spalte mit diesem Block die einzigen Nicht-Null-Einträge.

Für $s_1, t_1, s_2, t_2 \in [N^2]$ ist

$$\{\iota^{-1}(s_1), \iota^{-1}(t_1)\}, \{\iota^{-1}(s_2), \iota^{-1}(t_2)\} \text{ sind spaltenabhängig auf } D$$

äquivalent dazu, dass einer der folgenden Fälle vorliegt:

(a) $a_{s_1t_1} = a_{s_2t_2} = 1, \iota^{-1}(s_1) = \iota^{-1}(s_2)$, es existieren $k_1, k_2, l_0 \in [N]$ mit $k_1 \neq k_2$,
$\iota^{-1}(t_1) = (k_1, l_0), \iota^{-1}(t_2) = (k_2, l_0), a_{s_1,(m-1)N+l_0} = 0$ für alle $m \in [N]\backslash\{k_1, k_2\}$,

(b) $a_{s_1t_1} = a_{s_2t_2} = 1, \iota^{-1}(t_1) = \iota^{-1}(t_2)$, es existieren $k_1, k_2, l_0 \in [N]$ mit $k_1 \neq k_2$,
$\iota^{-1}(s_1) = (k_1, l_0), \iota^{-1}(s_2) = (k_2, l_0), a_{(m-1)N+l_0,t_1} = 0$ für alle $m \in [N]\backslash\{k_1, k_2\}$,

(c) $a_{s_1t_1} = a_{s_2t_2} = 1, \iota^{-1}(t_1) = \iota^{-1}(s_2)$, es existieren $k_1, k_2, l_0 \in [N]$ mit $k_1 \neq k_2$,
$\iota^{-1}(s_1) = (k_1, l_0), \iota^{-1}(t_2) = (k_2, l_0), a_{(m-1)N+l_0,t_1} = 0$ für alle $m \in [N]\backslash\{k_1, k_2\}$,

(d) $a_{s_1t_1} = a_{s_2t_2} = 1, \iota^{-1}(s_1) = \iota^{-1}(t_2)$, es existieren $k_1, k_2, l_0 \in [N]$ mit $k_1 \neq k_2$,
$\iota^{-1}(t_1) = (k_1, l_0), \iota^{-1}(s_2) = (k_2, l_0), a_{s_1,(m-1)N+l_0} = 0$ für alle $m \in [N]\backslash\{k_1, k_2\}$.

Es gilt:

(a) $\Leftrightarrow a_{s_1t_1} = a_{s_2t_2} = 1, s_1 = s_2, t_1 \neq t_2, t_1 \equiv t_2 \mod N,$
   $a_{s_1n} = 0$ für alle $n \in [N^2]\backslash\{t_1, t_2\}$ mit $n \equiv t_1 \mod N$
   $\Leftrightarrow s_1 = s_2, t_1 \neq t_2, t_1 \equiv t_2 \mod N,$ und $a_{s_1t_1}, a_{s_2t_2}$ sind die einzigen Nicht-Null-Einträge in ihrer Zeile mit Spaltenindex kongruent $t_1 \mod N$.

Analog folgt:

(b) $\Leftrightarrow t_1 = t_2, s_1 \neq s_2, s_1 \equiv s_2 \mod N,$ und $a_{s_1t_1}, a_{s_2t_2}$ sind die einzigen Nicht-Null-Einträge in ihrer Spalte mit Zeilenindex kongruent $s_1 \mod N$.

Außerdem gilt:

(c) $\Leftrightarrow a_{s_1t_1} = a_{s_2t_2} = 1, t_1 = s_2, s_1 \neq t_2, s_1 \equiv t_2 \mod N,$
$a_{mt_1} = 0$ für alle $m \in [N^2] \backslash \{s_1, t_2\}$ mit $m \equiv s_1 \mod N$
$\Leftrightarrow t_1 = s_2, s_1 \neq t_2, s_1 \equiv t_2 \mod N,$ und $a_{t_1s_1}, a_{s_2t_2}$ sind die einzigen Nicht-Null-Einträge in ihrer Zeile mit Spaltenindex kongruent $s_1 \mod N$.

Dabei gilt die erste Äquivalenz wegen Bemerkung 5.5.9. Analog folgt:

(d) $\Leftrightarrow s_1 = t_2, t_1 \neq s_2, t_1 \equiv s_2 \mod N,$ und $a_{t_1s_1}, a_{s_2t_2}$ sind die einzigen Nicht-Null-Einträge in ihrer Spalte mit Zeilenindex kongruent $t_1 \mod N$. ■

Definition 5.7.8: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, D \in \mathcal{D}(N, d), \iota : [N]^2 \mapsto [N^2]$ eine Bijektion und $W \subset \mathcal{NK}(D)$ eine NK-Wurzel von D. Dann definieren wir $A_W^\iota := (a_{ij}^W) \in \mathrm{Mat}(\{0,1\}, N^2)$, wobei gilt:

$$a_{ij}^W := \begin{cases} 1, & \text{falls } (\iota^{-1}(i), \iota^{-1}(j)) \in W, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel 5.7.9: Sei

$$D_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(4, 3)$$

wie in Beispiel 4.5.6. Dann ist die Adjazenzmatrix von $([N]^2, \mathcal{NK}(D_6))$ gegeben durch:

$A^{\iota}_{D_6} :=$

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)
(1,1)						1					1	1			1	1
(1,2)					1						1	1			1	1
(1,3)																
(1,4)																
(2,1)		1									1	1			1	1
(2,2)	1										1	1			1	1
(2,3)																
(2,4)																
(3,1)																
(3,2)																
(3,3)	1	1			1	1										1
(3,4)	1	1			1	1									1	
(4,1)																
(4,2)																
(4,3)	1	1			1	1						1				
(4,4)	1	1			1	1					1					

,

wobei $\iota : [4]^2 \mapsto [16], (i,j) \mapsto 3 \cdot i + j$ kanonisch gewählt ist und die 0-Einträge von $A^{\iota}_{D_6}$ der Übersichtlichkeit wegen leergelassen sind. Mit Lemma 5.7.7 kann man an $A^{\iota}_{D_6}$ die NK-Wurzeln von D_6 ablesen. Diese sind:

$$W_1 := \{\{(1,1),(2,2)\}\} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, W_2 := \{\{(1,2),(2,1)\}\} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$W_3 := \{\{(3,3),(4,4)\}\} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, W_4 := \{\{(3,4),(4,3)\}\} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

und W_5 mit mit

$A^{\iota}_{W_5} =$

	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)
(1,1)											1	1			1	1
(1,2)											1	1			1	1
(1,3)																
(1,4)																
(2,1)											1	1			1	1
(2,2)											1	1			1	1
(2,3)																
(2,4)																
(3,1)																
(3,2)																
(3,3)	1	1			1	1										
(3,4)	1	1			1	1										
(4,1)																
(4,2)																
(4,3)	1	1			1	1										
(4,4)	1	1			1	1										

.

5.8 Nicht-kommutative Hilbertsudokus in $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^3, 4)$ und $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^4, 4)$

Im Folgenden soll gezeigt werden, welche Äquivalenzklassen in $\mathcal{D}(4,3)$ und $\mathcal{D}(4,4)$ nicht-kommutative Lösungen in $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^3, 4)$ bzw. $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^4, 4)$ besitzen und es werden jeweils Beispiele gegeben. Für die Klassen, die nur kommutative Lösungen zulassen, werden ebenfalls Beispiele von Lösungen gegeben. Außerdem werden einige der gesammelten Isotopieinvarianten auf den Fall der Äquivalenzklasse von $D_6 \in \mathcal{D}(4,3)$ (s.Proposition 6.2.14) angewant, um alle Isotopieklassen von nicht-kommutativen Lösungen in $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^3, 4)$ zu bestimmen und durch Repräsentanten auszuzeichnen. Die Angabe der Repräsentanten ist jedoch nicht exakt, in dem Sinne, dass Repräsentanten angegeben werden, für die nicht bestimmt wird, ob diese zueinander isotop sind oder nicht. Zunächst wird der Fall $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^3, 4)$ behandelt:

Lemma 5.8.1: *Seien $N, d \in \mathbb{N}^*, N > 3$ und $D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$ mit $d_{ii} = d$ für $i \in [N-3]$. Dann ist jede Lösung von $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ von D kommutativ.*

Beweis: Für ein $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ mit $\mathrm{Dim}(H) = D$ gilt $p_{ii} = \mathbb{1}$ für $i \in [N-3]$. Also gilt nach Lemma 3.1.12

$$\begin{aligned} p_{i_0 j} &= 0, \\ p_{i j_0} &= 0 \end{aligned}$$

für alle $i_0, j_0 \in [N-3], i \in [N] \backslash \{j_0\}, j \in [N] \backslash \{i_0\}$. Daher ist $H' := (p_{ij})_{N-2} \leq i, j \leq N$ ein Hilbertsudoku und es gilt:

$$H = \mathbb{1}_{N-3,d} \oplus H'.$$

Nach Lemma 3.7.6 ist H also kommutativ. ■

Lemma 5.8.2: *Sei $N \in \mathbb{N}^*, \mathscr{H}$ ein Hilbertraum und $H \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Existieren $i, k, l \in [N]$ mit $i \neq k$, so dass $p_{mj} = 0$ für alle $m \in [N] \backslash \{i, k\}$ gilt, dann gilt*

$$p_{ij}(\mathscr{H}) = p_{kj}(\mathscr{H})^{\perp},$$
$$p_{kj}(\mathscr{H}) = p_{ij}(\mathscr{H})^{\perp}.$$

Analog, existieren $i, j, l \in [N]$ mit $j \neq l$, so dass $p_{in} = 0$ für alle $n \in [N] \backslash \{j, l\}$ gilt, dann gilt auch

$$p_{ij}(\mathscr{H}) = p_{il}(\mathscr{H})^{\perp},$$
$$p_{il}(\mathscr{H}) = p_{ij}(\mathscr{H})^{\perp}.$$

Beweis: Wir beweisen nur die erste Aussage, da die zweite völlig analog folgt. Nach Proposition 2.3.8 und Bemerkung 3.1.2 gilt $p_{ij}(\mathscr{H}) \perp p_{kj}(\mathscr{H})$. Daraus folgt insbesondere $p_{ij}(\mathscr{H}) \cap p_{kj}(\mathscr{H}) = 0$, denn für $y \in p_{ij}(\mathscr{H}) \cap p_{kj}(\mathscr{H})$ gilt:

$$\langle y, y \rangle = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Nach Gl. (5) gilt für ein $x \in \mathscr{H}$:

$$x = \mathbb{1}(x) = p_{ij}(x) + p_{kj}(x) \in p_{ij}(\mathscr{H}) + p_{kj}(\mathscr{H}).$$

Also gilt $p_{ij}(\mathscr{H}) \oplus p_{kj}(\mathscr{H}) = \mathscr{H}$ und aus Lemma 2.1.10 folgt die erste Aussage. ■

Im folgenden Beispiel zeigen wir, für welche Äquivalenzklassen von $\mathcal{D}(4,3)$ (s. Beispiel 4.5.6) nur kommutative Lösungen existieren. Außerdem wird eine Liste von Lösungen für

Beispiel 5.8.3 (Der Fall $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^3, 4)$): Sei für $i \in [12]$ $D_i \in \mathcal{D}(4,3)$ wie in Beispiel 4.5.6. Dann ist für $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}$ jede Lösung von D_i kommutativ. Für $i \in \{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$ besitzt D_i nicht-kommutative Lösungen.
Für $i \in [5]$ ist nämlich jede Lösung $H_i \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^3, 4)$ von D_i nach Lemma 5.8.1 kommutativ. Sei $H_9 := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^3, 4)$ eine Lösung von

$$D_9 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nach Bemerkung 4.2.10 kann angenommen werden, dass $p_{11}(\mathbb{C}^3) = \mathrm{Span}(e_1, e_2), p_{12}(\mathbb{C}^3) = \mathrm{Span}(e_3)$ gilt. mit Lemma 5.8.2 folgt dann sukzessiv:

$$p_{21}(\mathbb{C}^3) = \mathrm{Span}(e_3), p_{24}(\mathbb{C}^3) = \mathrm{Span}(e_1, e_2), p_{34}(\mathbb{C}^3) = \mathrm{Span}(e_3),$$
$$p_{33}(\mathbb{C}^3) = \mathrm{Span}(e_1, e_2), p_{43}(\mathbb{C}^3) = \mathrm{Span}(e_3), p_{42}(\mathbb{C}^3) = \mathrm{Span}(e_1, e_2).$$

Damit ist H_9 bestimmt und es gilt:

$$H_9 = \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & e_1, e_2 \\ 0 & 0 & e_1, e_2 & e_3 \\ 0 & e_1, e_2 & e_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

D_9 besitzt also nur kommutative Lösungen, die unter der Operation von $\mathcal{U}_3$ auf $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^3, 4)$ alle in einer Bahn liegen und insbesondere alle isotop sind.
Für $i \in [12]$ ist eine Lösung H_i von D_i gegeben (wobei für $i \in \{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$ H_i nicht-kommutativ ist) durch:

$H_1 := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \end{pmatrix}$	$H_2 := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1, e_2 & e_3 \\ 0 & 0 & e_3 & e_1, e_2 \end{pmatrix}$
$H_3 := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1, e_2 & e_3 & 0 \\ 0 & e_3 & e_1 & e_2 \\ 0 & 0 & e_2 & e_1, e_3 \end{pmatrix}$	$H_4 := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1, e_2 & 0 & e_3 \\ 0 & e_3 & e_1, e_2 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & e_1, e_2 \end{pmatrix}$
$H_5 := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & e_2 & e_3 & e_1 \\ 0 & e_3 & e_1 & e_2 \end{pmatrix}$	$H_6 := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_1, e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 + e_3, e_2 & e_1 - e_3 \\ 0 & 0 & e_1 - e_3 & e_1 + e_3, e_2 \end{pmatrix}$
$H_7 := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_2 & e_1 & 0 \\ 0 & e_1 & e_2 + e_3 & e_2 - e_3 \\ 0 & 0 & e_2 - e_3 & e_1, e_2 + e_3 \end{pmatrix}$	$H_8 := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & e_1, e_2 & 0 \\ 0 & e_1 + e_2 & e_3 & e_1 - e_2 \\ 0 & e_1 - e_2 & 0 & e_1 + e_2, e_3 \end{pmatrix}$
$H_9 := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & e_1, e_2 \\ 0 & 0 & e_1, e_2 & e_3 \\ 0 & e_1, e_2 & e_3 & 0 \end{pmatrix}$	$H_{10} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & e_1 + e_2 & e_1 - e_2 \\ 0 & e_1 + e_2 & e_1 - e_2, e_3 & 0 \\ 0 & e_1 - e_2 & 0 & e_1 + e_2, e_3 \end{pmatrix}$
$H_{11} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & e_1 + e_2 & e_1 - e_2 \\ 0 & e_1 + e_2 & e_1 - e_2 & e_3 \\ 0 & e_1 - e_2 & e_3 & e_1 + e_2 \end{pmatrix}$	$H_{12} := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & 0 \\ e_2 + e_3 & e_1 & 0 & e_2 - e_3 \\ e_2 - e_3 & 0 & e_1 & e_2 + e_3 \\ 0 & e_3 & e_2 & e_1 \end{pmatrix}$

Frage 5.8.4: Sei für $i \in [12]$ D_i wie in Beispiel 4.5.6. Was sind Repräsentanten für die kommutativen Lösungen von D_i für $i \in [12] \backslash \{9\}$. Was sind Repräsentanten für die nicht-kommutativen Lösungen von D_i für $i \in \{7, 8, 10, 11, 12\}$?

Definition 5.8.5: Für ein $\alpha \in \mathbb{C}^*$ definieren wir $\alpha' := \frac{-1}{\overline{\alpha}}$.

Bemerkung 5.8.6: Sei $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Dann gilt $(\alpha')' = \alpha$ und für $v, w \in \mathscr{H}$ mit $v \perp w$ und $\|v\| = \|w\|$ gilt:

$$\langle v + \alpha \cdot w, v + \alpha' \cdot w \rangle = 0.$$

Beispiel 5.8.7 (Der Fall $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^4, 4)$): Sei für $i \in [38]$ $D_i \in \mathcal{D}(4, 4)$ wie in Beispiel 4.5.8 Für $i \in I_k := \{1, 2, 10, 11, 12, 13, 16, 18, 20, 22, 23, 24, 25, 29, 30, 33, 34, 35, 37, 38\}$ besitzt D_i dann nur kommutative Lösungen. Für $i \in [38] \backslash I_k$ besitzt D_i nicht-kommutative Lösungen.
Denn sei $i \in I_{k,1} := \{10, 11, 12, 13, 29, 30, 34, 35, 38\} \subset I_k$ und $D_i := (d_{ij})$, dann existiert ein

$(i_0, j_0) \in [N]^2$ mit $d_{i_0 j_0} = 4$. Wähle

$$g_{i_0} := \begin{cases} \mathrm{r}_{(1,i_0)} \in G_4, & \text{falls } i_0 \neq 1, \\ \mathrm{id} \in G_4, & \text{falls } i_0 = 1, \end{cases}$$

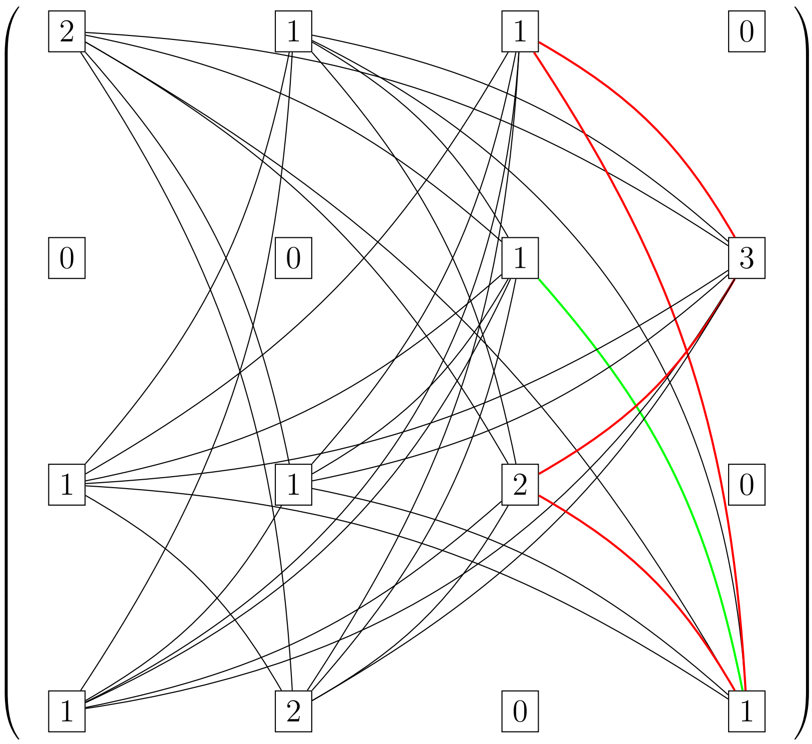
$$g_{j_0} := \begin{cases} \mathrm{c}_{(1,j_0)} \in G_4, & \text{falls } j_0 \neq 1, \\ \mathrm{id} \in G_4, & \text{falls } j_0 = 1. \end{cases}$$

Für $D_i' := (d_{ij}') := (g_{i_0} g_{j_0}) \cdot D_i$ gilt dann $d_{11}' = 4$, und nach Lemma 5.8.1 ist somit jede Lösung $H_i' \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^4, 4)$ von D_i' kommutativ. Da für eine Lösung $H_i \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^4, 4)$ von D_i auch $(g_{i_0} g_{j_0}) \cdot H_i$ eine Lösung von D_i' ist, ist nach Lemma 4.3.8 auch H_i kommutativ.
Sei nun $i \in I_{k,2} := I_k \backslash I_{k,1} = \{1, 2, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 33, 37\}$. Angenommen, es sei $i \in I_{k,2} \backslash \{18, 20, 23\}$ und $H_i \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^4, 4)$ sei eine Lösung von D_i. Wir können annehmen, dass die erste Zeile von H_i eine Form hat wie in Bemerkung 4.2.10. Dann ergibt sich durch ein sukzessives Anwenden von Lemma 3.1.11 (analog zum Fall D_9 in 5.8.3):

$H_1 := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & e_4 & e_1, e_2, e_3 \\ 0 & e_3, e_4 & e_1, e_2 & 0 \\ e_2, e_3, e_4 & e_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$H_2 := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & e_4 & e_1, e_2, e_3 \\ 0 & e_2, e_3, e_4 & e_2 & 0 \\ e_2, e_3, e_4 & 0 & e_1 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{16} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & e_1, e_2, e_4 \\ 0 & e_1, e_2, e_4 & 0 & e_3 \\ e_3, e_4 & 0 & e_1, e_2 & 0 \end{pmatrix}$	$H_{22} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1, e_2 & e_3, e_4 \\ 0 & e_1, e_2, e_4 & e_3 & 0 \\ e_3, e_4 & 0 & 0 & e_1, e_2 \end{pmatrix}$
$H_{24} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1, e_2, e_3 & e_4 \\ 0 & e_1, e_2, e_4 & 0 & e_3 \\ e_3, e_4 & 0 & 0 & e_1, e_2 \end{pmatrix}$	$H_{25} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1, e_2, e_3 & e_4 \\ e_4 & 0 & 0 & e_1, e_2, e_3 \\ e_3 & e_1, e_2, e_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{33} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3, e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3, e_4 & e_1, e_2 \\ 0 & e_1, e_2 & 0 & e_3.e_4 \\ e_3, e_4 & 0 & e_1, e_2 & 0 \end{pmatrix}$	$H_{37} := \begin{pmatrix} e_1, e_2, e_3 & e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & e_1, e_2, e_3 \\ 0 & e_1, e_2, e_3 & 0 & e_4 \\ e_4 & 0 & e_1, e_2, e_3 & 0 \end{pmatrix}$

Lösungen von $D_1, D_2, D_{16}, D_{22}, D_{24}, D_{25}$ bzw. D_{33} sind also nach 4.2.10 vermöge der Konjugation mit einem unitären Operator isotop zu $H_1, H_2, H_{16}, H_{22}, H_{24}, H_{25}$ bzw. H_{33}.
Für D_{18}, D_{20} und D_{23} funktioniert dieses Argument nicht, wir können jedoch NK-Wurzeln auf Dimensionssudokus nutzen, um die Kommutativität aller Lösungen zu zeigen. D_{18} besitzt drei NK-Wurzeln W_1, W_2 und W_3, die in der folgenden Darstellung von $\mathcal{NK}(D_{18})$ schwarz, rot und grün dargestellt sind:

$\mathcal{NK}(D_{18}) =$



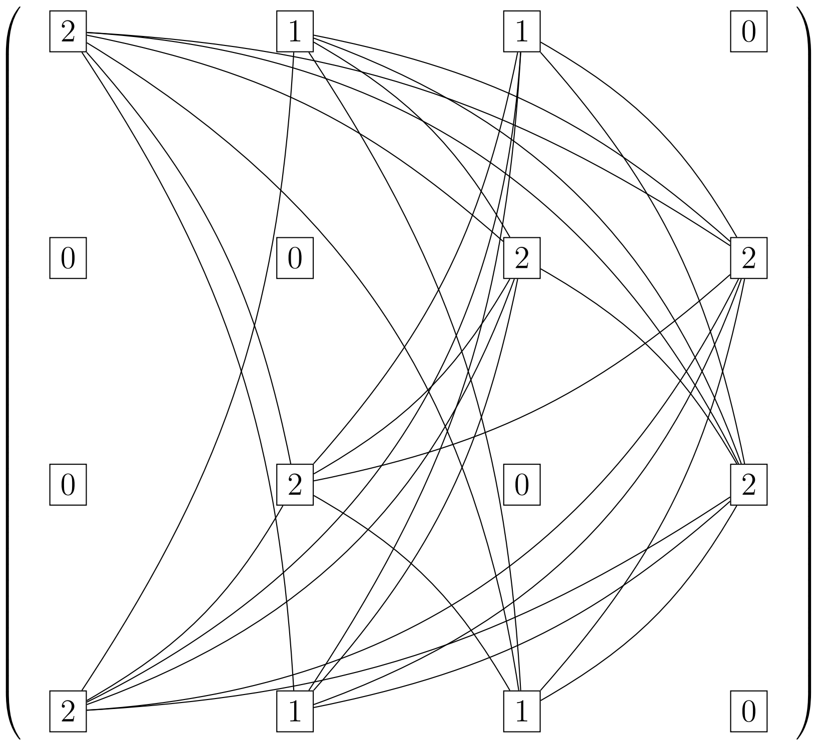
Angenommen, $H_{18} := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ wäre eine nicht-kommutative Lösung von D_{18}. Dann wäre nach Satz 5.5.10 W_1, W_2 oder W_3 eine NK-Wurzel von H_{18}. Wäre W_1 eine NK-Wurzel von H_{18}, würde gelten $p_{41}p_{24} \neq p_{24}p_{41}$. Daraus würde folgen

$$p_{41}p_{44} = p_{41}(\mathbb{1} - p_{24}) \neq (\mathbb{1} - p_{24})p_{41} = p_{44}p_{41},$$

was im Widerspruch zu $p_{41}p_{44} = p_{44}p_{41} = 0$ (nach 3.1.2) steht. Also ist W_1 keine NK-Wurzel von H_{18}. Die Annahme, dass W_2 eine NK-Wurzel von H_{18} wäre führt analog zu einem Widerspruch, da dann $p_{13}p_{23} \neq p_{23}p_{13}$ gelten müsste, und die Annahme, dass W_3 eine NK-Wurzel von H_{18} ebenfalls, da dann $p_{24}p_{44} \neq p_{44}p_{24}$ gelten müsste. D_{18} besitzt also keine nicht-kommutative Lösung. Eine kommutative Lösung von D_{18} ist beispielweise gegeben durch:

$$\tilde{H}_{18} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & e_1, e_3, e_4 \\ e_4 & e_2 & e_1, e_3 & 0 \\ e_3 & e_1, e_4 & 0 & e_2 \end{pmatrix}$$

D_{20} besitzt nur eine NK-Wurzel $W = \mathcal{NK}(D_{20})$:

$W =$ 

Angenommen, $H_{20} := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^3, 4)$ wäre eine nicht-kommutative Lösung von D_{20}. Dann wäre wegen Satz 5.5.10 W auch eine NK-Wurzel von H_{20}, und es würde gelten $p_{13}p_{24} \neq p_{24}p_{13}$. Dies ist jedoch nicht möglich, da dann gelten würde:

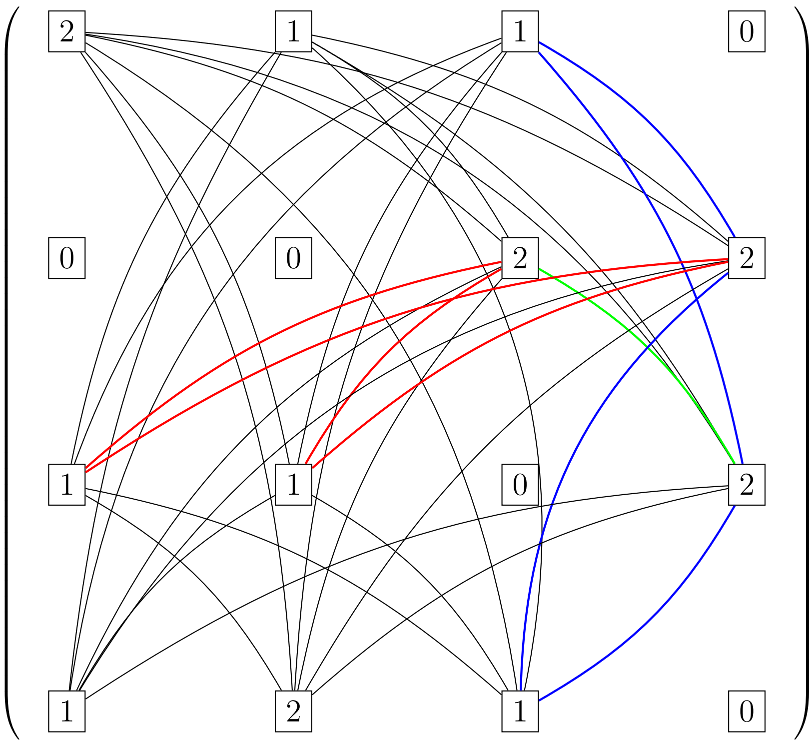
$$p_{13}p_{23} = p_{13}(\mathbb{1} - p_{24}) \neq (\mathbb{1} - p_{24})p_{13} = p_{23}p_{13},$$

im Widerspruch zu $p_{13}p_{23} = p_{23}p_{13} = 0$ (nach 3.1.2). Also besitzt D_{20} nur kommutative Lösungen, zum Beispiel:

$$\tilde{H}_{20} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1, e_3 & e_2, e_4 \\ 0 & e_2, e_4 & 0 & e_1, e_3 \\ e_3, e_4 & e_1 & e_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

D_{23} besitzt vier NK-Wurzeln W_1, W_2, W_3 und W_4, die in der folgenden Darstellung von $\mathcal{NK}(D_{23})$ schwarz, rot, blau, bzw. grün dargestellt sind:

$$\mathcal{NK}(D_{23}) =$$



Angenommen, $H_{23} := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^4, 4)$ wäre eine nicht-kommutative Lösung von D_{23}. Nach Satz 5.5.10 ist dann W_1, W_2, W_3 oder W_4 eine NK-Wurzel von D_{23}. Nach 4.2.10 können wir annehmen, dass $p_{11}(\mathbb{C}^4) = \text{Span}(e_1, e_2)$ und $p_{12}(\mathbb{C}^4) = \text{Span}(e_3), p_{13}(\mathbb{C}^4) = \text{Span}(e_4)$ gilt. Angenommen, W_1 wäre NK-Wurzel von H_{23}. Dann würde gelten $p_{12}p_{31} \neq p_{31}p_{12}$. Nach Lemma 3.1.11 gilt $p_{31}(\mathbb{C}^4) \subset \text{Span}(e_3, e_4)$ und nach Proposition 2.3.19 gilt $p_{31}(\mathbb{C}^4) \neq p_{12}(\mathbb{C}^4), p_{31}(\mathbb{C}^4) \not\perp p_{12}(\mathbb{C}^4)$. Also gilt $p_{31}(\mathbb{C}^4) = \text{Span}(e_3 + \delta \cdot e_4)$ für ein $\delta \in \mathbb{C}^*$. Dann gilt nach Lemma 3.1.11 $p_{41}(\mathbb{C}^4) = \text{Span}(e_3 + \delta' \cdot e_4)$ (s.Definition 5.8.5) und $p_{42}(\mathbb{C}^4) = \text{Span}(e_1, e_2)$. Weiterhin müsste wegen Lemma 3.1.11 gelten $p_{32}(\mathbb{C}^4) = \{0\}$, was im Widerspruch zu $(D_{23})_{32} = 1$ steht. Also ist W_1 keine NK-Wurzel von H_{23}. W_2 ist keine NK-Wurzel von H_{23}, da dann wegen $p_{31}p_{24} \neq p_{24}p_{31}$ analog wie im Fall von D_{20} gelten müsste $p_{31}p_{34} \neq p_{34}p_{31}$. Analog würde daraus, dass W_3 NK-Wurzel von H_{23} wäre folgen, dass $p_{43}p_{23} \neq p_{23}p_{43}$ gelten würde, und daraus, dass W_4 NK-Wurzel von H_{23} wäre, dass $p_{24}p_{34} \neq p_{34}p_{24}$ gelten würde. Dies sind beides Widersprüche, W_3 und W_4 sind also keine NK-Wurzeln von H_{23}. Also besitzt D_{23} keine nicht-kommutative Lösung. Eine kommutative Lösung von D_{23} ist beispielsweise gegeben durch:

$$\tilde{H}_{23} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1, e_2 & e_3, e_4 \\ e_3 & e_4 & 0 & e_1, e_2 \\ e_4 & e_1, e_2 & e_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Für $i \in [38]$ ist eine Lösung H_i von D_i gegeben (wobei für $i \in [38] \backslash I_k$ H_i nicht-kommutativ ist) durch:

$H_1 := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & e_4 & e_1, e_2, e_3 \\ 0 & e_3, e_4 & e_1, e_2 & 0 \\ e_2, e_3, e_4 & e_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_2 := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & e_4 & e_1, e_2, e_3 \\ 0 & e_2, e_3, e_4 & e_2 & 0 \\ e_2, e_3, e_4 & 0 & e_1 & 0 \end{pmatrix}$
$H_3 := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & e_4 & e_1, e_2, e_3 \\ e_3 + e_4 & e_3 - e_4 & e_1, e_2 & 0 \\ e_3 - e_4, e_2 & e_1, e_3 + e_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_4 := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & e_4 & e_1, e_2, e_3 \\ e_3 + e_4 & e_3 - e_4, e_1 & e_2 & 0 \\ e_3 - e_4, e_2 & e_3 + e_4 & e_1 & 0 \end{pmatrix}$
$H_5 := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & e_1 + e_2, e_4 & e_1 - e_2, e_3 \\ e_3 & e_4 & e_1 - e_2 & e_1 + e_2 \\ e_2, e_4 & e_1, e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_6 := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 0 & e_2, e_4 & e_1, e_3 \\ e_3 + e_4 & e_1, e_3 - e_4 & 0 & e_2 \\ e_2, e_3 - e_4 & e_3 + e_4 & e_1 & 0 \end{pmatrix}$
$H_7 := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & e_1 - e_3 & e_4 & e_2, e_1 + e_3 \\ e_4 & e_1 + e_3 & e_2 & e_1 - e_3 \\ e_2, e_3 & e_4 & e_1 & 0 \end{pmatrix}$
$H_8 := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & e_1 + e_4 & e_1 - e_4 & e_2, e_3 \\ e_3 & e_1 - e_4 & e_1 + e_4, e_2 & 0 \\ e_2, e_4 & e_3 & 0 & e_1 \end{pmatrix}$
$H_9 := \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ e_2 + e_4 & e_1 + e_3 & e_2 - e_4 & e_1 - e_3 \\ e_2 - e_4 & e_1 - e_3 & e_2 + e_4 & e_1 + e_3 \\ e_3 & e_4 & e_1 & e_2 \end{pmatrix}$
$H_{10} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \\ 0 & e_4 & e_1, e_2, e_3 & 0 \\ e_3, e_4 & e_1, e_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{11} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \\ 0 & e_2, e_4 & e_1, e_3 & 0 \\ e_3, e_4 & e_1 & e_2 & 0 \end{pmatrix}$

$H_{12} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \\ e_4 & 0 & e_1, e_2, e_3 & 0 \\ e_3 & e_1, e_2, e_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{13} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \\ e_4 & e_2 & e_1, e_3 & 0 \\ e_3 & e_1, e_4 & e_2 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{14} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 + e_3 & e_1 - e_3, e_2, e_4 \\ 0 & e_4 & e_1 - e_3, e_2 & e_1 + e_3 \\ e_3, e_4 & e_1, e_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{15} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 + e_2 & e_1 - e_2, e_3, e_4 \\ 0 & e_1 + e_2, e_4 & e_1 - e_2, e_3 & 0 \\ e_3, e_4 & e_1 - e_2 & 0 & e_1 + e_2 \end{pmatrix}$
$H_{16} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_3 & e_1, e_2, e_4 \\ 0 & e_1, e_2, e_4 & 0 & e_3 \\ e_3, e_4 & 0 & e_1, e_2 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{17} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 + e_3 & e_1 - e_3, e_2, e_4 \\ e_4 & 0 & e_1 - e_3, e_2 & e_1 + e_3 \\ e_3 & e_1, e_2, e_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{18} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_2 & e_1, e_3, e_4 \\ e_4 & e_2 & e_1, e_3 & 0 \\ e_3 & e_1, e_4 & 0 & e_2 \end{pmatrix}$
$H_{19} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 + e_3, e_2 & e_1 - e_3, e_4 \\ 0 & e_4 & e_1 - e_3 & e_1 + e_3, e_2 \\ e_3, e_4 & e_1, e_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{20} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1, e_3 & e_2, e_4 \\ 0 & e_2, e_4 & 0 & e_1, e_3 \\ e_3, e_4 & e_1 & e_2 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{21} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 + e_2, e_3 & e_1 - e_2, e_4 \\ 0 & e_1 + e_2, e_4 & e_1 - e_2 & e_3 \\ e_3, e_4 & e_1 - e_2 & 0 & e_1 + e_2 \end{pmatrix}$
$H_{22} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1, e_2 & e_3, e_4 \\ 0 & e_1, e_2, e_4 & e_3 & 0 \\ e_3, e_4 & 0 & 0 & e_1, e_2 \end{pmatrix}$

$\tilde{H}_{23} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1,e_2 & e_3,e_4 \\ e_3 & e_4 & 0 & e_1,e_2 \\ e_4 & e_1,e_2 & e_3 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{24} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1,e_2,e_3 & e_4 \\ 0 & e_1,e_2,e_4 & 0 & e_3 \\ e_3,e_4 & 0 & 0 & e_1,e_2 \end{pmatrix}$
$H_{25} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_1,e_2,e_3 & e_4 \\ e_4 & 0 & 0 & e_1,e_2,e_3 \\ e_3 & e_1,e_2,e_4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{26} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & e_4 & e_1+e_3 & e_2,e_1-e_3 \\ e_4 & 0 & e_1-e_3,e_2 & e_1+e_3 \\ e_3 & e_1,e_2 & 0 & e_4 \end{pmatrix}$
$H_{27} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & e_4 & e_2,e_1+e_3 & e_1-e_3 \\ e_4 & 0 & e_1-e_3 & e_2,e_1+e_3 \\ e_3 & e_1,e_2 & 0 & e_4 \end{pmatrix}$
$H_{28} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & e_4 & e_1,e_2,e_3 & 0 \\ e_3+e_4 & 0 & 0 & e_1,e_2,e_3-e_4 \\ e_3-e_4 & e_1,e_2 & 0 & e_3+e_4 \end{pmatrix}$
$H_{29} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ e_3,e_4 & e_1,e_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{30} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3,e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \\ 0 & e_1,e_2 & e_3,e_4 & 0 \\ e_3,e_4 & 0 & e_1,e_2 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{31} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3,e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1+e_3 & e_1-e_3,e_2,e_4 \\ 0 & 0 & e_1-e_3,e_2,e_4 & e_1+e_3 \\ e_3,e_4 & e_1,e_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{32} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3,e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1+e_3,e_2+e_4 & e_1-e_3,e_2-e_4 \\ 0 & 0 & e_1-e_3,e_2-e_4 & e_1+e_3,e_2+e_4 \\ e_3,e_4 & e_1,e_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$H_{33} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3,e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_3,e_4 & e_1,e_2 \\ 0 & e_1,e_2 & 0 & e_3.e_4 \\ e_3,e_4 & 0 & e_1,e_2 & 0 \end{pmatrix}$

$$H_{34} := \begin{pmatrix} e_1, e_2e_3 & e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ e_4 & e_1, e_2e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$H_{35} := \begin{pmatrix} e_1, e_2e_3 & e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \\ 0 & e_1, e_2, e_3 & e_4 & 0 \\ e_4 & 0 & e_1, e_2, e_3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$H_{36} := \begin{pmatrix} e_1, e_2, e_3 & e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 + e_4 & e_1 - e_4, e_2, e_3 \\ 0 & 0 & e_1 - e_4, e_2, e_3 & e_1 + e_4 \\ e_4 & e_1, e_2, e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$H_{37} := \begin{pmatrix} e_1, e_2, e_3 & e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_4 & e_1, e_2, e_3 \\ 0 & e_1, e_2, e_3 & 0 & e_4 \\ e_4 & 0 & e_1, e_2, e_3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$H_{38} := \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbb{1} \\ 0 & 0 & \mathbb{1} & 0 \\ 0 & \mathbb{1} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Frage 5.8.8: Sei für $i \in [38]$ D_i wie in Beispiel 4.5.8. Was sind Repräsentanten der Isotopieklassen nicht-kommutativer Lösungen von D_i für $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 17, 19, 21, 26, 27, 28, 31, 32, 36\}$.

Definition 5.8.9: Seien $d \in \mathbb{N}^*$ und $\sigma \in S_d$. Dann definieren wir $f_\sigma : \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}^d$ als die lineare Fortsetzung der Abbildung

$$\{e_1, \dots, e_d\} \to \{e_1, \dots, e_d\}, e_i \mapsto e_{\sigma(i)} \text{ für alle } i \in [d].$$

Bemerkung 5.8.10: Seien $d \in \mathbb{N}^*$ und $\sigma \in S_d$. Dann ist f_σ nach Lemma 2.2.13 ein unitärer Operator auf $\mathbb{C}^d$.

Bemerkung 5.8.11: Die Funktion

$$h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \frac{x}{1+x}$$

ist streng monoton wachsend und damit injektiv, da für $x \in \mathbb{R}_+$ gilt $h(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$, und da

$$\tilde{h} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \frac{1}{x}$$

streng monoton fallend ist.

Proposition 5.8.12: *Sei*

$$D_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

wie in Beispiel 4.5.6. Für jede Isotopieklassen der nicht-kommutativen Lösungen von D_6 existiert dann ein Repräsentant in $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_3$, wobei gilt:

$$\mathcal{H}_1 := \left\{ H_{1,\gamma} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_1, e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2, v & w \\ 0 & 0 & w & e_2, v \end{pmatrix} \middle| v := e_1 + \gamma \cdot e_3, w := e_1 + \gamma' \cdot e_3, \gamma \in \mathbb{R}_+^* \right\},$$

$$\mathcal{H}_3 := \left\{ H_{3,\beta,\gamma} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_1, e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x, y & z \\ 0 & 0 & z & x, y \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x := e_1 + \beta \cdot e_2, y := e_1 + \gamma \cdot e_3, \\ z := e_1 + \beta' \cdot e_2 + \gamma' \cdot e_3, \gamma \in \mathbb{C}^* \end{array} \right\}.$$

Die Elemente von $\mathcal{H}_1$ sind paarweise nicht isotop.

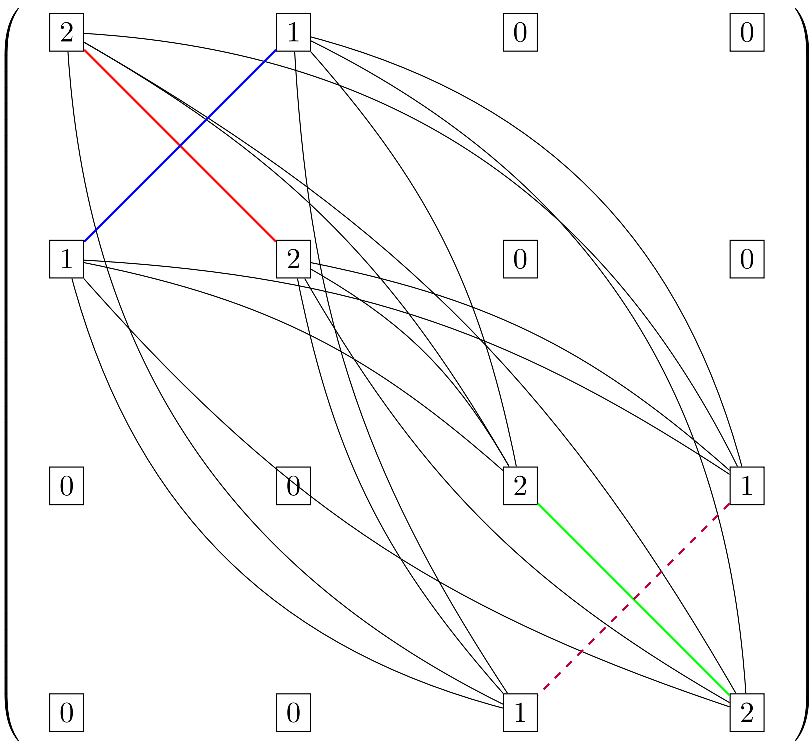
Beweis: Wir wollen die Isotopieklassen nicht-kommutativer Lösungen von

$$D_6 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathcal{NK}(D) = \{ & \{(1,1),(2,2)\}, \{(1,2),(2,1)\}, \{(3,3),(4,4)\}, \{(3,4),(4,3)\}, \{(1,1),(3,3)\}, \\ & \{(1,1),(3,4)\}, \{(1,1),(4,3)\}, \{(1,1),(4,4)\}, \{(2,1),(3,3)\}, \{(2,1),(3,4)\}, \\ & \{(2,1),(4,3)\}, \{(2,1),(4,4)\}, \{(1,2),(3,3)\}, \{(1,2),(3,4)\}, \{(1,2),(4,3)\}, \\ & \{(1,2),(4,4)\}, \{(2,2),(3,3)\}, \{(2,2),(3,4)\}, \{(2,2),(4,3)\}, \{(2,2),(4,4)\}\} \end{aligned}$$

$=$



D_6 besitzt fünf NK-Wurzeln $W_1, \dots, W_5$, die in obiger Darstellung von $\mathcal{NK}(D_6)$ jeweils rot, blau, grün, gestrichelt und schwarz dargestellt sind. Die NK-Wurzeln in W_1, W_2, W_3 und W_4 besitzen nach Lemma 5.5.15 keine Lösung. Bleibt also nur W_5 zu betrachten. Angenommen, $\tilde{H} := (\tilde{p}_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^3, 4)$ sei eine Lösung von W_5 und es gelte $\tilde{V}_{ij} := \tilde{p}_{ij}(\mathbb{C}^3)$. Nach Bemerkung 4.2.10 existiert dann ein $T \in \mathcal{U}_3$, sodass für $H := (p_{ij}) := T\tilde{H}T^*$ gilt:

$$p_{11}(\mathbb{C}^3) = \mathrm{Span}(e_1, e_2), p_{12}(\mathbb{C}^3) = \mathrm{Span}(e_3). \tag{18}$$

Nach Proposition 5.4.3 ist dann auch H eine Lösung von W_5. Sei $V_{ij} := p_{ij}(\mathbb{C}^3)$ für $(i,j) \in [4]^2$. Nach Lemma 5.8.2 gilt dann $V_{21} = \mathrm{Span}(e_3), V_{22} = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$. Wegen $W_5 \subset \mathcal{NK}(H)$ gilt $p_{12}p_{34} \neq p_{34}p_{12}$. Wegen $\mathrm{rang}(p_{12}) = \mathrm{rang}(p_{34}) = 1$ gilt nach Proposition 2.3.19:

$$V_{12} \neq V_{34} \text{ und } V_{12} \not\perp V_{34}.$$

Deshalb gilt für w mit $V_{34} = \mathrm{Span}(w)$ einer der folgenden Fälle:

1. $w = e_1 + \gamma \cdot e_3$, mit $\gamma \in \mathbb{C}^*$,
2. $w = e_2 + \gamma \cdot e_3$, mit $\gamma \in \mathbb{C}^*$,
3. $w = e_1 + \beta \cdot e_2 + \gamma \cdot e_3$, mit $\beta, \gamma \in \mathbb{C}^*$.

Nach Lemma 5.8.2 und Bemerkung 5.8.6 gilt

- in Fall 1. $V_{34} = V_{43} = \mathrm{Span}(e_1 + \gamma \cdot e_3), V_{33} = V_{44} = \mathrm{Span}(e_1 + \gamma' \cdot e_3, e_2)$,
- in Fall 2. $V_{34} = V_{43} = \mathrm{Span}(e_2 + \gamma \cdot e_3), V_{33} = V_{44} = \mathrm{Span}(e_1, e_2 + \gamma' \cdot e_3)$,
- in Fall 3. $V_{34} = V_{43} = \mathrm{Span}(e_1 + \beta \cdot e_2 + \gamma \cdot e_3), V_{33} = V_{44} = \mathrm{Span}(e_1 + \beta' \cdot e_2, e_1 + \gamma' \cdot e_3)$.

Somit ist $\mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2 \cup \mathcal{H}_3$ die Menge aller Lösungen H von W_5, wobei gilt:

$$\mathcal{H}_1 := \left\{ H_{1,\gamma} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_1, e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2, v & w \\ 0 & 0 & w & e_2, v \end{pmatrix} \middle| v := e_1 + \gamma \cdot e_3, w := e_1 + \gamma' \cdot e_3, \gamma \in \mathbb{C}^* \right\},$$

$$\mathcal{H}_2 := \left\{ H_{2,\gamma} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_1, e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1, v & w \\ 0 & 0 & w & e_1, v \end{pmatrix} \middle| v := e_2 + \gamma \cdot e_3, w := e_2 + \gamma' \cdot e_3, \gamma \in \mathbb{C}^* \right\},$$

$$\mathcal{H}_3 := \left\{ H_{3,\beta,\gamma} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_1, e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x, y & z \\ 0 & 0 & z & x, y \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} x := e_1 + \beta \cdot e_2, y := e_1 + \gamma \cdot e_3, \\ z := e_1 + \beta' \cdot e_2 + \gamma' \cdot e_3, \gamma \in \mathbb{C}^* \end{matrix} \right\}.$$

Sei $\gamma \in \mathbb{C}^*$. Dann gilt nach Korollar 2.3.13:

$$f_{(12)} H_{1,\gamma} f_{(12)}^* = H_{2,\gamma},$$
$$f_{(12)} H_{2,\gamma} f_{(12)}^* = H_{1,\gamma}.$$

Also sind die Isotopieklassen der Elemente von $\mathcal{H}_1$ dieselben wie die der Elemente von $\mathcal{H}_2$. Wir wollen nun paarweise nicht-isotope Repräsentanten für die Isotopieklassen der Elemente von $\mathcal{H}_1$ bestimmen.

Sei $\gamma \in \mathbb{C}^*$ und $w := e_1 + \gamma' \cdot e_3$. Dann gilt $\langle e_3, w\rangle = \gamma'$ und $\|w\| = 1 + |\gamma'|^2$. Also gilt nach Lemma 4.3.7:

$$|\text{ang}|_{H_{1,\gamma}}(1,1) = \{\{1\}, \{\frac{|\gamma'|}{1+|\gamma'|^2}\}\}.$$

Außerdem gilt:

$$|\text{ang}|_{H_{1,\gamma}}(2,1) = \{|\text{ang}|(p_{e_1,e_2}, p_w), |\text{ang}|(p_{e_2,v}, p_{e_3})\}, \text{ mit } v = e_1 + \gamma \cdot e_3, \gamma \in \mathbb{C}^*.$$

Sei $\tilde{v} \in p_{e_1,e_2}(\mathscr{H})$ mit $\|\tilde{v}\| = 1$. Dann existieren $a, b \in \mathbb{C}$ mit $|a|^2 + |b|^2 = 1$ und $\tilde{v} = a \cdot e_1 + b \cdot e_2$ und es gilt:

$$\frac{1}{\|w\|}|\langle \tilde{v}, w\rangle| = \frac{1}{\|w\|}|\bar{a}\langle e_1, e_1\rangle| = \frac{|a|}{1+|\gamma'|^2}.$$

Mit Lemma 4.3.7 folgt somit:

$$\max|\text{ang}|(p_{e_1,e_2}, p_v) = \max\{\frac{|a|}{1+|\gamma'|^2} \mid |a| \in [0,1]\} = \frac{1}{1+|\gamma'|^2}.$$

Sei nun $\tilde{w} \in p_{e_2,v}(\mathscr{H})$ mit $\|\tilde{w}\| = 1$. Dann existieren $c, d \in \mathbb{C}$ mit $|c|^2 + |d|^2 = 1$ und $\tilde{w} = c \cdot e_2 + d \cdot \frac{v}{\|v\|}$. Außerdem gilt $\langle v, e_3\rangle = \gamma$ und $\|v\| = 1 + |\gamma|^2$. Damit gilt:

$$|\langle w, e_3\rangle| = |\frac{\bar{d}}{\|e_5\|} \cdot \langle v, e_3\rangle| = \frac{|d| \cdot |\gamma|}{1+|\gamma|^2}.$$

Mit Lemma 4.3.7 folgt

$$\max|\text{ang}|(p_{e_2,e_5}, p_{e_3}) = \max\{\frac{|d| \cdot |\gamma|}{1+|\gamma|^2} \mid |d| \in [0,1]\} = \frac{|\gamma|}{1+|\gamma|^2}.$$

Angenommen nun, es existieren $\gamma, \tilde{\gamma} \in \mathbb{C}^*$, sodass $H_{1,\gamma}$ und $H_{1,\tilde{\gamma}}$ isotop sind. Dann muss nach Lemma 4.3.6 also gelten:

$$\{\{1\}, \{\frac{|\gamma'|}{1+|\gamma'|^2}\}\} = |\text{ang}|_{H_{1,\gamma}}(1,1) = |\text{ang}|_{H_{1,\tilde{\gamma}}}(1,1) = \{\{1\}, \{\frac{|\tilde{\gamma}'|}{1+|\tilde{\gamma}'|^2}\}\}, \tag{19}$$

$$\left\{\frac{1}{1+|\gamma'|^2}, \frac{|\gamma|}{1+|\gamma|^2}\right\} = \max|\text{ang}|_{H_{1,\gamma}}(2,1) = \max|\text{ang}|_{H_{1,\tilde{\gamma}}}(2,1) = \left\{\frac{1}{1+|\tilde{\gamma}'|^2}, \frac{|\tilde{\gamma}|}{1+|\tilde{\gamma}|^2}\right\}. \tag{20}$$

Aus Gl. (19) folgt:

$$\frac{|\tilde{\gamma'}|}{1+|\tilde{\gamma'}|^2} = \frac{|\gamma'|}{1+|\gamma'|^2}. \tag{21}$$

Aus Gl. (20) folgt entweder

1.

$$\frac{1}{1+|\tilde{\gamma'}|^2} = \frac{|\gamma|}{1+|\gamma|^2}, \tag{22}$$

$$\frac{1}{1+|\gamma'|^2} = \frac{|\tilde{\gamma}|}{1+|\tilde{\gamma}|^2}, \tag{23}$$

oder

2.

$$\frac{1}{1+|\tilde{\gamma'}|^2} = \frac{1}{1+|\gamma'|^2}, \tag{24}$$

$$\frac{|\tilde{\gamma}|}{1+|\tilde{\gamma}|^2} = \frac{|\gamma|}{1+|\gamma|^2}. \tag{25}$$

In Fall 1. folgt durch Einsetzen von Gl. (22) und Gl. (23) in Gl. (21):

$$\begin{aligned}
&\frac{|\gamma'||\tilde{\gamma}|}{1+|\tilde{\gamma}|^2} = \frac{|\tilde{\gamma}'||\gamma|}{1+|\gamma|^2}\\
\Leftrightarrow &\frac{1}{|\gamma|}\frac{|\tilde{\gamma}|}{1+|\tilde{\gamma}|^2} = \frac{1}{|\tilde{\gamma}|}\frac{|\gamma|}{1+|\gamma|^2}\\
\Leftrightarrow &\frac{|\gamma|^2}{1+|\gamma|^2} = \frac{|\tilde{\gamma}|^2}{1+|\tilde{\gamma}|^2}.
\end{aligned}$$

Nach Bemerkung 5.8.11 gilt dann $|\gamma|^2 = |\tilde{\gamma}|^2$, und wegen $|\gamma|, |\tilde{\gamma}| \in \mathbb{R}_+$ auch $|\gamma| = |\tilde{\gamma}|$.
In Fall 2. erhält man durch Einsetzen von Gl. (24) in Gl. (21)

$$\begin{aligned}
&\frac{|\tilde{\gamma}'|}{1+|\gamma'|^2} = \frac{|\gamma'|}{1+|\gamma'|^2}\\
\Leftrightarrow &|\tilde{\gamma}'| = |\gamma'|\\
\Leftrightarrow &|\tilde{\gamma}| = |\gamma|.
\end{aligned}$$

Also gilt

$$H_{1,\gamma} \simeq H_{1,\tilde{\gamma}} \Rightarrow |\gamma| = |\tilde{\gamma}|.$$

Seien andererseits $\gamma, \tilde{\gamma} \in \mathbb{C}^*$ mit $|\gamma| = |\tilde{\gamma}|$, dann bildet die lineare Fortsetzung T von

$$e_1 \mapsto e_1, e_2 \mapsto e_2, e_3 \mapsto \frac{\tilde{\gamma}}{\gamma} \cdot e_3, e_4 \mapsto e_4$$

nach Lemma 2.2.13 einen unitären Operator, der nach Korollar 2.3.13 $TH_{1,\gamma}T^* = H_{1,\gamma}$ erfüllt. Also gilt für $\gamma, \tilde{\gamma} \in \mathbb{C}^*$:

$$H_{1,\gamma} \simeq H_{1,\tilde{\gamma}} \Leftrightarrow |\gamma| = |\tilde{\gamma}|. \qquad \blacksquare$$

Frage 5.8.13: Seien

$$\mathcal{H}_1 := \left\{ H_{1,\gamma} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3 & 0 & 0\\ e_3 & e_1,e_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e_2,e_5 & e_6\\ 0 & 0 & e_6 & e_2,e_5 \end{pmatrix} \middle| e_5 := e_1 + \gamma\cdot e_3, e_6 := e_1 + \gamma'\cdot e_3, \gamma \in \mathbb{R}_+^* \right\},$$

$$\mathcal{H}_3 := \left\{ H_{3,\beta,\gamma} := \begin{pmatrix} e_1,e_2 & e_3 & 0 & 0\\ e_3 & e_1,e_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & e_5,e_6 & e_7\\ 0 & 0 & e_7 & e_5,e_6 \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} e_5 := e_1 + \beta\cdot e_2, e_6 := e_1 + \gamma\cdot e_3,\\ e_7 := e_1 + \beta'\cdot e_2 + \gamma'\cdot e_3, \gamma \in \mathbb{C}^* \end{array} \right\}.$$

Sind Elemente von $\mathcal{H}_1$ und von $\mathcal{H}_3$ paarweise nicht-isotop? Was sind Isotopiekriterien für die Elemente von $\mathcal{H}_3$.

Bemerkung 5.8.14: Will man in in Proposition 5.8.12 eine Unterscheidung der Isotopieklassen in $\mathcal{H}_3$ auf analoge Weise durchführen wie für $\mathcal{H}_1$, so führt dies auf komplizierte Polynomgleichungen, die hier nicht aufgeführt werden.

6 Rechteckstransformationen

In der folgenden Sektion führen wir Rechteckstransformationen ein. Diese lassen sich auf Dimensionssudokus (6.1) und auf Hilbertsudokus (6.2) definieren. Wir zeigen, dass sich zwei unterschiedliche (N, d)-Dimensionssudokus immer durch eine Folge von Rechteckstransformationen ineinander überführen lassen (s.6.1.10), und dass sich zwei unterschiedliche gewöhnliche N-Hilbertsudokus auf $\mathbb{C}^d$ immer durch eine Folge von Rechteckstransformationen ineinander überführen lassen. Außerdem zeigen wir, dass unter Vorraussetzung der Gültigkeit von Vermutung 6.2.16 jedes (N, d)-Dimensionssudoku eine Lösung besitzt, die ein gewöhnliches Hilbertsudoku ist (s.6.2.18). Im Folgenden seien immer $N, d \in \mathbb{N}^*$.

6.1 Rechteckstransformationen auf Dimensionssudokus

Definition 6.1.1: Seien $D = (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$ und $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$ und $d_{i_0j_0} \neq 0, d_{k_0l_0} \neq 0$. Dann definieren wir $R_{(i_0j_0)(k_0l_0)}(D) := (d'_{ij}) \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{C})$, mit

$$\begin{aligned}
d'_{mn} &:= d_{mn} \text{ falls } (m, n) \notin \{(i_0, j_0), (k_0, l_0), (k_0, j_0), (i_0, l_0)\},\\
d'_{i_0j_0} &:= d_{i_0j_0} - 1,\\
d'_{k_0l_0} &:= d_{k_0l_0} - 1,\\
d'_{i_0l_0} &:= d_{i_0l_0} + 1,\\
d'_{k_0j_0} &:= d_{k_0j_0} + 1.
\end{aligned}$$

Lemma 6.1.2: *Seien D, D' wie in Definition 6.1.1. Dann gilt $D' \in \mathcal{D}(N, d)$.*

Beweis: Für $\alpha \in [N] \backslash \{i_0, k_0\}, \beta \in [N] \backslash \{j_0, l_0\}$ gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} d'_{\alpha n} &= \sum_{n=1}^{N} d_{\alpha n} = d,\\
\sum_{m=1}^{N} d'_{m\beta} &= \sum_{m=1}^{N} d_{m\beta} = d.
\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} d'_{i_0n} &= (\sum_{n=1, n\notin\{j_0,l_0\}}^{N} d_{i_0n}) + (d_{i_0j_0} - 1) + (d_{i_0l_0} + 1) = d,\\
\sum_{n=1}^{N} d'_{k_0n} &= (\sum_{n=1, n\notin\{j_0,l_0\}}^{N} d_{k_0n}) + (d_{i_0j_0} + 1) + (d_{i_0l_0} - 1) = d,\\
\sum_{m=1}^{N} d'_{mj_0} &= (\sum_{m=1, m\notin\{i_0,k_0\}}^{N} d_{mj_0}) + (d_{i_0j_0} - 1) + (d_{i_0l_0} + 1) = d,\\
\sum_{m=1}^{N} d'_{ml_0} &= (\sum_{m=1, m\notin\{i_0,k_0\}}^{N} d_{ml_0}) + (d_{i_0l_0} + 1) + (d_{k_0l_0} - 1) = d.
\end{aligned}$$ ■

Definition 6.1.3: Seien $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$. Dann definieren wir

$$\mathcal{D}_{(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(N, d) := \{(d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d) \mid d_{i_0j_0} \neq 0, d_{k_0l_0} \neq 0\}.$$

Definition 6.1.4: Seien $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$. Dann wird nach Lemma 6.1.2 durch

$$R_{(i_0,j_0)(k_0,l_0)} : \mathcal{D}_{(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(N, d) \to \mathcal{D}(N, d), D \mapsto R_{(i_0,j_0)(k_0 l_0)}(D)$$

eine Abbildung definiert, die wir $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\}$-*Rechteckstransformation auf* $\mathcal{D}(N, d)$ nennen. Wir nennen $R_{(i_0,j_0)(k_0,l_0)}$ auch einfach nur eine *Rechteckstransformation* auf $\mathcal{D}(N, d)$.

Notation 6.1.5: Für $s \in [n]$ seien $i_s, j_s, k_s, l_s \in [N]$ mit $\{(i_s j_s), (k_s, l_s)\} \in [N]^2_\times$. Sei $D \in \mathcal{D}_{(i_1,j_1)(k_1,l_1)}(N, d)$, sodass gilt:

$$R_{(i_s,j_s)(k_s,l_s)}(\dots(R_{(i_1,j_1)(k_1,l_1)}(D))) \in \mathcal{D}_{(i_{s+1},j_{s+1})(k_{s+1},l_{s+1})}(N, d)$$

für alle $s \in [n-1]$. Dann schreiben wir

$$(R_{(i_n,j_n)(k_n,l_n)} \circ \dots \circ R_{(i_1,j_1),(k_1,l_1)})(D) := R_{(i_n,j_n)(k_n,l_n)}(\dots(R_{(i_1,j_1)(k_1,l_1)}(D))) =: D',$$

und sagen, es existieren Reckteckstransformationen $R_1, \dots, R_n$ auf $\mathcal{D}(N, d)$ mit

$$D' = (R_n \circ \dots \circ R_1)(D).$$

Bemerkung 6.1.6: Seien $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$. Sei $D \in \mathcal{D}_{(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(N, d)$ und $D' := R_{(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(D)$. Dann gilt $D' \in \mathcal{D}_{(i_0,l_0)(k_0,j_0)}$ und $R_{(i_0,l_0)(k_0,l_0)}(D') = D$. Analog gilt für ein $\tilde{D} \in \mathcal{D}_{(i_0 l_0),(k_0 j_0)}$:

$$R_{(i_0 j_0),(k_0 l_0)}(R_{(i_0 l_0)(k_0 j_0)}(\tilde{D})) = \tilde{D}.$$

Die Abbildungen $R_{(i_0,j_0)(k_0,l_0)}$ und $R_{(i_0,l_0)(k_0,l_0)}$ sind also invers und wir schreiben

$$R^{-1}_{(i_0,j_0)(k_0,l_0)} := R_{(i_0,l_0)(k_0,l_0)},$$
$$R^{-1}_{(i_0,l_0)(k_0,l_0)} := R_{(i_0,j_0)(k_0,l_0)}.$$

Für die Abbildung $\mathrm{id} : \mathcal{D}_{(i_0,j_0))(k_0,l_0)}(N, d) \to \mathcal{D}_{(i_0,j_0)(k_0,l_0}(N, d), D \mapsto D$ schreiben wir $\mathrm{id}^{-1} := \mathrm{id}$.

Notation 6.1.7: Es sei $\mathbb{1}_{N,d} := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N, d)$ mit $d_{ij} = d\delta_{ij}$, wobei $\delta_{ij} = 1$, falls $i = j, \delta_{ij} = 0$ sonst ist, für $i, j \in [N]$.

Lemma 6.1.8: *Sei $D \in \mathcal{D}(N, d)$ mit $D \neq \mathbb{1}_{N,d}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}^*$ und Rechteckstransformationen $R_1, \dots, R_n$, so dass $(R_1 \circ \dots \circ R_n)D = \mathbb{1}_{N,d}$ gilt.*

Beweis: Wir wollen per vollständiger Induktion zeigen, dass für alle $s \in [N]$ ein $m_s \in \mathbb{N}$ und Abbildungen $R_1, \dots, R_{m_s}$ existieren, die jeweils entweder eine Rechteckstransformationen oder id sind, so dass für

$$D_s := (d^s_{ij}) := (R_{m_s} \circ \dots \circ R_1)(D)$$

gilt $d^s_{ii} = d$ für alle $i \in [s]$. Dann folgt die zu beweisende Aussage mit dem Fall $s = N$ durch Streichen der R_i mit $R_i = \mathrm{id}$, da wegen $D \neq \mathbb{1}_{N,d}$ der Fall $R_i = \mathrm{id}$ für alle $i \in [m_N]$ ausgeschlossen werden kann. Sei $s = 1$. Gilt $d_{11} = d$, dann wählen wir $m_1 = 1$ und $R_1 = \mathrm{id}$. Angenommen also, es gelte $d_{11} \neq d$.

Wir zeigen zunächst, dass dann ein $n_1 \in \mathbb{N}^*$ und Rechteckstransformationen $R_1^1, \dots, R_{n_1}^1$ existieren, die für

$$\tilde{D} := (\tilde{d}_{ij}) := (R_1^1 \circ \dots \circ R_{n_1}^1)(D)$$

$\tilde{d}_{11} = d$ erfüllen. Wegen $D \in \mathrm{Mat}([d], N)$ und

$$\sum_{i=1}^{N} d_{1i} = \sum_{i=1}^{N} d_{i1} = d$$

existieren minimale $i_1, j_1 \in \{2, \dots, N\}$ mit $d_{i_1 1} > 0, d_{1 j_1} > 0$. Dann gilt

$$(R_{(i_1 1)(1 j_1)}(D))_{11} = d_{11} + 1.$$

Durch $(d - d_{11})$-fache Wiederholung dieses Vorgangs erhält man die gewünschten $R_1^1, \dots, R_n^1$, für die $(R_1^1 \circ \dots \circ R_n^1(D))_{11} = d$ gilt. Sei nun $1 < s < N$. Nach Induktionsvorraussetzung existieren ein $m_{s-1} \in \mathbb{N}$ und Abbildungen $R_1, \dots, R_{m_{s-1}}$, die jeweils entweder eine Rechteckstransformation oder id sind, so dass für $D' := (d'_{ij}) := (R_{m_{s-1}} \circ \dots \circ R_1)(D)$ gilt:

$$d'_{ii} = d \text{ für } i \in [s-1].$$

Wir wollen zeigen, dass dann ein $n_s \in \mathbb{N}_{\mathbb{N}}$ und Abbildungen $R_1^s, \dots, R_{n_s}^s$, die jeweils Rechteckstransformationen oder id sind, existieren, so dass für

$$\tilde{D}' := (\tilde{d}'_{ij}) := (R_1^s \circ \dots \circ R_{n_s}^s)(D')$$

gilt $\tilde{d}'_{ii} = d$ für alle $i \in [s]$. Im Fall $d'_{ss} = d$ wähle $R_1^s :=$ id und $n_s = 1$. Angenommen es gelte $d'_{ss} < d$. Für alle $i \in [s-1]$ gilt dann, wegen $d'_{ii} = d$ und $\sum_{k=1}^{N} d'_{ik} = d$, dass $d'_{is} = 0$ gilt, und analogerweise folgt $d'_{si} = 0$ für alle $i \in [s-1]$. Also folgt, dass für alle $i \in [N] \backslash \{s\}$ mit $d'_{is} > 0$ oder $d'_{si} > 0$, $i > s$ gilt. Seien also $i_s, j_s \in [N] \backslash \{s\}$ minimal mit $d'_{i_s s} > 0, d'_{s j_s} > 0$. Für

$$\tilde{D}' := (\tilde{d}'_{ij}) := R_{(i_s s)(s j_s)}(D')$$

gilt dann $\tilde{d}'_{ss} = d'_{ss} + 1$ und $\tilde{d}'_{ii} = d$ für $i \in [s-1]$. Durch $d - d'_{ss}$-faches Durchführen dieses Vorgangs folgt induktiv die Existenz von n_s und $R_1^s, \dots, R_{n_1}^1$. Es folgt:

$$(R_{n_s}^s \circ \dots \circ R_1^s \circ R_{m_{s-1}} \circ \dots \circ R_1)(D) = (\tilde{d}'_{ii}),$$

wobei $\tilde{d}'_{ii} = d$ für $i \in [s]$. Durch die Wahl $m_s := n_s + m_{s-1}$ und $R_i := R_{i-m_{s-1}}^s$ ist die Induktionsaussage und damit das Lemma bewiesen. ■

Lemma 6.1.9: *Sei $D \in \mathcal{D}(N, d)$. Dann existieren ein $n \in \mathbb{N}^*$ und Rechteckstransformationen $R'_1, \dots, R'_n$ mit*

$$(R'_1 \circ \dots \circ R'_n)(\mathbb{1}_{N,d}) = D.$$

Beweis: Seien n und $R_1, \dots, R_m$ wie in Lemma 6.1.8. Dann wird durch $R'_i := R_{n+1-i}^{-1}$ für $i \in [n]$ wegen Bemerkung 6.1.6 die Aussage erfüllt. ■

Proposition 6.1.10: *Seien $D, D' \in \mathcal{D}(N,d)$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}^*$ und Rechteckstransformationen $R_1, \ldots, R_n$, sodass*

$$(R_1 \circ \cdots \circ R_n)(D) = D'$$

gilt.

Beweis: Nach Lemma 6.1.8 existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}^*$ und Rechteckstransformationen $R'_1, \ldots, R'_{n_1}$ mit

$$(R'_1 \circ \cdots \circ R'_{n_1})(D) = \mathbb{1}_{N,d}.$$

Nach Lemma 6.1.9 existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}^*$ und Rechteckstransformationen $R''_1, \ldots, R''_{n_2}$ mit

$$(R''_1 \circ \cdots \circ R''_{n_2})(\mathbb{1}_{N,d}) = D'.$$

Also gilt:

$$(R''_1 \circ \cdots \circ R''_{n_2} \circ R'_1 \circ \cdots \circ R'_{n_1})(D) = D',$$

und die Aussage wird erfüllt durch die Wahl $n := n_1 + n_2$,

$$R_i := \begin{cases} R''_i, & \text{für } 1 \leq i \leq n_2 \\ R'_{i-n_2}, & \text{für } n_2 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2 \end{cases}$$

erfüllt. ■

6.2 Rechteckstransformationen auf Hilbertsudokus

Definition 6.2.1: Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. Existieren $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$ und eine Projektion $p \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ mit $p \leq p_{i_0 j_0}, p \leq p_{k_0 l_0}$. Dann definieren wir $R_{p,(i_0 j_0)(k_0 l_0)}(H) := (p'_{ij}) \in \mathrm{Mat}(N, \mathcal{L}(\mathscr{H}))$ mit

$$\begin{aligned}
p'_{mn} &:= p_{mn}, \text{ falls } (m,n) \notin \{(i_0,j_0),(k_0,l_0),(i_0,l_0),(k_0,j_0)\} \\
p'_{i_0 j_0} &:= p_{i_0 j_0} - p, \\
p'_{k_0 l_0} &:= p_{k_0 j_0} - p, \\
p'_{i_0 l_0} &:= p_{i_0 l_0} + p, \\
p'_{k_0 j_0} &:= p_{k_0 j_0} + p.
\end{aligned}$$

Lemma 6.2.2: *Seien die Vorraussetzungen wie in Definition 6.2.1. Dann gilt:*

$$R_{p,(i_0 j_0)(k_0 l_0)}(H) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N).$$

Beweis: Nach Bemerkung 3.1.3 gilt

$$p_{k_0 j_0}(\mathscr{H}) \perp p_{i_0 j_0}(\mathscr{H}), p_{i_0 l_0}(\mathscr{H}) \perp p_{i_0 j_0}(\mathscr{H}),$$

und somit wegen $p(\mathscr{H}) \subset p_{i_0 j_0}(\mathscr{H})$(s.Satz 2.3.5) damit auch:

$$p(\mathscr{H}) \perp p_{k_0 j_0}(\mathscr{H}), p(\mathscr{H}) \perp p_{i_0 l_0}(\mathscr{H}).$$

Nach Proposition 2.3.8 gilt dann $pp_{i_0 l_0} = 0, pp_{k_0 j_0} = 0$ und $p + p_{k_0 j_0} = p \vee p_{k_0 j_0}$, $p + p_{i_0 l_0} = p \vee p_{i_0 l_0}$, weswegen $p'_{k_0 j_0}, p'_{i_0 l_0}$ Projektionen auf $\mathscr{H}$ sind. Wegen $p \leq p_{i_0 j_0}, p \leq p_{k_0 l_0}$ sind nach Proposition 2.3.10 auch $p_{i_0 j_0} - p$ und $p_{k_0 l_0} - p$ Projektionen auf $\mathscr{H}$. Also ist p'_{ij} eine Projektion auf $\mathscr{H}$ für alle $i, j \in [N]$. Außerdem gilt für $\alpha \in [N] \backslash \{i_0, k_0\}, \beta \in [N] \backslash \{j_0, l_0\}$:

$$\sum_{n=1}^{N} p'_{\alpha n} = \sum_{n=1}^{N} p_{\alpha n} = \mathbb{1},$$
$$\sum_{m=1}^{N} p'_{m\beta} = \sum_{m=1}^{N} p_{m\beta} = \mathbb{1},$$

und

$$\sum_{n=1}^{N} p'_{i_0 n} = (\sum_{n=1, n \notin \{j_0, l_0\}}^{N} p_{i_0 n}) + (p_{i_0 j_0} - p) + (p_{i_0 l_0} + p) = \mathbb{1},$$
$$\sum_{n=1}^{N} p'_{k_0 n} = (\sum_{n=1, n \notin \{j_0, l_0\}}^{N} p_{k_0 n}) + (p_{k_0 j_0} + p) + (p_{k_0 l_0} - p) = \mathbb{1},$$
$$\sum_{m=1}^{N} p'_{m j_0} = (\sum_{m=1, m \notin \{i_0, k_0\}}^{N} p_{m j_0}) + (p_{i_0 j_0} - p) + (p_{k_0 j_0} + p) = \mathbb{1},$$
$$\sum_{m=1}^{N} p'_{m l_0} = (\sum_{m=1, m \notin \{i_0, k_0\}^N} p_{m l_0}) + (p_{i_0 l_0} + p) + (p_{k_0 l_0} - p) = \mathbb{1}.$$

Also gilt $R_{p,(i_0 j_0)(k_0 l_0)}(H) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$. ∎

Definition 6.2.3: Seien $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$ und $p \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ eine Projektion auf $\mathscr{H}$. Dann definieren wir

$$\mathcal{HS}_{p,(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(\mathscr{H}, N) := \{(p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N) \mid p \leq p_{i_0 j_0}, p \leq p_{k_0 l_0}\}.$$

Definition 6.2.4: Seien $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$ und $p \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ eine Projektion auf $\mathscr{H}$. Dann wird nach Lemma 6.2.2 durch

$$R_{p,(i_0,j_0)(k_0,l_0)} : \mathcal{HS}_{p,(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(\mathscr{H}, N) \to \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N), H \mapsto R_{p,(i_0,j_0)(k_0 l_0)}(H)$$

eine Abbildung definiert, die wir $\{p, (i_0, j_0), (k_0, l_0)\}$-*Rechteckstransformation auf* $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ nennen. Wir nennen $R_{p,(i_0,j_0)(k_0,l_0)}$ auch einfach nur eine *Rechteckstransformation* auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$.

Notation 6.2.5: Sei $n \in \mathbb{N}_{>1}$. Für $s \in [n]$ seien $i_s, j_s, k_s, l_s \in [N]$ mit $\{(i_s, j_s), (k_s, l_s\} \in [N]^2_\times$ und $p_s \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ eine Projektion auf $\mathscr{H}$. Sei $H \in \mathcal{HS}_{p_1,(i_1,j_1)(k_1,l_1)}(N, d)$, sodass gilt:

$$R_{p_s,(i_s,j_s)(k_s,l_s)}(\dots(R_{p,s(i_1,j_1)(k_1,l_1)}(H))) \in \mathcal{HS}_{p_{s+1},(i_{s+1},j_{s+1})(k_{s+1},l_{s+1})}(\mathscr{H}, N)$$

für alle $s \in [n-1]$. Dann schreiben wir

$$(R_{p_n,(i_n,j_n)(k_n,l_n)} \circ \dots \circ R_{p_1,(i_1,j_1)(k_1,l_1)})(H) := R_{p_n,(i_n,j_n)(k_n,l_n)}(\dots(R_{p_1,(i_1,j_1)(k_1,l_1)}(H))) =: H',$$

und sagen, es existieren Reckteckstransformationen $R_1, \dots, R_n$ auf $\mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$ mit

$$H' = (R_n \circ \dots \circ R_1)(H).$$

Bemerkung 6.2.6: Seien $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$ und $p \in \mathcal{L}(\mathscr{H})$ eine Projektion. Sei $H \in \mathcal{HS}_{p,(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(\mathscr{H}, N)$ und $H' := R_{p,(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(H)$. Dann gilt $H' \in \mathcal{HS}_{p,(i_0,l_0)(k_0,j_0)}(\mathscr{H}, N)$ und $R_{p,(i_0,l_0)(k_0,l_0)}(H') = H$. Analog gilt für ein $\tilde{H} \in \mathcal{HS}_{p,(i_0l_0),(k_0j_0)}(\mathscr{H}, N)$

$$R_{p,(i_0j_0),(k_0l_0)}(R_{p,(i_0l_0),(k_0j_0)}(\tilde{H})) = \tilde{H}.$$

Die Abbildungen $R_{p,(i_0,j_0)(k_0,l_0)}$ und $R_{p,(i_0,l_0)(k_0,l_0)}$ sind also invers und wir schreiben

$$\begin{aligned} R^{-1}_{p,(i_0,j_0)(k_0,l_0)} &:= R_{p,(i_0,l_0)(k_0,l_0)}, \\ R^{-1}_{p,(i_0,l_0)(k_0,l_0)} &:= R_{p,(i_0,j_0)(k_0,l_0)}. \end{aligned}$$

Für die Abbildung

$$\mathrm{id} : \mathcal{HS}_{p,(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(\mathscr{H}, N) \to \mathcal{HS}_{p,(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(\mathscr{H}, N), H \mapsto H$$

schreiben wir

$$\mathrm{id}^{-1} := \mathrm{id}.$$

Notation 6.2.7: Seien $s \in [d]$ und $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$. Dann notieren wir die Rechteckstransformation $R_{p_{e_s},(i_0,j_0)(k_0,l_0)}$ auf $\mathcal{HS}_{p_{e_s},(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(\mathbb{C}^d, N)$ als $R_{s,(i_0,j_0)(k_0,l_0)}$.

Sei im folgenden $\mathcal{B} := \{v_1, \dots, v_d\}$ eine Orthogonalbasis von $\mathbb{C}^d$. Wir zeigen nun, wie sich Rechteckstransformationen auf bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnlichen Hilbertsudokus durch die Gruppenoperation aus 3.2.8 beschreiben lassen:

Lemma 6.2.8: *Für $\sigma_1, \dots, \sigma_d \in S_N$ und $H := H_{\sigma_1,\dots,\sigma_d}$ und $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\}$ sind äquivalent:*

1. $H \in \mathcal{HS}_{p_{v_s},(i_0)(j_0),(k_0)(l_0)}$,
2. $\sigma_s(i_0) = j_0, \sigma_s(k_0) = l_0$.

Beweis: Seien für $(i, j) \in [N]^2$ $S_{ij} \subset \mathcal{B}$ mit $H := (p_{S_{ij}})$. Dann gilt mit Satz 2.3.5:

$$\begin{aligned} H \in \mathcal{HS}p_{v_s}, (i_0, j_0), (k_0, l_0) &\Leftrightarrow p_{v_s} \leq p_{S_{i_0j_0}}, p_{v_s} \leq p_{S_{k_0l_0}} \\ &\Leftrightarrow v_s \in S_{i_0j_0}, v_s \in S_{k_0l_0} \\ &\Leftrightarrow \sigma_s(i_0) = j_0, \sigma_s(k_0) = l_0. \end{aligned}$$

■

Lemma 6.2.9: *Sei $H \in \mathcal{HS}_{p_{v_s},(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(\mathbb{C}^d, N)$ gewöhnlich bezüglich $\mathcal{B}$, $s \in [d]$ und $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$. Für $\tau := (\mathrm{id}, \dots, \mathrm{id}, (j_0, l_0), \mathrm{id}, \dots, \mathrm{id})$, wobei der Eintrag (j_0, l_0) an der s-ten Stelle steht, gilt dann:*

$$R_{p_{v_s},(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(H) = \tau H.$$

Beweis: Seien nämlich $\sigma_1, \dots, \sigma_d \in S_N$ mit $H = H^{\mathcal{B}}_{\sigma_1,\dots,\sigma_d}$, seien für $(i, j) \in [N]^2$ $S_{ij} \subset \mathcal{B}$ mit $(\tau H)_{ij} = p_{S_{ij}}$ und für $(i, j) \in [N]^2 \backslash \{(i_0, j_0), (i_0, l_0), (k_0, j_0), (k_0, l_0)\}$ $S'_{ij} \subset \mathcal{B}$ mit $H_{ij} = p_{S'_{ij}}$. Für $t \in [d]$ gilt dann:

$$v_t \in S'_{ij} \Leftrightarrow \sigma_t(i) = j,$$
$$v_t \in S_{ij} \Leftrightarrow \begin{cases} \sigma_t(i) = j, & \text{falls } t \in [d] \backslash \{s\} \\ \sigma_t(i) = j, & \text{falls } t = s, \sigma_t(i) \in [N] \backslash \{j_0, l_0\} \\ \sigma_t(i) = (j_0, l_0) \cdot j, & \text{falls } t = s, \sigma_t(i) \in \{j_0, l_0\}. \end{cases}$$

Für $(i,j) \in [N]^2 \backslash \{(i_0, j_0), (i_0, l_0), (k_0, j_0), (k_0, l_0)\}$ gilt dann:

$$(R_{p_{v_s},(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(H))_{ij} = p_{S'_{ij}} = p_{S_{ij}} = (\tau H)_{ij}.$$

Nach Proposition 2.3.10 gilt für $(i,j) \in \{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\}$

$$(R_{p_{v_s},(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(H))_{ij} = p_{S'_{ij} \backslash \{v_s\}} = p_{S'_{ij}} = (\tau H)_{ij},$$

und für $(i,j) \in \{(i_0, l_0), (k_0, j_0)\}$

$$(R_{p_{v_s},(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(H))_{ij} = p_{S' \cup \{v_s\}} = p_{S_{ij}} = (\tau H)_{ij}. \qquad \blacksquare$$

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass sich zwei unterschiedliche, bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliche Hilbertsudokus immer durch eine Folge von Rechteckstransformationen ineinander überführen lassen. Dazu werden zunächst

Definition 6.2.10: Wir definieren $\mathbb{1}_{\mathscr{H},N} := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}(\mathscr{H}, N)$, wobei für $(i,j) \in [N]^2$ gelte

$$p_{ij} := \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{falls } i = j, \\ 0, & \text{falls } i \neq j. \end{cases}.$$

Wir nennen $\mathbb{1}_{\mathscr{H},N}$ das *N-Einheitshilbertsudoku auf $\mathscr{H}$.*

Lemma 6.2.11: *Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ mit $p_{11} \neq \mathbb{1}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}^*$ und Rechteckstransformationen $R_1, \dots, R_n$, so dass für*

$$H' := (q_{ij}) := (R_1 \circ \dots \circ R_n)(H)$$

gilt $q_{11} = \mathbb{1}$.

Beweis: Seien zu $i, j \in [N]$ $S_{ij} \subset \mathcal{B}$ mit $p_{ij} = p_{S_{ij}}$. Wegen $p_{11} \neq \mathbb{1}$ gilt $S_{11} \neq \mathcal{B}$. Sei $s \in [d]$ minimal mit $v_s \notin S_{11}$. Nach Lemma 3.2.3 existieren dann $i_0, j_0 \in \{2, \dots, N\}$ mit $v_s \in S_{i_0 1}$ und $v_s \in S_{1 j_0}$. Für $H' := (q_{ij}) := R_{p_{v_s},(i_0,1),(1,j_0)}(H)$ gilt dann nach Proposition 2.3.8 $q_{11} = p_{S_{11} \cup \{v_s\}}$. Sei $n := d - \#\mathcal{B}$. Durch n-faches Anwenden dieses Vorgangs auf H erhält man n Rechteckstransformationen $R_1, \dots, R_n$ mit $((R_1 \circ \dots \circ R_n)(H))_{11} = \mathbb{1}$. $\blacksquare$

Lemma 6.2.12: *Seien $N > 2$ und $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$, so dass ein $n \in [N-2]$ existiert mit $p_{ii} = \mathbb{1}$ für $1 \leq i \leq n$ und $p_{n+1,n+1} \neq \mathbb{1}$. Dann existiert ein $m \in \mathbb{N}^*$ und Rechteckstransformationen $R_1, \dots, R_m$, so dass für*

$$H' := (q_{ij}) = (R_1 \circ \dots \circ R_m)(H)$$

gilt $q_{ii} = \mathbb{1}$ für $i \in [n+1]$.

Beweis: Wegen $p_{n+1,n+1} \neq \mathbb{1}$ gilt $S_{n+1,n+1} \neq \mathcal{B}$. Sei $s \in [d]$ minimal mit $v_s \notin S_{n+1,n+1}$. Nach Lemma 3.2.3 existieren dann $i_0, j_0 \in [N]\backslash\{n+1\}$ mit $v_s \in S_{n+1,j_0}, v_s \in S_{i_0,n+1}$. Wegen Lemma 3.1.12 gilt $p_{i,n+1} = p_{n+1,j} = 0$ für alle $i, j \in [n]$ und somit $i_0, j_0 > N$. Für $H' := (q_{ij}) := R_{p_{v_s}}, (i_0, n+1), (n+1, j_0)$ gilt dann nach Proposition 2.3.8 $q_{n+1,n+1} = p_{S_{n+1,n+1} \cup \{v_s\}}$ und $q_{ii} = p_{ii} = \mathbb{1}$ für $i \in [n]$. Sei $m := d - \#S_{n+1,n+1}$. Durch m-faches Anwenden dieses Vorgangs erhält man m Rechteckstransformationen $R_1, \ldots, R_m$ mit $(R_1 \circ \cdots \circ R_m)(H))_{ii} = \mathbb{1}$ für $i \in [n+1]$. ■

Lemma 6.2.13: *Sei $H := (p_{ij}) \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ mit $H \neq \mathbb{1}_{\mathbb{C}^d,N}$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}^*$ und Rechteckstransformationen $R_1, \ldots, R_n$, sodass*

$$(R_1 \circ \cdots \circ R_n)(H) = \mathbb{1}_{N,d}$$

gilt.

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus Lemma 6.2.11 und Lemma 6.2.12 und der Tatsache, dass $H \neq \mathbb{1}_{\mathbb{C}^d,N}$ gilt. ■

Proposition 6.2.14: *Seien $H_1, H_2 \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ mit $H_1 \neq H_2$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}^*$ und Rechteckstransformationen $R_1, \ldots, R_n$ mit*

$$(R_1 \circ \cdots \circ R_n)(H_1) = H_2.$$

Beweis: Ohne Einschränkung gelte $H_1 \neq \mathbb{1}_{\mathbb{C}^d,N}$. Im Fall $H_2 = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^d,N}$ ist die Aussage dann durch Lemma 6.2.13 gegeben. Angenommen nun, es gelte auch $H_2 \neq \mathbb{1}_{\mathbb{C}^d,N}$ Nach Lemma 6.2.13 existieren dann $n_1, n_2 \in \mathbb{N}^*$ und Rechteckstransformationen $R'_1, \ldots, R'_{n_1}, R''_1, \ldots R''_{n_2}$, so dass gilt:

$$(R'_1 \circ \cdots \circ R'_{n_1})(H_1) = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^d,N},$$
$$(R''_1 \circ \cdots \circ R''_{n_2})(H_2) = \mathbb{1}_{\mathbb{C}^d,N}.$$

Also gilt:

$$(R''^{-1}_{n_2} \circ \cdots \circ R''^{-1}_1 \circ R'_1 \circ \cdots \circ R'_{n_1})(H_1) = H_2$$

Also wird die Aussage durch die Wahl $n := n_1 + n_2$,

$$R_i := \begin{cases} R''^{-1}_{n_2+1-i}, & \text{für } 1 \leq i \leq n_2, \\ R'_{i-n_2}, & \text{für } n_2 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2 \end{cases}$$

erfüllt. ■

Proposition 6.2.14 und die anderen Aussagen dieser Subsektion lassen sich analog für Hilbertsudokus, die gewöhnlich bezüglich einer Orthogonalbasis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{C}$ sind formulieren. Dazu machen wir zunächst noch eine Definition und eine Hilfsaussage:

Bemerkung 6.2.15: Sei $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$, $s \in [d]$ und $H \in \mathcal{HS}_{p_{v_s},(i_0,j_0)()}(\mathbb{C}, \mathbb{N})$ gewöhnlich bezüglich $\mathcal{B}$. Dann gilt

$$\mathrm{Dim}(R_{p_{v_s},(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(H)) = R_{(i_0,j_0)(k_0,l_0)}(\mathrm{Dim}(H)) \tag{26}$$

Die in den Beweisen von Lemma 6.2.11 und Lemma 6.2.12 gewählten Rechteckstransformationen sind alle bezüglich p_{v_s} für ein $s \in [d]$ gewählt, und so können es auch die aus Proposition 6.1.10 sein. Angenommen also, es wäre bewiesen, dass für jedes Dimensionssuokdu

$D \in \mathcal{D}(N,d)$ ein $H \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ mit $\mathrm{Dim}(H) = D$ existiert. Dann würde mit Gl. (19) aus Proposition 6.2.14 direkt Proposition 6.1.10 folgen.

Auch an dieser Stelle soll nochmal eine Vermutung aufgestellt werden, unter deren Gültigkeit die Existenz einer Lösung jedes Dimenionssudoku durch ein bezüglich $\mathcal{B}$ gewöhnliches Hilbertsudoku folgen würde.

Vermutung 6.2.16: Seien $i_0, j_0, k_0, l_0 \in [N]$ mit $\{(i_0, j_0), (k_0, l_0)\} \in [N]^2_\times$, $H \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ und $D := (d_{ij}) := \mathrm{Dim}(H) \in \mathcal{D}_{(i_0,j_0),(k_0,l_0)}(N,d)$. Dann existiert ein $H' \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ mit

$$\mathrm{Dim}(H') = R_{(i_0 j_0)(k_0 l_0)}(D).$$

Frage 6.2.17: Gilt Vermutung 6.2.16?

Satz 6.2.18: *Unter der Vorraussetzung von Vermutung 6.2.16 gilt:*
Zu jedem $D \in \mathcal{D}(N,d)$ existiert eine Lösung $H \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$.

Beweis: Sei $D := (d_{ij}) \in \mathcal{D}(N,d)$. Im Fall $D = \mathbb{1}_{N,d}$ wird D durch $\mathbb{1}_{\mathbb{C}^d,N} \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ gelöst. Angenommen also, es gelte $D \neq \mathbb{1}_{N,d}$. Nach Lemma 6.1.9 existiert dann ein $n \in \mathbb{N}^*$ und Dimensionssudoku-Rechteckstransformationen $R_1, \ldots, R_n$ mit

$$(R_n \circ \cdots \circ R_1)(\mathbb{1}_{N,d}) = D.$$

Da $\mathbb{1}_{\mathbb{C}^d,N} \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ eine Lösung von $\mathbb{1}_{N,d}$ ist, folgt nach Vermutung 6.2.16 induktiv für $i \in [n]$ die Existenz eines $H_i \in \mathcal{HS}_{\mathcal{B}}(N)$ mit:

$$\mathrm{Dim}(H_i) := (R_i \circ \cdots \circ R_1)(\mathbb{1}_{N,d}).$$

Dann gilt:

$$\mathrm{Dim}(H_n) = (R_n \circ \cdots \circ R_1)(\mathbb{1}_{N,d}) = D. \qquad \blacksquare$$

7 Liste weiterführender Fragen

Frage 3.1.18: Besitzt jede Hilbertsudokukonfiguration eine erweiterte Lösung? Wenn nicht, was sind Kritieren für die Existenz einer erweiterten Lösung?

Frage 3.3.10: Sei $N \in \mathbb{N}^*$ und $K := \mathcal{HK}(\mathbb{C}^N, N)$ eine klassische N-Konfiguration, die eine semiklassische Lösung $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^N, N)$ besitzt. Ist K dann auch klassisch lösbar?

Frage 3.5.7: Seien $N \in \mathbb{N} \geq 4, r \in \{2, \ldots N-2\}$ und $K := ((p_{ij}), [r] \times [N]) \in \mathcal{HK}(\mathscr{H}, N)$. Existiert dann immer eine Lösung von K. Spezieller, existiert für den Fall $(r, N) = (2, 4)$ oder $\mathscr{H} = \mathbb{C}^d$ immer eine Lösung von K? Falls nicht, was sind in den entsprechenden Fällen Gegenbeispiele?

Frage 3.7.5: Was sind Kriterien für die Irreduzibilität von Hilbertsudokus?

Frage 4.2.8: Bestimmen Sie eine Klassifikation von $\mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ durch Repräsentanten der Isotopieklassen.

Frage 4.2.13: Sei $N, d \in \mathbb{N}^*$. Was muss für $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$ gelten, damit die Normalform eindeutig ist?

Frage 4.4.5: Existiert zu jedem $D \in \mathcal{D}(N, d)$ ein Hilbertsudoku $H \in \mathcal{HS}(\mathbb{C}^d, N)$, das D löst?

Frage 4.4.8: Sei $D \in \mathcal{D}(N, d)$. Existieren dann $\sigma_1, \ldots, \sigma_N \in S_N$ und N-Permutationsmatrizen $A_{\sigma_1}, \ldots, A_{\sigma_d}$ mit $D = A_{\sigma_1} + \ldots A_{\sigma_d}$?

Frage 4.4.11: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$. Was sind Kriterien für die Lösbarkeit einer Dimensionskonfiguration $D \in \mathcal{DK}(N, d)$? Was sind Kriterien für die Eindeutigkeit einer Lösung?

Frage 4.5.4: Seien $N, d \in \mathbb{N}^*$ und $D \in \mathcal{D}(N, d)$. Was muss für D gelten, damit D eine eindeutige Normalform besitzt?

Frage 5.8.13: Seien

$$\mathcal{H}_1 := \left\{ H_{1,\gamma} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_1, e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_2, e_5 & e_6 \\ 0 & 0 & e_6 & e_2, e_5 \end{pmatrix} \middle| e_5 := e_1 + \gamma \cdot e_3, e_6 := e_1 + \gamma' \cdot e_3, \gamma \in \mathbb{R}_+^* \right\},$$

$$\mathcal{H}_3 := \left\{ H_{3,\beta,\gamma} := \begin{pmatrix} e_1, e_2 & e_3 & 0 & 0 \\ e_3 & e_1, e_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_5, e_6 & e_7 \\ 0 & 0 & e_7 & e_5, e_6 \end{pmatrix} \middle| \begin{matrix} e_5 := e_1 + \beta \cdot e_2, e_6 := e_1 + \gamma \cdot e_3, \\ e_7 := e_1 + \beta' \cdot e_2 + \gamma' \cdot e_3, \gamma \in \mathbb{C}^* \end{matrix} \right\}.$$

Sind Elemente von $\mathcal{H}_1$ und von $\mathcal{H}_3$ paarweise nicht-isotop? Was sind Isotopiekriterien für die Elemente von $\mathcal{H}_3$.

Frage 5.8.4: Sei für $i \in [12]$ D_i wie in Beispiel 4.5.6. Was sind Repräsentanten für die kommutativen Lösungen von D_i für $i \in [12] \backslash \{9\}$. Was sind Repräsentanten für die nicht-kommutativen Lösungen von D_i für $i \in \{7, 8, 10, 11, 12\}$?

Frage 5.8.8: Sei für $i \in [38]$ D_i wie in Beispiel 4.5.8. Was sind Repräsentanten der Isotopieklassen nicht-kommutativer Lösungen von D_i für $i \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 14, 15, 17, 19, 21, 26, 27, 28, 31, 32, 36\}$.

Frage 6.2.17: Gilt Vermutung 6.2.16?

8 Appendix

Es folgt der GAP-Quellcode zur Berechnung von $\mathcal{D}(4,3)$, seinen Äquivalenzklassen und deren Mächtigkeit. Der Aufbau des Quellcodes ist wie folgt: Zunächst werden alle Matrizen aus $\mathcal{D}(4,3)$ in der Liste `dimmatlist` gespeichert. Da die Gruppe G_4 von $\{\mathrm{r}_\sigma, \mathrm{c}_\sigma, \tau_4, \tau_4', \mathrm{rot}_4 \mid \sigma \in \mathrm{Sym}_4\}$ und Sym_4 von $\{(12),(1234)\}$ erzeugt wird, wird G_4 von $\mathcal{S} := \{\mathrm{r}_{(12)}, \mathrm{r}_{(1234)}, \mathrm{c}_{(12)}, \mathrm{c}_{(1234)}, \tau_4, \tau_4', \mathrm{rot}_4\}$ erzeugt. G_4 wird als Matrixgruppe `OpGroup` initialisiert mit den Erzeugern aus $\mathcal{S}$, wobei `A12` $\mathrm{r}_{(12)}$, `A1234` $\mathrm{r}_{(1234)}$, `A56` $\mathrm{c}_{(12)}$, `A5678` c_{1234}, `Atrans` τ_4, `Atrans2` τ_4' und `Arot` rot_4 entspricht. Die Funktion `Matop` nimmt als Argumente eine 4×4-Matrix `M` und eine invertierbare 16×16-Matrix `MOp`. `M` wird in einen 16-Vektor transformiert, in dem die Einträge die Zeilen von oben nach unten durchlaufend, zeilenweise von links nach rechts durchlaufend, nacheinander in die Einträge des Vektors gesetzt werden, anschließend der Vektor von links mit der Inversen von `MOp` multipliziert, analog zurück in eine 4×4-Matrix zurücktransformiert und ausgegeben wird. Die in GAP implementierte Funktion `Orbits` bestimmt die Bahnen von von `dimmatlist` unter der Gruppenoperation von `OpGroup`, die durch die Funktion `Matop` gegeben ist, und speichert sie in `dimorbits` ab. Diese Bahnen sind die Bahnen von $\mathcal{D}(4,3)$ unter der Operation von G_4 und werden in `dimorbits` abgespeichert. Die Anzahl der Elemente von `dimorbits` ist Anzahl der Bahnen, die Anzahl der Elemente eines Elements von `dimorbits` ist die Länge der jeweiligen Bahn, und als Repräsentanten der Bahnen werden jeweils das erste Element eines Elements von `dimorbits` gewählt. (**Achtung:** Der Code muss aus einer Textdatei eingelesen werden, um richtig kompiliert zu werden.)

```
n:=3;
dimmatlist:=[];
s:=0;

#In dimmatlist werden alle Dimensionssudokus aus
#D(4,3) gespeichert:
for i1 in [0..n] do
for i2 in [0..n] do
for i3 in [0..n] do
for i4 in [0..n] do
for i5 in [0..n] do
for i6 in [0..n] do
for i7 in [0..n] do
for i8 in [0..n] do
for i9 in [0..n] do
for i10 in [0..n] do
for i11 in [0..n] do
for i12 in [0..n] do
for i13 in [0..n] do
for i14 in [0..n] do
for i15 in [0..n] do
for i16 in [0..n] do
if
        (i1+i2+i3+i4=n)
    and (i5+i6+i7+i8=n)
```

```
    and (i9+i10+i11+i12=n)
    and (i13+i14+i15+i16=n)
    and (i1+i5+i9+i13=n)
    and (i2+i6+i10+i14=n)
    and (i3+i7+i11+i15=n)
    and (i4+i8+i12+i16=n)
then
    s:=s+1;
    dimmatlist[s]:=NullMat(4,4);
    dimmatlist[s][1][1]:=i1;
    dimmatlist[s][1][2]:=i2;
    dimmatlist[s][1][3]:=i3;
    dimmatlist[s][1][4]:=i4;
    dimmatlist[s][2][1]:=i5;
    dimmatlist[s][2][2]:=i6;
    dimmatlist[s][2][3]:=i7;
    dimmatlist[s][2][4]:=i8;
    dimmatlist[s][3][1]:=i9;
    dimmatlist[s][3][2]:=i10;
    dimmatlist[s][3][3]:=i11;
    dimmatlist[s][3][4]:=i12;
    dimmatlist[s][4][1]:=i13;
    dimmatlist[s][4][2]:=i14;
    dimmatlist[s][4][3]:=i15;
    dimmatlist[s][4][4]:=i16;
fi;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
#Die Gruppe G_4 wird durch 16x16-Matrizen, fuer die die Erzeuger
#definiert werden

A12:=NullMat(16,16);
```

```
A12[5][1]:=1;
A12[1][5]:=1;
A12[2][6]:=1;
A12[6][2]:=1;
A12[3][7]:=1;
A12[7][3]:=1;
A12[4][8]:=1;
A12[8][4]:=1;
A12[9][9]:=1;
A12[10][10]:=1;
A12[11][11]:=1;
A12[12][12]:=1;
A12[13][13]:=1;
A12[14][14]:=1;
A12[15][15]:=1;
A12[16][16]:=1;

A1234:=NullMat(16,16);
A1234[5][1]:=1;
A1234[6][2]:=1;
A1234[7][3]:=1;
A1234[8][4]:=1;
A1234[9][5]:=1;
A1234[10][6]:=1;
A1234[11][7]:=1;
A1234[12][8]:=1;
A1234[13][9]:=1;
A1234[14][10]:=1;
A1234[15][11]:=1;
A1234[16][12]:=1;
A1234[1][13]:=1;
A1234[2][14]:=1;
A1234[3][15]:=1;
A1234[4][16]:=1;

A56:=NullMat(16,16);
A56[2][1]:=1;
A56[1][2]:=1;
A56[3][3]:=1;
A56[4][4]:=1;
A56[6][5]:=1;
A56[5][6]:=1;
A56[7][7]:=1;
A56[8][8]:=1;
A56[10][9]:=1;
A56[9][10]:=1;
```

```
A56[11][11]:=1;
A56[12][12]:=1;
A56[14][13]:=1;
A56[13][14]:=1;
A56[15][15]:=1;
A56[16][16]:=1;

A5678:=NullMat(16,16);
A5678[2][1]:=1;
A5678[3][2]:=1;
A5678[4][3]:=1;
A5678[1][4]:=1;
A5678[6][5]:=1;
A5678[7][6]:=1;
A5678[8][7]:=1;
A5678[5][8]:=1;
A5678[10][9]:=1;
A5678[11][10]:=1;
A5678[12][11]:=1;
A5678[9][12]:=1;
A5678[14][13]:=1;
A5678[15][14]:=1;
A5678[16][15]:=1;
A5678[13][16]:=1;

Atrans:=NullMat(16,16);
Atrans[1][1]:=1;
Atrans[5][2]:=1;
Atrans[9][3]:=1;
Atrans[13][4]:=1;
Atrans[2][5]:=1;
Atrans[6][6]:=1;
Atrans[10][7]:=1;
Atrans[14][8]:=1;
Atrans[3][9]:=1;
Atrans[7][10]:=1;
Atrans[11][11]:=1;
Atrans[15][12]:=1;
Atrans[4][13]:=1;
Atrans[8][14]:=1;
Atrans[12][15]:=1;
Atrans[16][16]:=1;


Atrans2:=NullMat(16,16);
Atrans2[1][16]:=1;
```

```
Atrans2[2][12]:=1;
Atrans2[3][8]:=1;
Atrans2[4][4]:=1;
Atrans2[5][15]:=1;
Atrans2[6][11]:=1;
Atrans2[7][7]:=1;
Atrans2[8][3]:=1;
Atrans2[9][14]:=1;
Atrans2[10][10]:=1;
Atrans2[11][6]:=1;
Atrans2[12][2]:=1;
Atrans2[13][13]:=1;
Atrans2[14][9]:=1;
Atrans2[15][5]:=1;
Atrans2[16][1]:=1;

Arot:=NullMat(16,16);
Arot[1][13]:=1;
Arot[2][9]:=1;
Arot[3][5]:=1;
Arot[4][1]:=1;
Arot[5][14]:=1;
Arot[6][10]:=1;
Arot[7][6]:=1;
Arot[8][2]:=1;
Arot[9][15]:=1;
Arot[10][11]:=1;
Arot[11][7]:=1;
Arot[12][3]:=1;
Arot[13][16]:=1;
Arot[14][12]:=1;
Arot[15][8]:=1;
Arot[16][4]:=1;


#Deklaration von G_4:

OpGroup:=Group(A12,A1234,A56,A5678,Atrans,Atrans2,Arot);

#Deklaration der Operation von G_4 auf D(4,3)

Matop:=function(M,MOp)
        local i,j,Mhold,Mhold2,v,w;


        Mhold:=NullMat(4,4);#Rueckgabematrix initialisieren
```

```
for i in [1..16] do  #4x4-Matrizen in 16-Vektoren
#uebertragen und Operation ausfuehren
v:=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
v[i]:=1;

if i=1 then v:=M[1][1]*v;
elif i=2 then v:=M[1][2]*v;
elif i=3 then v:=M[1][3]*v;
elif i=4 then v:=M[1][4]*v;
elif i=5 then v:=M[2][1]*v;
elif i=6 then v:=M[2][2]*v;
elif i=7 then v:=M[2][3]*v;
elif i=8 then v:=M[2][4]*v;
elif i=9 then v:=M[3][1]*v;
elif i=10 then v:=M[3][2]*v;
elif i=11 then v:=M[3][3]*v;
elif i=12 then v:=M[3][4]*v;
elif i=13 then v:=M[4][1]*v;
elif i=14 then v:=M[4][2]*v;
elif i=15 then v:=M[4][3]*v;
elif i=16 then v:=M[4][4]*v;
fi;

w:=Inverse(MOp)*v;
for j in [1..16] do  #Rueckuebertragung 16-Vektoren zu
#4x4-Matrizen
Mhold2:=NullMat(4,4);

if j=1 then Mhold2[1][1]:=1;
elif j=2 then Mhold2[1][2]:=1;
elif j=3 then Mhold2[1][3]:=1;
elif j=4 then Mhold2[1][4]:=1;
elif j=5 then Mhold2[2][1]:=1;
elif j=6 then Mhold2[2][2]:=1;
elif j=7 then Mhold2[2][3]:=1;
elif j=8 then Mhold2[2][4]:=1;
elif j=9 then Mhold2[3][1]:=1;
elif j=10 then Mhold2[3][2]:=1;
elif j=11 then Mhold2[3][3]:=1;
elif j=12 then Mhold2[3][4]:=1;
elif j=13 then Mhold2[4][1]:=1;
elif j=14 then Mhold2[4][2]:=1;
elif j=15 then Mhold2[4][3]:=1;
elif j=16 then Mhold2[4][4]:=1;
fi;
```

```
        Mhold:=Mhold+w[j]*Mhold2;
        od;
        od;
        return(Mhold);
end;


#Bestimmung der Aequivalenzklassen von D(4,3):

dimorbits:=Orbits(OpGroup,dimmatlist,Matop);


numdimorbits:=Length(dimorbits);
Print("Anzahl der Aequivalenzklassen von D(4,3):
",numdimorbits,"\n");
dimrepresents:=[];
orbitsize:=[];

#Bestimmung der Repraesentanten:
for i in [1..numdimorbits] do
dimrepresents[i]:=dimorbits[i][1];
od;


for i in [1..numdimorbits] do
orbitsize[i]:=Length(dimorbits[i]);
od;

#Ausgabe der Repraesentanten und Aequivalenzklassengroessen:
Print("Die Aequivalenzklassen von D(4,3) werden repraesentiert
durch\n");
for i in [1..numdimorbits] do
Print("D",i,"=",dimrepresents[i],"\t Groesse von A",i,"=",
orbitsize[i],"\n");
od;
```

Es folgt GAP-Quellcode zur Berechnung von $\mathcal{D}(4,4)$, seinen Äquivalenzklassen und deren Mächtigkeit. er ist völlig analog aufgebaut wie der vorherige, bis auf den Unterschied, dass in `dimmatlist` nicht alle Elemente von $\mathcal{D}(4,4)$ abgespeichert werden, sondern nur die, deren Einträge der ersten Zeile von einer der folgenden Formen sind:

$$(4,0,0,0),(3,1,0,0),(2,2,0,0),(2,1,1,0),(1,1,1,1).$$

Dies wurde aus Laufzeitgründen getan und funktioniert, da bis auf Spaltenpermutationen die erste Zeile jedes Elements aus $\mathcal{D}(4,4)$ gleich einer der angegebenen Tupel ist. Außerdem werden durch `Orbits` auch die Elemente erzeugt und in `dimorbits` abgespeichert, die aus der Gruppenoperation von `OpGroup` auf `dimmatlist` durch `Matop` hervorgehen, selbst jedoch nicht in `dimmatlist` enthalten sind.

```
#Berechnung von D(4,4):
n:=4;

dimmatlist:=[];
s:=0;


#1.Zeile = (1 1 1 1)

for i5 in [0..3] do
for i6 in [0..3] do
for i7 in [0..3] do
for i8 in [0..3] do
for i9 in [0..3] do
for i10 in [0..3] do
for i11 in [0..3] do
for i12 in [0..3] do
for i13 in [0..3] do
for i14 in [0..3] do
for i15 in [0..3] do
for i16 in [0..3] do

if
        (i5+i6+i7+i8=n)
    and (i9+i10+i11+i12=n)
    and (i13+i14+i15+i16=n)
    and (1+i5+i9+i13=n)
    and (1+i6+i10+i14=n)
    and (1+i7+i11+i15=n)
    and (1+i8+i12+i16=n)


then
    s:=s+1;
    dimmatlist[s]:=NullMat(4,4);
    dimmatlist[s][1][1]:=1;
    dimmatlist[s][1][2]:=1;
    dimmatlist[s][1][3]:=1;
    dimmatlist[s][1][4]:=1;
    dimmatlist[s][2][1]:=i5;
    dimmatlist[s][2][2]:=i6;
    dimmatlist[s][2][3]:=i7;
    dimmatlist[s][2][4]:=i8;
    dimmatlist[s][3][1]:=i9;
```

```
    dimmatlist[s][3][2]:=i10;
    dimmatlist[s][3][3]:=i11;
    dimmatlist[s][3][4]:=i12;
    dimmatlist[s][4][1]:=i13;
    dimmatlist[s][4][2]:=i14;
    dimmatlist[s][4][3]:=i15;
    dimmatlist[s][4][4]:=i16;

fi;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;

#1.Zeile = (2 2 0 0)

for i5 in [0..2] do
for i6 in [0..2] do
for i7 in [0..4] do
for i8 in [0..4] do
for i9 in [0..2] do
for i10 in [0..2] do
for i11 in [0..4] do
for i12 in [0..4] do
for i13 in [0..2] do
for i14 in [0..2] do
for i15 in [0..4] do
for i16 in [0..4] do

if
        (i5+i6+i7+i8=n)
    and (i9+i10+i11+i12=n)
    and (i13+i14+i15+i16=n)
    and (2+i5+i9+i13=n)
    and (2+i6+i10+i14=n)
    and (i7+i11+i15=n)
    and (i8+i12+i16=n)
```

```
then
    s:=s+1;
    dimmatlist[s]:=NullMat(4,4);
    dimmatlist[s][1][1]:=2;
    dimmatlist[s][1][2]:=2;
    dimmatlist[s][1][3]:=0;
    dimmatlist[s][1][4]:=0;
    dimmatlist[s][2][1]:=i5;
    dimmatlist[s][2][2]:=i6;
    dimmatlist[s][2][3]:=i7;
    dimmatlist[s][2][4]:=i8;
    dimmatlist[s][3][1]:=i9;
    dimmatlist[s][3][2]:=i10;
    dimmatlist[s][3][3]:=i11;
    dimmatlist[s][3][4]:=i12;
    dimmatlist[s][4][1]:=i13;
    dimmatlist[s][4][2]:=i14;
    dimmatlist[s][4][3]:=i15;
    dimmatlist[s][4][4]:=i16;

fi;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;

#1.Zeile = (2 1 1 0)

for i5 in [0..2] do
for i6 in [0..3] do
for i7 in [0..3] do
for i8 in [0..4] do
for i9 in [0..2] do
for i10 in [0..3] do
for i11 in [0..3] do
for i12 in [0..4] do
for i13 in [0..2] do
```

```
for i14 in [0..3] do
for i15 in [0..3] do
for i16 in [0..4] do

if
        (i5+i6+i7+i8=n)
    and (i9+i10+i11+i12=n)
    and (i13+i14+i15+i16=n)
    and (2+i5+i9+i13=n)
    and (1+i6+i10+i14=n)
    and (1+i7+i11+i15=n)
    and (i8+i12+i16=n)


then
    s:=s+1;
    dimmatlist[s]:=NullMat(4,4);
    dimmatlist[s][1][1]:=2;
    dimmatlist[s][1][2]:=1;
    dimmatlist[s][1][3]:=1;
    dimmatlist[s][1][4]:=0;
    dimmatlist[s][2][1]:=i5;
    dimmatlist[s][2][2]:=i6;
    dimmatlist[s][2][3]:=i7;
    dimmatlist[s][2][4]:=i8;
    dimmatlist[s][3][1]:=i9;
    dimmatlist[s][3][2]:=i10;
    dimmatlist[s][3][3]:=i11;
    dimmatlist[s][3][4]:=i12;
    dimmatlist[s][4][1]:=i13;
    dimmatlist[s][4][2]:=i14;
    dimmatlist[s][4][3]:=i15;
    dimmatlist[s][4][4]:=i16;

fi;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
```

```
od;

#1.Zeile = (3 1 0 0)

for i5 in [0..1] do
for i6 in [0..3] do
for i7 in [0..4] do
for i8 in [0..4] do
for i9 in [0..1] do
for i10 in [0..3] do
for i11 in [0..4] do
for i12 in [0..4] do
for i13 in [0..1] do
for i14 in [0..3] do
for i15 in [0..4] do
for i16 in [0..4] do

if
        (i5+i6+i7+i8=n)
    and (i9+i10+i11+i12=n)
    and (i13+i14+i15+i16=n)
    and (3+i5+i9+i13=n)
    and (1+i6+i10+i14=n)
    and (i7+i11+i15=n)
    and (i8+i12+i16=n)



then
    s:=s+1;
    dimmatlist[s]:=NullMat(4,4);
    dimmatlist[s][1][1]:=3;
    dimmatlist[s][1][2]:=1;
    dimmatlist[s][1][3]:=0;
    dimmatlist[s][1][4]:=0;
    dimmatlist[s][2][1]:=i5;
    dimmatlist[s][2][2]:=i6;
    dimmatlist[s][2][3]:=i7;
    dimmatlist[s][2][4]:=i8;
    dimmatlist[s][3][1]:=i9;
    dimmatlist[s][3][2]:=i10;
    dimmatlist[s][3][3]:=i11;
    dimmatlist[s][3][4]:=i12;
    dimmatlist[s][4][1]:=i13;
    dimmatlist[s][4][2]:=i14;
    dimmatlist[s][4][3]:=i15;
    dimmatlist[s][4][4]:=i16;
```

```
fi;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;


#1. Zeile= (4,0,0,0)


for i6 in [0..n] do
for i7 in [0..n] do
for i8 in [0..n] do

for i10 in [0..n] do
for i11 in [0..n] do
for i12 in [0..n] do

for i14 in [0..n] do
for i15 in [0..n] do
for i16 in [0..n] do

if
        (i6+i7+i8=n)
    and (i10+i11+i12=n)
    and (i14+i15+i16=n)

    and (i6+i10+i14=n)
    and (i7+i11+i15=n)
    and (i8+i12+i16=n)


then
    s:=s+1;
    dimmatlist[s]:=NullMat(4,4);
    dimmatlist[s][1][1]:=4;
    dimmatlist[s][1][2]:=0;
```

```
    dimmatlist[s][1][3]:=0;
    dimmatlist[s][1][4]:=0;
    dimmatlist[s][2][1]:=0;
    dimmatlist[s][2][2]:=i6;
    dimmatlist[s][2][3]:=i7;
    dimmatlist[s][2][4]:=i8;
    dimmatlist[s][3][1]:=0;
    dimmatlist[s][3][2]:=i10;
    dimmatlist[s][3][3]:=i11;
    dimmatlist[s][3][4]:=i12;
    dimmatlist[s][4][1]:=0;
    dimmatlist[s][4][2]:=i14;
    dimmatlist[s][4][3]:=i15;
    dimmatlist[s][4][4]:=i16;

fi;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;
od;




#Deklaration der Erzeuger von G_4:

A12:=NullMat(16,16);
A12[5][1]:=1;
A12[1][5]:=1;
A12[2][6]:=1;
A12[6][2]:=1;
A12[3][7]:=1;
A12[7][3]:=1;
A12[4][8]:=1;
A12[8][4]:=1;
A12[9][9]:=1;
A12[10][10]:=1;
A12[11][11]:=1;
A12[12][12]:=1;
A12[13][13]:=1;
A12[14][14]:=1;
```

```
A12[15][15]:=1;
A12[16][16]:=1;

A1234:=NullMat(16,16);
A1234[5][1]:=1;
A1234[6][2]:=1;
A1234[7][3]:=1;
A1234[8][4]:=1;
A1234[9][5]:=1;
A1234[10][6]:=1;
A1234[11][7]:=1;
A1234[12][8]:=1;
A1234[13][9]:=1;
A1234[14][10]:=1;
A1234[15][11]:=1;
A1234[16][12]:=1;
A1234[1][13]:=1;
A1234[2][14]:=1;
A1234[3][15]:=1;
A1234[4][16]:=1;

A56:=NullMat(16,16);
A56[2][1]:=1;
A56[1][2]:=1;
A56[3][3]:=1;
A56[4][4]:=1;
A56[6][5]:=1;
A56[5][6]:=1;
A56[7][7]:=1;
A56[8][8]:=1;
A56[10][9]:=1;
A56[9][10]:=1;
A56[11][11]:=1;
A56[12][12]:=1;
A56[14][13]:=1;
A56[13][14]:=1;
A56[15][15]:=1;
A56[16][16]:=1;

A5678:=NullMat(16,16);
A5678[2][1]:=1;
A5678[3][2]:=1;
A5678[4][3]:=1;
A5678[1][4]:=1;
A5678[6][5]:=1;
A5678[7][6]:=1;
```

```
A5678[8][7]:=1;
A5678[5][8]:=1;
A5678[10][9]:=1;
A5678[11][10]:=1;
A5678[12][11]:=1;
A5678[9][12]:=1;
A5678[14][13]:=1;
A5678[15][14]:=1;
A5678[16][15]:=1;
A5678[13][16]:=1;

Atrans:=NullMat(16,16);
Atrans[1][1]:=1;
Atrans[5][2]:=1;
Atrans[9][3]:=1;
Atrans[13][4]:=1;
Atrans[2][5]:=1;
Atrans[6][6]:=1;
Atrans[10][7]:=1;
Atrans[14][8]:=1;
Atrans[3][9]:=1;
Atrans[7][10]:=1;
Atrans[11][11]:=1;
Atrans[15][12]:=1;
Atrans[4][13]:=1;
Atrans[8][14]:=1;
Atrans[12][15]:=1;
Atrans[16][16]:=1;


Atrans2:=NullMat(16,16);
Atrans2[1][16]:=1;
Atrans2[2][12]:=1;
Atrans2[3][8]:=1;
Atrans2[4][4]:=1;
Atrans2[5][15]:=1;
Atrans2[6][11]:=1;
Atrans2[7][7]:=1;
Atrans2[8][3]:=1;
Atrans2[9][14]:=1;
Atrans2[10][10]:=1;
Atrans2[11][6]:=1;
Atrans2[12][2]:=1;
Atrans2[13][13]:=1;
Atrans2[14][9]:=1;
Atrans2[15][5]:=1;
```

```
Atrans2[16][1]:=1;

Arot:=NullMat(16,16);
Arot[1][13]:=1;
Arot[2][9]:=1;
Arot[3][5]:=1;
Arot[4][1]:=1;
Arot[5][14]:=1;
Arot[6][10]:=1;
Arot[7][6]:=1;
Arot[8][2]:=1;
Arot[9][15]:=1;
Arot[10][11]:=1;
Arot[11][7]:=1;
Arot[12][3]:=1;
Arot[13][16]:=1;
Arot[14][12]:=1;
Arot[15][8]:=1;
Arot[16][4]:=1;


#Deklaration von G_4:

OpGroup:=Group(A12,A1234,A56,A5678,Atrans,Atrans2,Arot);

#Deklaration der Operation von G_4 auf D(4,3)

Matop:=function(M,MOp)
        local i,j,Mhold,Mhold2,v,w;


        Mhold:=NullMat(4,4);  #Rueckgabematrix initialisieren

        for i in [1..16] do   #4x4-Matrizen in 16-Vektoren
        #ubertragen und Operation ausfuehren
        v:=[0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0];
        v[i]:=1;

        if i=1 then v:=M[1][1]*v;
        elif i=2 then v:=M[1][2]*v;
        elif i=3 then v:=M[1][3]*v;
        elif i=4 then v:=M[1][4]*v;
        elif i=5 then v:=M[2][1]*v;
        elif i=6 then v:=M[2][2]*v;
        elif i=7 then v:=M[2][3]*v;
        elif i=8 then v:=M[2][4]*v;
```

```
        elif i=9 then v:=M[3][1]*v;
        elif i=10 then v:=M[3][2]*v;
        elif i=11 then v:=M[3][3]*v;
        elif i=12 then v:=M[3][4]*v;
        elif i=13 then v:=M[4][1]*v;
        elif i=14 then v:=M[4][2]*v;
        elif i=15 then v:=M[4][3]*v;
        elif i=16 then v:=M[4][4]*v;
        fi;

        w:=Inverse(MOp)*v;
        for j in [1..16] do  #Rueckuebertragung 16-Vektoren
        #zu 4x4-Matrizen
        Mhold2:=NullMat(4,4);

        if j=1 then Mhold2[1][1]:=1;
        elif j=2 then Mhold2[1][2]:=1;
        elif j=3 then Mhold2[1][3]:=1;
        elif j=4 then Mhold2[1][4]:=1;
        elif j=5 then Mhold2[2][1]:=1;
        elif j=6 then Mhold2[2][2]:=1;
        elif j=7 then Mhold2[2][3]:=1;
        elif j=8 then Mhold2[2][4]:=1;
        elif j=9 then Mhold2[3][1]:=1;
        elif j=10 then Mhold2[3][2]:=1;
        elif j=11 then Mhold2[3][3]:=1;
        elif j=12 then Mhold2[3][4]:=1;
        elif j=13 then Mhold2[4][1]:=1;
        elif j=14 then Mhold2[4][2]:=1;
        elif j=15 then Mhold2[4][3]:=1;
        elif j=16 then Mhold2[4][4]:=1;
        fi;

        Mhold:=Mhold+w[j]*Mhold2;
        od;
        od;
        return(Mhold);
end;


#Bestimmung der Aequivalenzklassen von D(4,4):

dimorbits:=Orbits(OpGroup,dimmatlist,Matop);


numdimorbits:=Length(dimorbits);
```

```
Print("Anzahl der Aequivalenzklassen von D(4,4):
",numdimorbits,"\n");
dimrepresents:=[];
orbitsize:=[];

#Bestimmung der Repraesentanten:
for i in [1..numdimorbits] do
dimrepresents[i]:=dimorbits[i][1];
od;


for i in [1..numdimorbits] do
orbitsize[i]:=Length(dimorbits[i]);
od;

#Ausgabe der Repraesentanten und Aequivalenzklassengroessen:
Print("Die Aequivalenzklassen von D(4,4) werden
repraesentiert durch:\n");
for i in [1..numdimorbits] do
Print("D",i,"=",dimrepresents[i],"\t Groesse von A",i,"=",
orbitsize[i],"\n");
od;
```

9 Literaturverzeichnis

Literatur

[1] J. H. van Lint and R. M. Wilson. *A course in combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001:157–171.

[2] Mohammad Mahdian and Ebadollah S. Mahmoodian. *Sudoku Rectangle Completion*, Google Research Mountain View, CA, USA, Department of Mathematical Sciences Sharif University of Technology Tehran, I.R. IRAN, 2017, arXiv:1704.08136

[3] ch.12 in: Walter Rudin. *Functional Analysis*, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics, University of Wisconsin, 1973.

[4] Richard V. Kadison, John R. Ringrose, *Fundamentals Of The Theory Of Operator Algebras*, Pure And Applied Mathematics, Volume 1, Elementary Theory, (1982), 109–120.

[5] Benjamin Musto and Jamie Vicary. Quantum Latin squares and unitary error bases. *Quantum Information and Computation* , pages 1318–1332, 2015. Presentation at Quantum Physics and Logic 2016

[6] Teodor Banica, Adam Skalski, Piotr Sołtan, Noncommutative homogeneous spaces: the matrix case, *J. Geom. Phys.***62** (2012),no. 6,1451–1466

[7] Bosch, Siegfried, *Lineare Algebra*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 2.Auflage, 2003, 177

[8] Weber, M. *On the classification of easy quantum groups*, Advances in Mathematics, Volume 245, 1 October 2013, pages 500-533.

[9] Teodor Banica, Julien Bichon, Benoit Collins, *Quantum permutation groups: a survey* ,Banach Center Publ. 78 (2007), 13-34

[10] Albert Atserias, Laura Mančinska, David E. Roberson, Robert Šámal, Simone Severini, Antonios Varvitsiotis, *Quantum and non-signalling graph isomorphisms*, 2017, arXiv:1611.09837v3

[11] ch.4 in: M. Weber, Skript zur Vorlesung *C*-Algebren*, Universität des Saarlandes, 2011/2012

[12] Martino Lupini, Laura Mancinska, and David E. Roberson, *Nonlocal Games and Quantum Permutation Groups*, 30 Mar 2018, arXiv:1712.01820

[13] Zhengfeng Ji, *Binary constraint system games and locally commutative reductions*, 4 Nov 2013, arXiv:1310.3794

[14] Benjamin Musto, *Constructing Mutually Unbiased Bases from Quantum Latin Squares*, EPTCS 236, 2017, pp. 108-126

[15] Benjamin Musto, Jamie Vicary, *Orthogonality for quantum Latin isometry squares*, 23 Apr 2018, arXiv:1804.04042