

①

Moritz Weber

12.04.2022

ElMa: Geometrie

~ Trivium: Grammatik, Rhetorik, Dialekt

~ Quadrivium: Arithmetik, Musik, Astronomie, Geometrie

↑
Euklid: Die Elemente

I: zweidimensionale Geometrie

(Dreiecke, Vielecke, Kreis, Euklid, Symmetrien / Gruppen)

II: dreidimensionale Geometrie

(Polyeder, Kugel, Kegel, Zentralperspektive)

III: moderne Geometrie

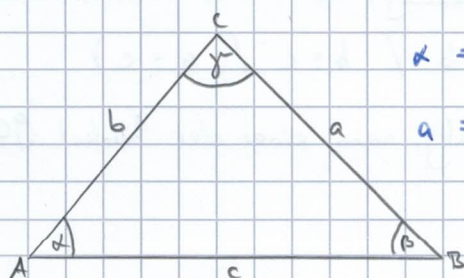
(Analysis, Grenzen sprengen, Diff. Geometrie, Graphen)

TEIL I: ZWEIDIMENSIONALE GEOMETRIE

§ 1 Dreiecke

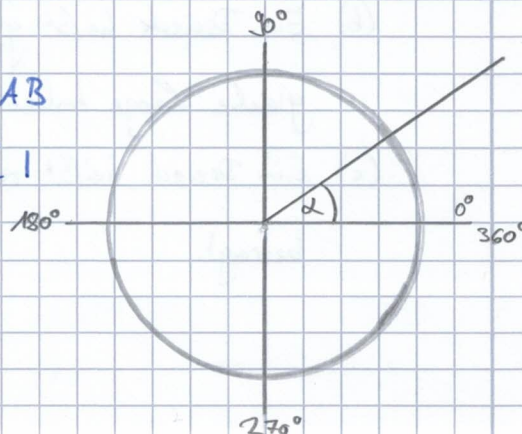
1.1 Definition: (Euklid, 1. Buch)

- (a) Ein Punkt ist, was keine Teile hat.
- (b) Eine Linie ist eine breitenlose Länge.
- (c) Eine gerade Linie (Strecke) ist eine solche, die zu den Punkten auf ihr gleichmäßig liegt.
- (d) Ein Winkel ist die Neigung zweier Linien in einer Ebene gegeneinander, die sich treffen, ohne einander fortzusetzen.



$$\alpha = \angle CAB$$

$$a = |\overline{BC}|$$

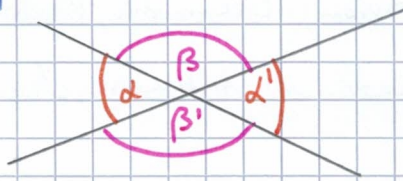


1.2 Feststellung (Axiom)

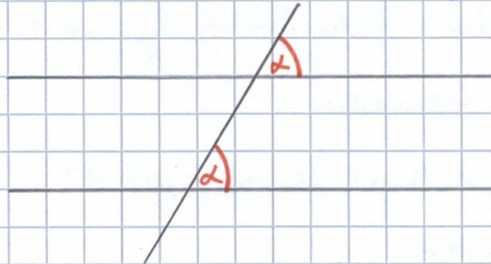
(a) An einer Geradenkreuzung gilt

$$\alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'$$

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$



(b) An einer Parallelen gibt es folgende gleiche Winkel:



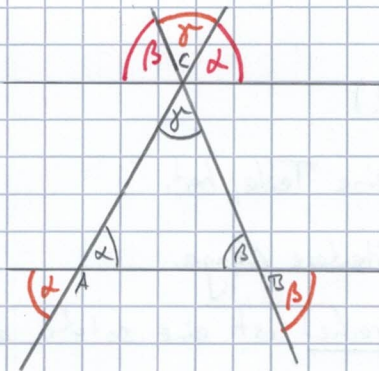
1.3 Satz:

In einem Dreieck ist die Winkelsumme 180° ,

also $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.



Beweis:



$\parallel$ zu $\overline{AB}$ (parallel)

■ nach 1.2 a

■ nach 1.2 b

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad \square$$

1.4 Definition:

(a) Ein Dreieck heißt regelmäßig, wenn $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

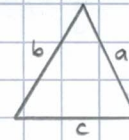
(b) Ein Dreieck heißt gleichschenkelig, wenn zwei Seiten die gleiche Länge haben ($a = b$ / $b = c$ / $a = c$)

(c) Ein Dreieck heißt rechtwinklig, wenn einer der Winkel 90° beträgt.

1.5 Feststellung: (Δ -Ungleichung)

Die Summe zweier Seitenlängen ist stets größer als die dritte.

("Die gerade Verbindung ist die kürzeste")

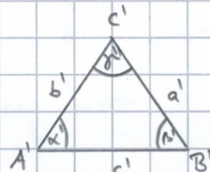
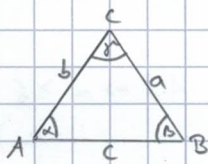


$$a + b > c$$

1.6 Feststellung:

Zur Konstruktion eines Dreiecks benötigt man 3 Größen, von denen mindestens eine eine Seite ist.

Diese legen das Dreieck schon eindeutig fest.

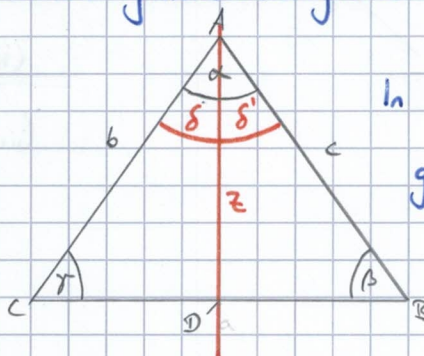


$$\begin{aligned} a &= a' & \Rightarrow & c = c' \\ b &= b' & & \alpha = \alpha' \\ \gamma &= \gamma' & & \beta = \beta' \end{aligned}$$

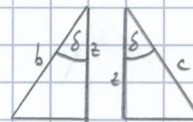
1.7 Lemma:

In einem gleichschenkligen Dreieck $b = c$ gilt $\beta = \gamma$.

Beweis:

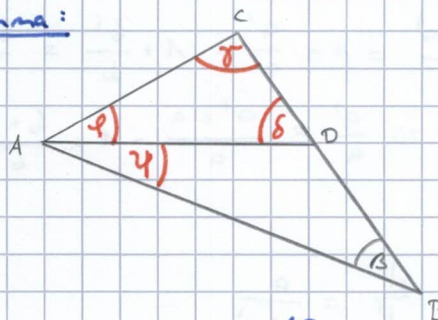


In den ΔABD und dem ΔACD gilt: $\delta = \delta'$, $z = z$, $b = c$



$$\stackrel{1.6}{\Rightarrow} \beta = \gamma$$

1.8 Lemma:



$$\Rightarrow \delta > \beta$$

Beweis:

$$\left. \begin{aligned} \delta + \varphi + \gamma &\stackrel{1.3}{=} 180^\circ \\ \beta + \gamma + (\varphi + \psi) &\stackrel{1.3}{=} 180^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta = 180^\circ - \gamma - \varphi > 180^\circ - \gamma - \varphi - \psi = \beta \quad \square$$

1.9 Proposition:

In einem Dreieck gehört zur größeren Seite auch stets der größere Gegenwinkel.

$$a > b \Rightarrow \alpha > \beta$$

$$a > c \Rightarrow \alpha > \gamma$$

$$b > c \Rightarrow \beta > \gamma$$

Beweis: Sei $a > b$.

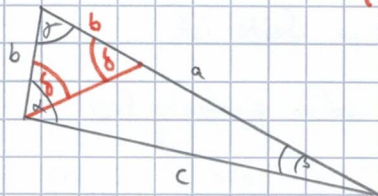
Will zeigen: $\alpha > \beta$.

($\delta = \delta$ nach 1.7)

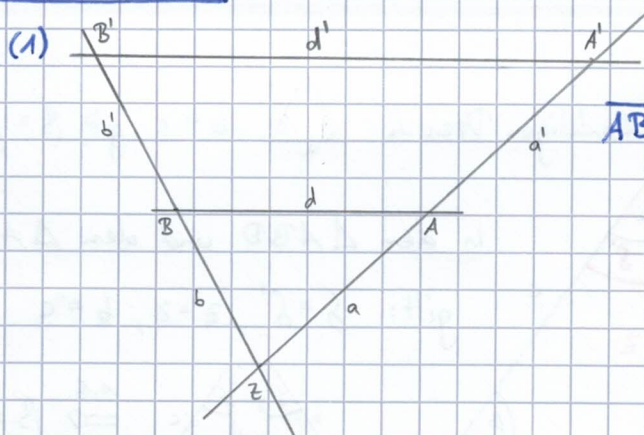
Weiß $\alpha > \delta$

„Sehe“ $\delta > \beta$

Warum genau? 1.8 $\Rightarrow \alpha > \delta > \beta$ $\square$



1.10 Strahlensätze:



$$\overline{AB} \parallel \overline{A'B'} \Rightarrow (i) \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

$$(ii) \frac{a+a'}{a} = \frac{b+b'}{b}$$

$$(iii) \frac{a+a'}{a'} = \frac{b+b'}{b'}$$

Es gilt: (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii):

$$(i) \Rightarrow (ii) : \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} \Rightarrow \frac{a+a'}{a} = 1 + \frac{a'}{a} = 1 + \frac{b'}{b} = \frac{b+b'}{b}$$

$$(ii) \Rightarrow (i) : \frac{a+a'}{a} = \frac{b+b'}{b} \Rightarrow \frac{a'}{a} = \frac{a'+a}{a} - 1 = \frac{b'+b}{b} - 1 = \frac{b'}{b}$$

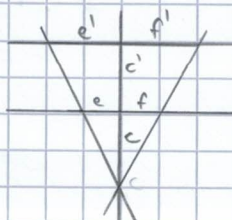
(i) $\Rightarrow$ (iii): genauso.

(2) Außerdem gilt: (iv) $\frac{d}{d'} = \frac{a}{a+a'}$

(v) $\frac{d}{a} = \frac{d'}{a+a'}$

(3) (vi) $\frac{e}{e'} = \frac{f}{f'}$

(vii) $\frac{e}{f} = \frac{e'}{f'}$



1.11 Bemerkung:

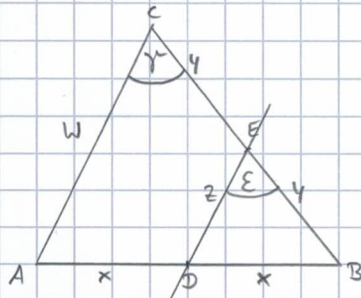
(a) 1. Strahlensatz umkehrbar:

gilt (i) dann $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$

(b) 2. Strahlensatz nicht umkehrbar

1.12 Satz: (Mittelparallele in Dreiecken)

Die Verbindungsstrecke zweier Seitenmitten eines Dreiecks ist parallel zur dritten Seite und halb so lang wie diese.



Dann gilt: $2z = w$ und $\gamma = \epsilon$

Beweis: Übungsblatt 1, Aufgabe 2 (Hinweis: Parallele zu $\overline{AB}$, dann 1.10)