

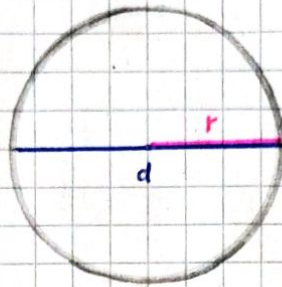
Beweis: $\overline{AC} \parallel \overline{PQ}$, $\overline{AC} \parallel \overline{RS}$ Genau so $\overline{RQ} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{PS}$ □

↑
1.12

3 VL

§3 Der Kreis

3.1 Def: Ein Kreis hat einen Radius r und einen Durchmesser $d = 2r$.



Frage: Wie hängen Umfang U und Fläche F vom Radius r ab?

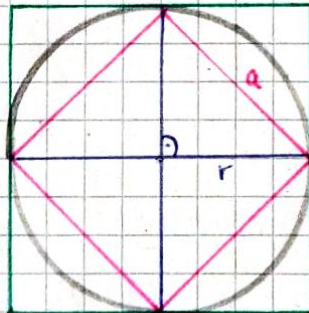
→ Sehr schwer exakt zu beantworten, habe nur Näherung.

3.2 Lemma (1. Schätzung am Quadrat):

$$\text{Es gilt: } \underbrace{2\sqrt{2}}_{\approx 2,828} d \leq U \leq 4d$$

$$2r^2 \leq F \leq 4r^2$$

Beweis:



$$a = \sqrt{2}r$$

$$\text{Umfang von } \diamond : 4a = 4\sqrt{2}r = 2\sqrt{2}d$$

Umfang U

$$\text{Umfang von } \square : 4d$$

$$\text{Fläche von } \diamond : 4 \cdot \frac{a^2}{2} = 2r^2$$

Fläche F

$$\text{Fläche von } \square : (2r)^2 = 4r^2$$

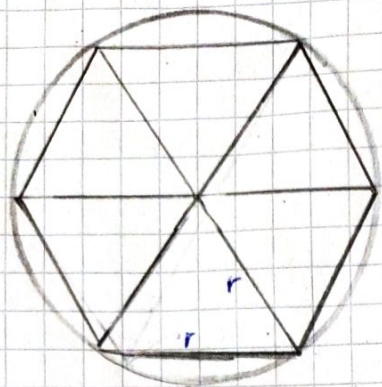
□

3.3 Lemma (2. Schätzung am Sechseck):

$$\text{Es gilt: } 3d \leq U \leq 4d$$

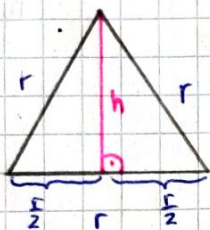
$$2,59r^2 \approx \frac{3\sqrt{3}}{2}r^2 \leq F \leq 4r^2$$

Beweis:



Umfang von $\hexagon$: $6r = 3d$

Fläche von $\hexagon$: $6 \cdot \Delta = \frac{3\sqrt{3}}{2} r^2$



$$h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} r = \frac{\sqrt{3}}{2} r$$

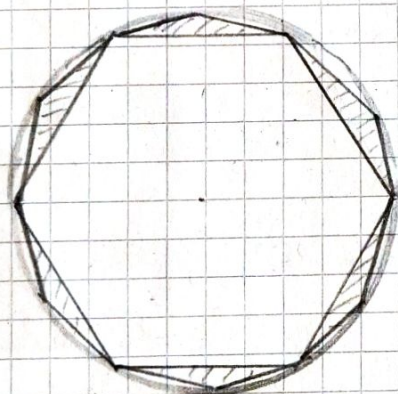
$$\text{Fläche von } \Delta: \frac{r \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} r^2$$

□

3.4 Lemma (3. Schätzung am 12-Eck)

$$3r^2 \leq F \leq 4r^2$$

Beweis: Übungsblatt



$\leadsto$ Archimedes

3.5 Def.: Sei π der Umfang des Kreises mit Durchmesser $d=1$.

(π = Perimeter) Internationaler Tag der Mathematik: 14. März (3/14)

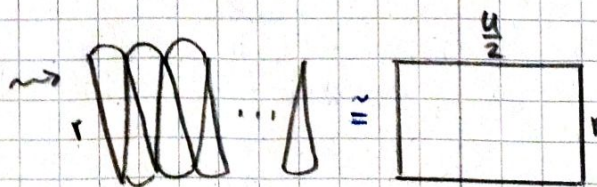
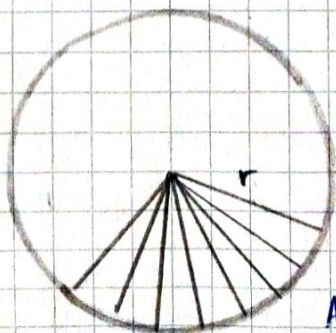
3.6 Vermutung: Es gilt $U = 2\pi r$, $F = \pi r^2$.

Kann das für den Moment nur approximativ zeigen, z. B. ausschöpfend à la Archimedes
($\leadsto$ Analysis für Limesbegriff).

Frage: Wieso eigentlich dasselbe π ?

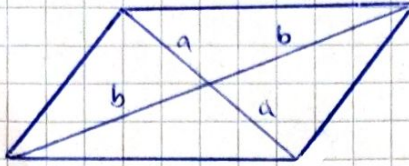
A priori möglich: $U = 2\pi_1 r$, $F = \pi_2 r^2$.

Aber $\pi_1 = \pi_2$.



$$\text{Also: } F \approx \frac{U}{2} r = \frac{2\pi r}{2} r = \pi r^2$$

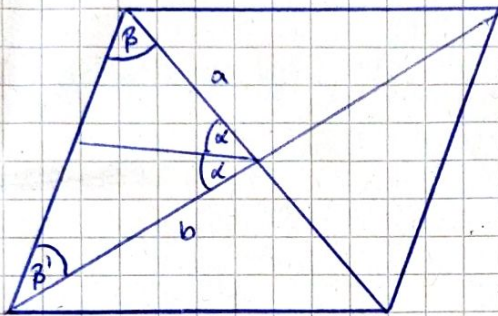
3.7 Lemma: Ein Parallelogramm, dessen Diagonalen gleiche Länge haben, ist ein Rechteck - und umgekehrt.



$$a = b \Leftrightarrow \text{Rechteck}$$

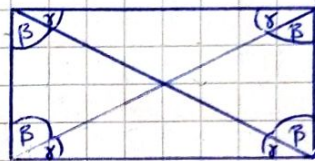
Beweis:

" $\Rightarrow$ ": $a = b$



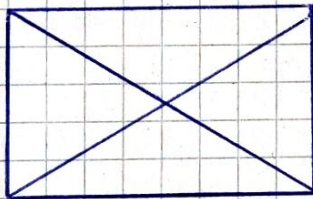
$$a = b \stackrel{\text{SWS}}{\Rightarrow} \beta = \beta'$$

und also



$$\text{da } 360^\circ = (\beta + \gamma) \cdot 4 \Rightarrow \beta + \gamma = 90^\circ$$

" $\Leftarrow$ ":

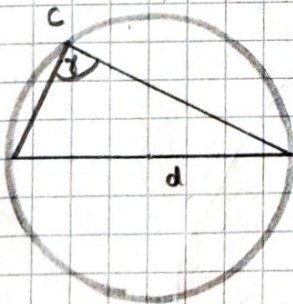


SWS:



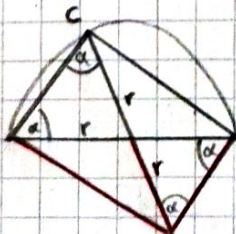
□

3.8 Satz (Thales): C liegt auf dem Kreis mit Durchmesser $d \Leftrightarrow \gamma = 90^\circ$



Beweis:

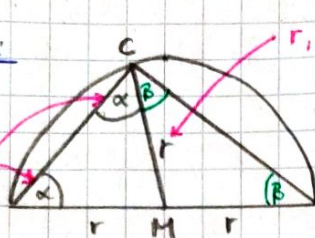
" $\Rightarrow$ ": C liege auf dem Kreis.



nach 3.7 also ein Rechteck

alternativ:

stimmen überein
da gleichschenkel-
liges Dreieck

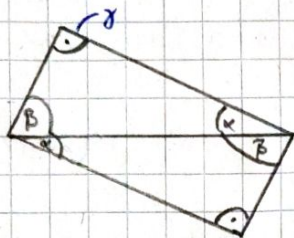


r , da C auf dem Kreis liegt

zweimal β , da ebenfalls gleichschenkelig

Winkelsumme: $\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$

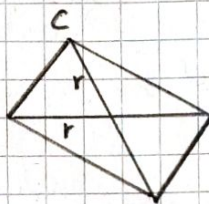
" $\angle$ ": Sei



gegeben mit $y = 90^\circ$

Habe also ein Rechteck

3.7 $\Rightarrow$ Diagonalen sind gleich lang



$\Rightarrow C$ liegt auf dem Kreis mit Radius r .

□

3.9 Satz: Seien $x, y \in \mathbb{R}$, $0 \leq x \leq y$. Für

• das arithmetische Mittel: $a := \frac{x+y}{2}$

(d.h. $a - x = y - a$, also hat a zu x und y gleichen Abstand)

• das geometrische Mittel: $g := \sqrt{xy}$

(d.h. $\frac{g}{x} = \frac{y}{g}$)

• das harmonische Mittel: $h := \frac{2xy}{x+y} = \frac{g^2}{a}$ (d.h. $\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$)

gilt $x \leq h \leq g \leq a \leq y$

mit " $=$ " an einer der Stellen genau dann, wenn " $=$ " überall gilt.

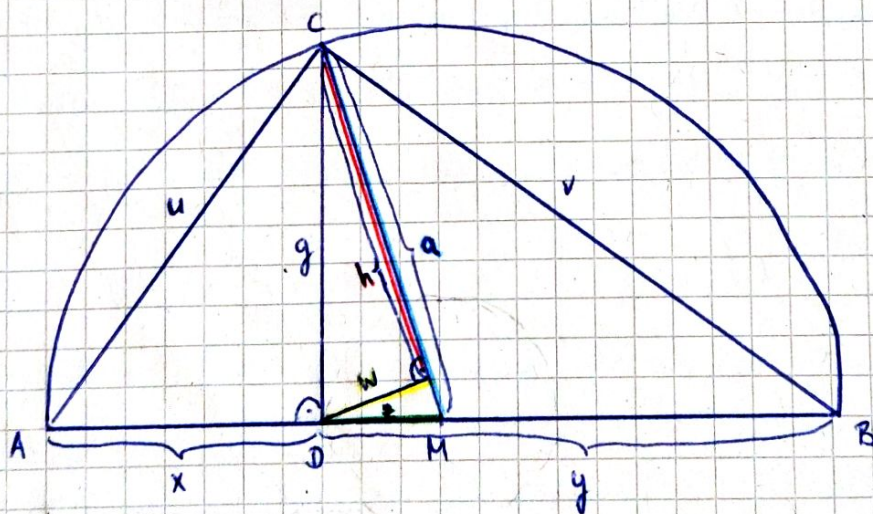
$\overline{AD} = x$

$\overline{DB} = y$

$\overline{MC} = a$

$\overline{EC} = h$

$\overline{DC} = g$



Beh.: Im Bild ist $g = \sqrt{xy}$,

denn (I) $g^2 + x^2 = u^2$

(II) $g^2 + y^2 = v^2$

(III) $u^2 + v^2 = (x+y)^2$

$\xrightarrow{(I)+(II)} 2g^2 + x^2 + y^2 = u^2 + v^2 \stackrel{(III)}{=} (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
 $\Rightarrow g^2 = xy, \text{ d.h. } g = \sqrt{xy}$

Im Bild ist $a = \frac{x+y}{2}$, da a der Radius des Halbkreises ist, $x+y$ der Durchmesser.

Im Bild ist $h = \frac{g^2}{a}$,

$$\left. \begin{array}{l} \text{denn: (I) } g^2 = h^2 + w^2 \\ \text{(II) } g^2 + z^2 = a^2 \\ \text{(III) } w^2 + (a-h)^2 = z^2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(I)+(II)} \\ \Rightarrow 2g^2 + z^2 = h^2 + w^2 + a^2 \\ \text{(I)+(II)-(III)} \\ \Rightarrow 2g^2 = h^2 + w^2 + a^2 - w^2 - (a-h)^2 = 2ah \end{array}$$

Also stimmt das Bild. Im Bild ablesen: $x \leq h \leq g \leq a \leq y$. (da in $\triangle$ $g \geq p$)

Und Gleichheit: C wandern lassen bis zu $D=M$.

$$\left(\begin{array}{l} g=a \Leftrightarrow D=M \\ h=g \Leftrightarrow D=M \\ x=h \Leftrightarrow D=M \\ a=y \Leftrightarrow D=M \end{array} \right)$$

□

4 VL

§ Die Elemente von Euklid

- Euklid, Die Elemente, 3. Jhd. v. Chr.: Geometrie, Arithmetik, 13 Bücher
- berühmt für streng axiomatischen, deduktiven, logischen Aufbau
- für etwa 2000 Jahre eines der wichtigsten Bücher der Mathematik, bis vor etwa 200 Jahren das meistverlegte Buch nach der Bibel
- für uns interessant:
 - konstruktive Geometrie
 - Axiome/Deduktion
 - Zahl als geometrisches Objekt
- Highlights:
 - Buch I - Postulat 5: Parallelenaxiom $\rightarrow$ nicht-euklidische Geometrie
 - Buch I - Prop. 4.7: Satz von Pythagoras
 - Buch III - Prop. 3.1: Satz des Thales
 - Buch VII - Prop. 2: Eukl. Algorithmus
 - Buch IX - Prop. 20: es gibt unendl. viele Primzahlen (Satz von Euklid)
 - Buch XIII - Prop. 18a: es gibt genau 5 platonische Körper

außerdem: Winkelsumme Dreieck, binom. Formeln, anth./geom. Mittel, Strahlensätze, Kongruenzsätze (SWS, ...), goldener Schnitt, $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, ...

Griech. Titel des Buchs: ΣΤΟΛΧΕΛΑ

$\alpha \beta \gamma \delta \epsilon \zeta \eta \vartheta \iota \kappa \lambda \mu \nu \xi \omicron \pi \rho \sigma \tau \upsilon \phi \chi \psi \omega$

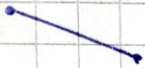
4.1 Def. (Buch I, Definitionen)

Ein Punkt ist, was keine Teile hat (Def. 1.1).

etc. [Linie, Fläche, Winkel, Kreis, Dreiecksarten, Quadrat, ...].

4.2 Postulate & Axiome (Buch I)

Gefordert soll sein, dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann. (Def. 4)



(Linien verlängern, Kreise ziehen, alle rechten Winkel sind gleich, ...)

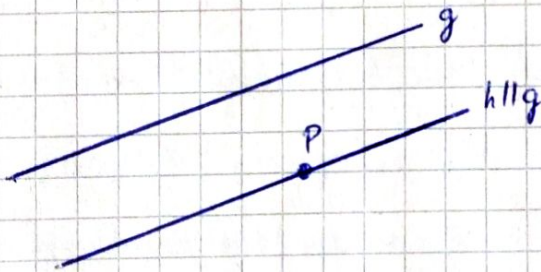
Axiome: Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.
($a=b, c=b \Rightarrow a=c$)

Das Ganze ist größer als der Teil.

Parallelenaxiom (Postulat 5, Axiom 11, Axiom 13):

In der Ebene gibt es zu jeder Geraden g und jedem Punkt P , der nicht auf g liegt, genau eine Gerade h durch den Punkt P , die parallel zu g verläuft (also diese nicht schneidet).

↳ (Von John Playfair ≈ 1800 umformuliert)



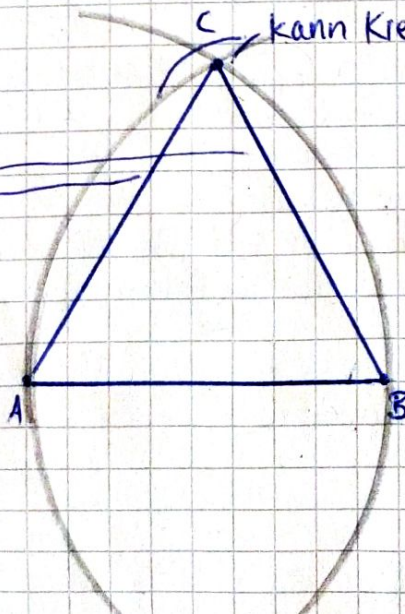
(Verletzung des Parallelenaxioms
 $\rightarrow$ nichteucl. Geometrie)



4.3 Prop. (B.I - P.1): Über einer gegebenen Strecke lässt sich ein gleichseitiges Dreieck errichten.

Beweis:

kann nach
Postulat 1
gerade Strecken
ziehen



kann Kreis ziehen nach Postulat 3

nach Def. 15: $|\overline{AC}| = |\overline{AB}| = |\overline{CB}|$

$\Rightarrow |\overline{AC}| = |\overline{CB}|$



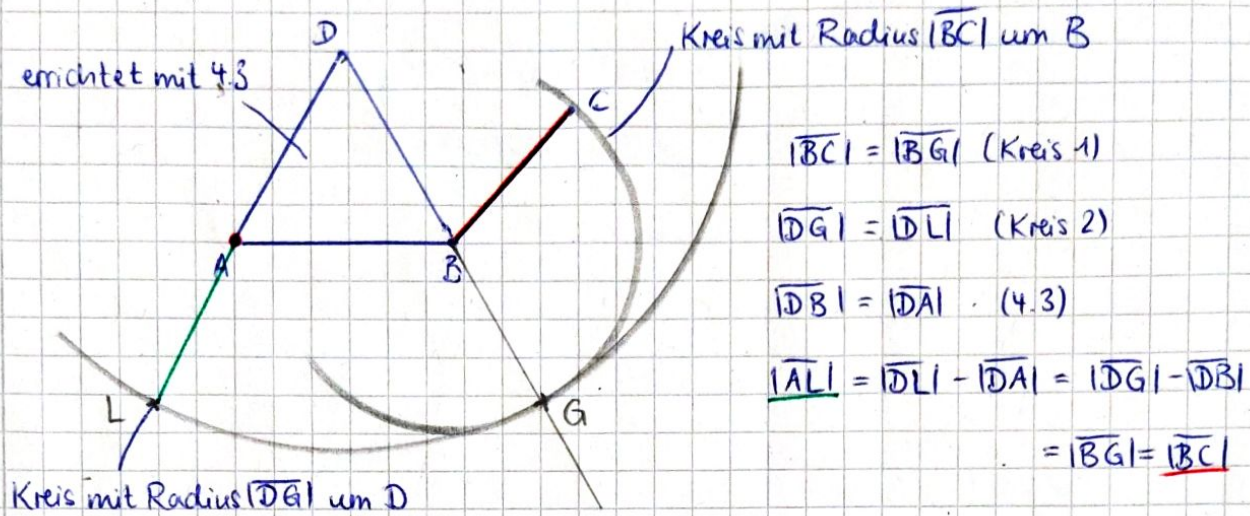
(was demselben gleich ist, ...)

also alle 3 Strecken gleich

□

4.4 Prop. (BI-P2): An einen gegebenen Punkt lässt sich eine gegebene Strecke gleicher Länge hinlegen.

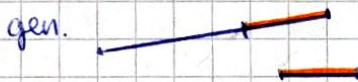
Beweis:



□

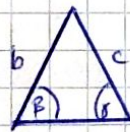
4.5 Prop. (BI-P.3-10):

(a) Gegeben zwei ungleiche Strecken, so kann man von der längeren die kürzere abtragen.



(b) SWS

(c) Lemma 1.7



$$b = c \Rightarrow \beta = \gamma$$

(d) Umkehrung von Lemma 1.7: $\beta = \gamma \Rightarrow b = c$

(e) SSS

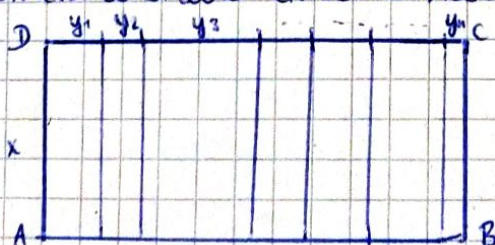
(f) wie man Winkel halbiert

(g) wie man Strecken halbiert

Buch II: „geometrische Algebra“

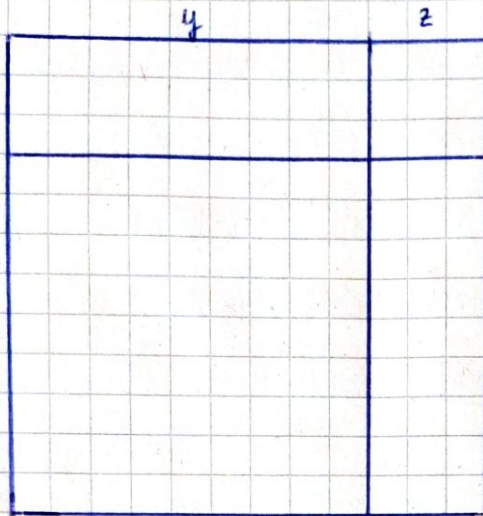
(übersetze Euklids Aussagen in algebraische Gleichungen)

4.6 Prop. (BI-P1): Hat man zwei Strecken $\overline{AD}, \overline{DC}$ und teilt man die eine von ihnen in beliebig viele Abschnitte, so ist das Rechteck aus beiden Strecken den Rechtecken aus der ungeteilten Strecke und allen einzelnen Abschnitten zusammen gleich.



$$x \cdot (y_1 + \dots + y_n) = x \cdot y_1 + \dots + x \cdot y_n$$

4.7 Prop. (BII - P4): Teilt man eine Strecke, wie es gerade trifft, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke den Quadraten über den Abschnitten und zweimal den Rechtecken aus den Abschnitten zusammen gleich.



$$(y+z)^2 = y^2 + z^2 + 2yz$$

1. Binomische Formel

4.8 Def. (B VII - Def.):

- (a) Einheit ist das, wonach jedes Ding eines genannt wird.
- (b) Zahl ist das aus Einheiten zusammengesetzte Menge (also $n \in \mathbb{N}$, $n = 1 + \dots + 1$).
- (c) gerade ist eine Zahl, die sich halbieren lässt.
- (d) Primzahl ist eine Zahl, die sich nur durch Einheiten messen lässt.
- (e) gegenseitig prim sind Zahlen, die sich nur durch die Einheit als gemeinsames Maß messen lässt.

1795 Urmeter, Paris (Messing) $(= \frac{1}{10^{10}}$ Pol bis Äquator)

1799 Platin

1875 internat. Meterkonvention

1960 Wellenlänge des Lichts (eine der Naturkonstanten) 1980er

Zahl bei Euklid: geometrisch: $\text{---} + \text{---} + \text{---}$

Zahl in der Zahlentheorie: Peano-Axiome